文章编号:1000-2367(2018)03-0006-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.03.002

环境污染下与年龄相关模糊随机种群系统的均方散逸性

何剑[1],李强[1],张启敏[1,2],亢婷[2]

(1.北方民族大学 数学与信息科学学院,银川 750021;2.宁夏大学 数学统计学院,银川 750021)

摘 要:讨论了一类在环境污染下与年龄相关的模糊随机种群系统,该系统受随机和模糊两种不确定性因素的影响.在有界条件(弱于线性增长条件)和 Lipschitz 条件下,利用 Itô 公式和 Bellman-Gronwall-type 引理,建立了均方意义下与年龄相关的模糊随机种群系统均方散逸性的判定准则. 并通过数值例子对所给出的结论进行了验证.

关键词:环境污染;模糊随机种群系统;Lipschitz 条件;均方散逸

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A

近年来,环境污染下与年龄相关的种群系统引起了许多学者的关注,并取得了很多研究成果[1-3].文献[4]建立了如下与年龄相关的毒素种群模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial a}=-\mu_1(t,a,C_0(t))P(t,a), & \text{在 } Q=(0,A)\times(0,T) \text{ 内},\\ \dfrac{\mathrm{d}C_0(t)}{\mathrm{d}t}=kC_e(t)-(l+m)C_0(t), & \text{在}[0,T]\text{ 内},\\ \dfrac{\mathrm{d}C_e(t)}{\mathrm{d}t}=k_1C_e(t)x(t)+l_1C_0(t)x(t)-hC_e(t)+u(t), & \text{在}[0,T]\text{ 内},\\ P(t,0)=\int_0^A\beta_1(t,a,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a, & \text{在}[0,T]\text{ 内},\\ P(0,a)=P_0(a), & \text{在}[0,A]\text{ 内},\\ 0\le C_0(0)\le 1,\ 0\le C_e(0)\le 1, & \\ x(t)=\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a, & \text{在}[0,A]\text{ 内},\end{cases}\tag{1}$$

其中 t 表示时间,a 表示年龄,$x(t)$ 表示在 t 时刻的总人口数,$P(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 处种群的密度,$\mu(a,t,C_0(t))$ 和 $\beta(t,a,C_0(t))$ 分别表示 t 时刻年龄为 a 种群的死亡率和出生率.$u(t)$ 表示 t 时刻外界全部毒素进入环境的总量,$C_0(t)$ 表示 t 时刻生物体内毒素浓度,$C_e(t)$ 表示 t 时刻环境毒素浓度,$A(0<A<\infty)$ 为种群个体存活的最大年龄,k 表示生物体吸收环境中毒素的净摄入率,l 表示生物体排出毒素的净排泄率,m 表示由于生物体新陈代谢过程及其他消耗过程所产生的毒素净化率,h 表示环境中毒素的总损耗率,k_1 表示生物体在环境污染情况下吸收毒素的摄入率,l_1 表示生物体在环境污染情况下排出毒素的排泄率.

然而,在自然界中,研究的系统不仅仅受到随机环境的影响,还会受到模糊不确定性的影响,例如在种群系统中,种群的出生率和死亡率等都是通过统计学的方法统计出来的,然而在统计中研究种群问题都是在给定的置信度下,通过数据计算得出置信区间,因此本文的种群密度也是在一个区间上的,换句话说种群密度

收稿日期:2017-03-11;**修回日期**:2017-09-15.

基金项目:国家自然科学基金(11461053);北方民族大学科研项目(2017SXKY07).

作者简介:何剑(1963-),男,宁夏银川人,北方民族大学副教授,研究方向为随机微分方程,E-mail:hj4119075@163.com.

通信作者:张启敏(1964-),女,宁夏银川人,宁夏大学教授,博士生导师,研究方向为控制理论及其应用,E-mail:zhangqimin64@sina.com.

是模糊的.因此,随机微分方程不可能精确描述带有模糊的问题.为了使模型更加合理,有必要把模糊和随机不确定因素考虑到种群模型中.本文讨论如下与年龄相关的模糊随机种群系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial a}=-\mu_1(t,a,C_0(t))P(t,a)+ & \\ \langle g_1(t,a,P(a,t))\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\rangle, & \text{在 } Q=(0,A)\times(0,T) \text{ 内}, \\ \dfrac{\mathrm{d}C_0(t)}{\mathrm{d}t}=kC_e(t)-(l+m)C_0(t), & \text{在}[0,T]\text{内}, \\ \dfrac{\mathrm{d}C_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hC_e(t)+u(t), & \text{在}[0,T]\text{内}, \\ P(t,0)=\int_0^A\beta_1(t,a,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a, & \text{在}[0,T]\text{内}, \\ P(0,a)=P_0(a), & \text{在}[0,A]\text{内}, \\ 0\le C_0(0)\le 1,\ 0\le C_e(0)\le 1, & \\ x(t)=\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a, & \text{在}[0,A]\text{内},\end{cases} \tag{2}$$

其中 $g(t,P(t,a))$ 是依赖于 $a,t,P(t,a)$ 的扩散系数.

尽管模糊方程都已被广泛研究[5-7],然而环境污染下模糊随机种群系统均方散逸性讨论的文献并未见到,据了解,只有文献[8]讨论了环境污染下的模糊随机种群系统的数值解.本文的主要目的是讨论环境污染下年龄相关的模糊随机种群系统,在有界的条件(弱于线性增长条件)和 Lipschitz 条件下,建立了均方意义散逸性的判定准则,得到的结论是文献[8-12]的推广.

1　预备知识

设 $V=H^1([0,A])\equiv\{\varphi\mid\varphi\in L^2([0,A]),\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\in L^2([0,A])$,其中$\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$是 φ 对 a 的偏导数$\}$,V 是一个 Sobolev 空间.$H=L^2([0,A])$ 满足 $V\longleftrightarrow H\equiv H'\longleftrightarrow V'$.

V' 是 V 的对偶空间,$\|\cdot\|$、$|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|_*$ 分别表示 V,H 和 V' 中的范数,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 和 V' 之间的对偶积,$(\cdot,\cdot)$ 表示 H 中的数量积,m 是一个常数,即有 $|x|\le m\|x\|,\forall x\in V$.算子 $B\in\mathscr{L}(K,H)$ 是所有从 K 到 H 的有界线性算子空间,$\|B\|_2$ 表示 Hilbert-Schmidt 范数,即 $\|B\|_2^2=\mathrm{tr}(BWB^{\mathrm{T}})$.$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 是一个完备的概率空间,其中滤波 $\mathscr{F}_t\ge 0$ 是递增和右连续的,$\mathscr{F}_0$ 包含了所有的零测度集,B_t 是定义在这个完备空间的一个标准的 Brown 运动.

$C_0(t)$,$C_e(t)$ 均为毒素浓度,对模型(2)给出如下假设.

假设 1　$0<k<l+m$,$\sup_{t\in[0,T]}u(t)\le h$.

引理 1[8]　对于模型(2),如果假设 1 成立,则 $\forall t\in[0,T]$,有 $0\le C_0(t)\le 1$,$0\le C_e(t)\le 1$ 成立.

模型(2)中的 $C_0(t)$,$C_e(t)$ 能精确地给出.所以只需要考虑如下模糊随机系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(t,a)}{\partial a}=-\mu_1(a,t,C_0(t))P(t,a)+\langle g_1(a,t,P(a,t))\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\rangle, & (3)\\ P(t,0)=\int_0^A\beta(a,t,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a, & (4)\\ P(0,a)=P_0(a), & (5)\\ x(t)=\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a. & (6)\end{cases}$$

考虑与年龄相关的模糊随机种群系统(2)满足

$$P(t,a)=0,\ \forall a\ge A.$$

通过(6)式对(3)~(5)式从 0 到 A 关于 a 积分可以得到以下系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\beta(t,C_0(t))x(t)-\mu(t,C_0(t))x(t)+\langle g(t,x(t))\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\rangle,\\ x(0)=x_0(0),\\ x(t)=0.\end{cases}\tag{7}$$

其中 $\beta(t,C_0(t))\equiv(\int_0^A\beta_1(t,a,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a)(\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a)^{-1}$. $x_t\equiv x(t)=\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a$ 表示 t 时刻种群的总数量,$\int_0^A\beta_1(t,a,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a$ 是由非局部边界条件定义的出生过程,$\beta(t,C_0(t))$ 表示时刻 t 生物体体内毒素浓度为 $C_0(t)$ 种群总的生育率.

$$\mu(t,C_0(t))\equiv(\int_0^A\mu_1(t,a,C_0(t))P(t,a)\mathrm{d}a)(\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a)^{-1},$$

$\mu(t,C_0(t))$ 表示时刻 t 生物体体内毒素浓度为 $C_0(t)$ 种群总的生育率.$g(t,x(t))\equiv\int_0^A g_1(t,P(t,a))\mathrm{d}a$.

定义 $\mathscr{F}(V)=\{u:V\to[0,1]\mid u$ 满足条件(i) ~ (iv) $\}$,

(i)u 是正规的,即存在 $x_0\in V$,使得 $u(x_0)=1$;

(ii)u 模糊凸的,即对任意 $x,y\in V,r\in[0,1]$,$u(rx+(1-r)y)\geq\min(u(x),u(y))$;

(iii)u 是上半连续的;

(iv)$[u]^0=\overline{\{a\in V\mid u(a)>0\}}$ 是紧的.

容易知道,模糊数的任意水平集为闭区间,$[u]^r=[u^-(r),u^+(r)]$,称 $u^-(r),u^+(r)$ 为 u 的支撑函数.

引理 1[9](模糊数表示定理) 设 u 为模糊数,那么

(i)$u^-(r)$ 关于 r 是$(0,1]$ 上左连续增函数;

(ii)$u^+(r)$ 关于 r 是$(0,1]$ 上左连续减函数;

(iii)$u^-(1)\leq u^+(1)$;

(iv)$u^-(r),u^+(r)$ 在 $r=0$ 右连续.

反之,对任何满足上述条件的 $a(r)$ 和 $b(r)$,必然存在模糊数 u,使得$[u]^r=[a(r),b(r)],r\in[0,1]$.

根据 Zadeh 的扩张原理定义模糊数的函数,对于 $u,v\in\mathscr{F}(V),\lambda\in R$,线性运算的 r 水平集满足区间运算式 $[u+v]^r=[u]^r+[v]^r,[\lambda u]^r=\lambda[u]^r$. 由于 $u-u=u+(-1)u\neq 0$,$\mathscr{F}(V)$ 不构成线性空间.称函数对$[w^-(r),w^+(r)]$ 为 u 与 v 的广义 H- 差,如果 $w^-(r)=u^-(r)-v^-(r),w^+(r)=u^+(r)-v^+(r)$,记为 $w=u\ominus v$.进一步,如果$[w^-(r),w^+(r)]$ 满足引理 1 的条件,则构成一个模糊数,成为 H- 差.

设 $\mathscr{K}(V)$ 是 V 中的非空,紧的凸子集.若 $A\in\mathscr{K}(V)$,I_A 是 $\mathscr{K}(V)$ 的特征函数,那么 $I_A\in\mathscr{F}(V)$.设 $u,v\in\mathscr{F}(V)$,

$$d_\infty(u,v):=\sup_{r\in[0,1]}d_V([u]^r,[v]^r),$$

其中 $[u]^r=\{a\in V\mid u(a)>r,0<r\leq 1\}$ 是 u 的 r 水平集,d_V 是定义在 $\mathscr{K}(V)$ 上的 Hausdorff 距离,即

$$d_V(A,B):=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\}.$$

其中 $\forall A,B\in\mathscr{K}(V)$,用 $\|\cdot\|$ 表示 V 中的范数,且$(\mathscr{K}(V),d_V)$ 是一个完备的、可分的距离空间.

设 $u,v\in\mathscr{F}(V)$,定义一个 $\|u\ominus v\|_{\mathscr{F}}$ 的范数

$$\|u\ominus v\|_{\mathscr{F}}=d_\infty(u,v):=\sup_{\alpha\in[0,1]}d_V([u]^\alpha,[v]^\alpha),$$

且 $(\mathscr{F}(V),d_\infty)$ 为一个距离空间.

设 $\mathscr{Q}_\rho$ 为 $\mathscr{F}(V)$ 上由距离 d_∞ 生成的 σ 域,可测映射 $y:(\Omega,\mathscr{A})\to(\mathscr{F}(V),\mathscr{Q}_\rho)$ 称为模糊随机变量.若 $\mathscr{P}(y_1=y_2)=1$,则称 y_1 与 y_2 随机等价.若模糊随机变量 y_1 满足 $Ed_\infty^2(y_1,\langle 0\rangle)<\infty$,则称模糊随机变量 y 为二阶的,二阶模糊随机变量的全体记为 $\mathscr{L}^2$,且 $\mathscr{L}^2$ 是完备的.

定义 1[13] 如果存在一个有界闭集 $\mathscr{B}\subset\mathbf{R}$,使得对任意给定有界集 $D\subset\mathbf{R}^n$,存在一个 $t^*=t^*(D)$,对任意给定包含于 D 里的初始值,当 $t\geq t^*$ 都有 $Ed_\infty^2(x_t,\langle 0\rangle)<\infty$,那么系统(1) 是均方散逸的,$\mathscr{B}$ 被称为它的均方吸引集.

为了证明本文的主要结论,给出以下假设条件:

(H1) $\mu(t,C_0(t))$,$\beta(t,C_0(t))$ 非负可测,并且

$$\begin{cases}0 \le \mu_0 \le \mu(t,C_0(t)) < \infty, & \text{在 } Q \text{ 中},\\ 0 \le \beta \le \bar{\beta}(t,C_0(t)) \le \infty, & \text{在 } Q \text{ 中}.\end{cases} \tag{8}$$

令 $g: I \times \Omega \times \mathscr{F}(V) \to \mathrm{L}(K,V)$ 是一族几乎处处有定义的非线性算子.当 $t \in [0,T]$,则 g 满足:

(H2)(Lipschitz 条件)存在一个常数 $L > 0$,对 $\forall u,v \in \mathscr{F}(V)$,使得

$$\| g(t,x,\omega,u) - g(t,x,\omega,v) \|_2^2 \le L d_\infty^2(u,v). \tag{9}$$

(H3) 存在一个常数 $K' > 0$,对 $\forall u,v \in \mathscr{F}(V)$,使得

$$\| g(t,x,\omega,\langle 0 \rangle) \|_2^2 \le K'. \tag{10}$$

2 系统(7)的均方散逸性

本节将在有界的条件(弱于线性增长条件)和 Lipschitz 条件下,给出在环境污染下与年龄相关的模糊随机单种群系统均方散逸性的判定准则.假设存在一个模糊随机过程 x_t,并且 x_t 是方程(7)式的强解.

定理 1 假设条件 (H1)~(H3) 成立,令 $l = 2L + 2(\bar{\beta} - \mu_0) < 0$,那么

(i)对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 t^* ,使得下列式子成立 $Ed_\infty^2(x_t,\langle 0 \rangle) \le -\dfrac{2K'}{l} + \varepsilon$, $t^* \le t \le T$.

(ii)对任意的 $\varepsilon > 0$,方程(7) 式是均方散逸的,其吸引集为 $\mathscr{B} = (0, -\dfrac{2K'}{l} + \varepsilon)$.

证明 对 $\| x_t \|_{\mathscr{F}}^2$ 应用 Itô 公式得

$$\mathrm{d} \| x_t \|_{\mathscr{F}}^2 = 2[\beta(t,C_0(t)) - \mu(t,C_0(t))] x_t \odot x_t \mathrm{d}t + \| g(t,x_t) \|_2^2 \mathrm{d}t. \tag{11}$$

这里 $\| \cdot \|_{\mathscr{F}}$ 和 $\odot$ 分别表示 $\mathscr{F}(V)$ 中的范数和内积.对(11) 式两边从 0 到 t 积分

$$\begin{aligned}\| x_t \|_{\mathscr{F}}^2 = \| x_0 \|_{\mathscr{F}}^2 + 2(\beta - \mu) \int_0^t \| x_s \|_{\mathscr{F}}^2 \mathrm{d}s + \\ 2\int_0^t x_s \odot g(s,x_s) \mathrm{d}B(s) + \int_0^t \| g(s,x_s) \|_2^2 \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{12}$$

应用假设条件 (H1),可得

$$\begin{aligned}\| x_t \|_{\mathscr{F}}^2 \le \| x_0 \|_{\mathscr{F}}^2 + 2(\bar{\beta} - \mu_0) \int_0^t \| x_s \|_{\mathscr{F}}^2 \mathrm{d}s + \\ 2\int_0^t x_s \odot g(s,x_s) \mathrm{d}B(s) + \int_0^t \| g(s,x_s) \|_2^2 \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{13}$$

对(13) 式应用假设(H2)、(H3),可得

$$\begin{aligned}Ed_\infty^2(x_t,\langle 0 \rangle) \le Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + 2(\bar{\beta} - \mu_0) \int_0^t Ed_\infty^2(x_s,\langle 0 \rangle) \mathrm{d}s + 2E\int_0^t \{ \| g(s,x_s) - \\ g(s,\langle 0 \rangle) \|_2^2 + \| g(s,\langle 0 \rangle) \|_2^2 \} \mathrm{d}s \le Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + 2K't + (2L + 2(\bar{\beta} - \\ \mu_0)) \int_0^t Ed_\infty^2(x_s,\langle 0 \rangle) \mathrm{d}s = Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + \int_0^t 2K' \mathrm{d}s + \\ (2L + 2(\bar{\beta} - \mu_0)) \int_0^t Ed_\infty^2(x_s,\langle 0 \rangle) \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{14}$$

利用 Bellman-Gronwall-type[14-15] 估计(14)式得

$$\begin{aligned}Ed_\infty^2(x_t,\langle 0 \rangle) \le (Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + \int_0^t 2K' \exp(-\int_0^u l \mathrm{d}v) \mathrm{d}u) \cdot \exp(\int_0^t l \mathrm{d}u) = \\ -\frac{2K'}{l} + (Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + \frac{2K'}{l}) e^{lt}.\end{aligned} \tag{15}$$

对任意给定的有界集 D,令 $x_t \in D$,令 $R = \sup d_\infty^2(x_t,\langle 0 \rangle)$.对任意的 $\varepsilon > 0$,如果 $Ed_\infty^2(x_0,\langle 0 \rangle) + \dfrac{2K'}{l} \ge 0$,对任意初始值 $y_0 \in D$,存在一个 t^*,当 $t^* \le t \le T$ 时,有

$$(R+\frac{2K'}{l})e^{lt^*}\leq \varepsilon. \tag{16}$$

另一方面,如果 $Ed_\infty^2(x_0,\langle 0\rangle)+\frac{2K'}{l}<0$,那么对任意的 $0\leq t\leq T$ 有 $Ed_\infty^2(x_t,\langle 0\rangle)\leq -\frac{2K'}{l}+\varepsilon$,所以 $\mathscr{B}=(0,-\frac{2K'}{l}+\varepsilon)$ 是系统(7)式的一个均方吸引集.

证毕.

注 1 从定理 1 可以看出,方程(7)式的解在均方意义下是散逸的.

3 数值例子

通过以下例子对给出的结论进行验证,

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\beta(t,C_0(t))x(t)-\mu(t,C_0(t))x(t)+\langle g(t,x(t))\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\rangle,\\ x(0)=[x_0]^\alpha,\\ x(t)=0,\end{cases} \tag{17}$$

其中 $t\in[0,4]$,$\alpha\in[0,1]$,B_t 是一个标准的 Brown 运动,$C_0(t)=0.4+0.2\sin t$,$\beta(t,C_0(t))=\frac{5}{7}\left[\frac{4}{5}-\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]$,$\mu(t,C_0(t))=\frac{5}{7}\left[\frac{3}{2}+\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]$,$g(t,x)=0.2x$.(17)式可以写成如下形式

$$x_t\overset{I\mathscr{P}.1}{=\!=}x_0+\int_0^t\left[\frac{5}{7}\left[\frac{4}{5}-\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x(s)-\frac{5}{7}\left[\frac{3}{2}+\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x(s)\right]\mathrm{d}s+\langle\int_0^t g(s,x(s))\mathrm{d}B(s)\rangle. \tag{18}$$

很容易验证 $g(t,x)=0.2x$ 满足假设条件(H2)和(H3) .为了得到方程(18)式的解析解 $x(t)$,给出 x_t,x_0 的 α- 水平集如下

$$[x(t)]^\alpha=[x_L^\alpha(t),x_U^\alpha(t)],$$

$$[x_0]^\alpha=[x_{0,L}^\alpha,x_{0,U}^\alpha]=[(0.5-0.5(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}\exp(-1.25),(0.5+0.5(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}\exp(-1.25)],\alpha\in(0,1].$$

显然 $x_{0,L}^\alpha,x_{0,U}^\alpha$ 是随机变量,$x_{0,L}^\alpha,x_{0,U}^\alpha$ 是随机过程.这里$[x_0]^\alpha$ 是一个模糊数.

通过以上定义,把方程(18)式重新写成如下形式

$$\begin{cases}x_L^\alpha(t)\overset{I\mathscr{P}.1}{=\!=}x_{0,L}^\alpha+\int_0^t\left[\frac{5}{7}\left[\frac{4}{5}-\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x_U^\alpha(s)-\frac{5}{7}\left[\frac{3}{2}+\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x_U^\alpha(s)\right]\mathrm{d}s+\\ \quad\langle\int_0^t g(s,x_U^\alpha(s))\mathrm{d}B(s)\rangle,\\ x_U^\alpha(t)\overset{I\mathscr{P}.1}{=\!=}x_{0,U}^\alpha+\int_0^t\left[\frac{5}{7}\left[\frac{4}{5}-\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x_L^\alpha(s)-\frac{5}{7}\left[\frac{3}{2}+\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x_L^\alpha(s)\right]\mathrm{d}s+\\ \quad\langle\int_0^t g(s,x_U^\alpha(s))\mathrm{d}B(s)\rangle.\end{cases} \tag{19}$$

令 $d=\left[\frac{5}{7}\left[\frac{4}{5}-\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x(t)-\frac{5}{7}\left[\frac{3}{2}+\frac{0.5C_0(t)}{1+C_0(t)}\right]x(t)\right]$.

容易验证在模糊随机单种群模型(17)式中,当 $d<0$ 时,种群数量随着时间的增加而减少,当时间足够长时,该物种将趋于稳定.并且方程(17)式满足定理 1 的条件,故模型(17)式具有散逸性.

为了更加直观的观测种群密度的变化情况,取 $\alpha\in[0.4,1]$.图 1、图 2 分别表示 $[x_0]^\alpha=[x_{0,L}]^\alpha=(0.5-0.5(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}\exp(-1.25)$ 在环境污染下模糊随机种群系统的数值模拟和均值数值模拟(即 $E\,x(t)=\frac{1}{1\,000}\sum_{i=1}^{1\,000}x_i(t)$),图 3、图 4 分别表示 $[x_0]^\alpha=[x_{0,U}]^\alpha=(0.5+0.5(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}\exp(-1.25)$ 在环境污染下模糊随机种群系统的数值模拟和均值数值模拟,图 5 和图 6 分别表示当 $\alpha=0.66$ 时在环境污染下模糊随机种

群系统数值模拟和均值数值模拟.由此可以直观地看出系统的解一直保持在某个区域里面，即此系统具有均方散逸性.

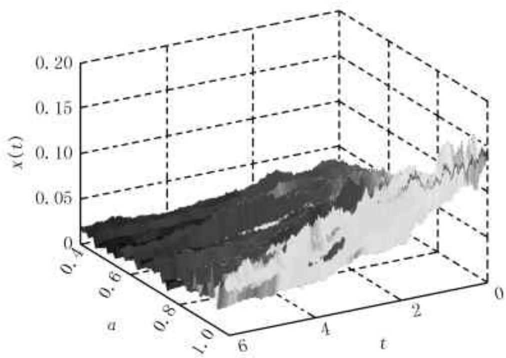

图 1　$[x_0]^\alpha=[x_{0,L}]^\alpha$，$x(t)$ 的数值模拟

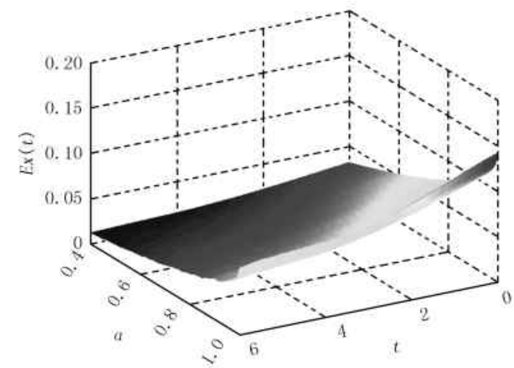

图 2　$[x_0]^\alpha=[x_{0,L}]^\alpha$，$x(t)$ 的均值数值模拟

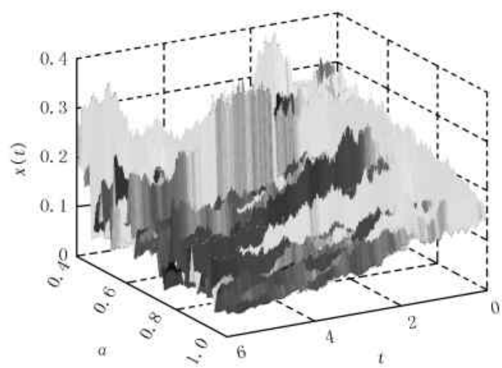

图 3　$[x_0]^\alpha=[x_{0,U}]^\alpha$，$x(t)$ 的数值模拟

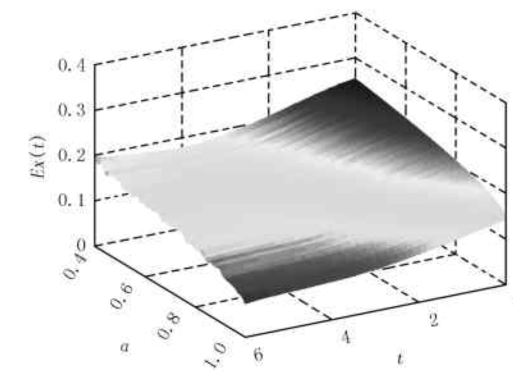

图 4　$[x_0]^\alpha=[x_{0,U}]^\alpha$，$x(t)$ 的均值数值模拟

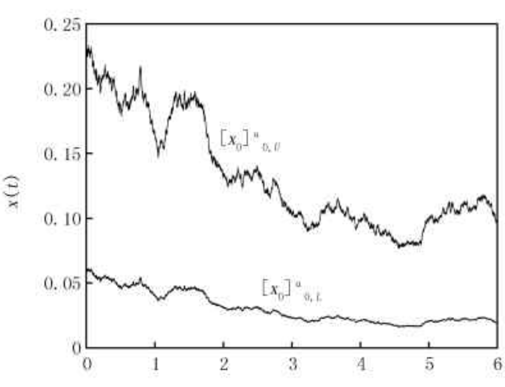

图 5　当 $\alpha=0.66$ 时，模糊随机种群系统的数值模拟

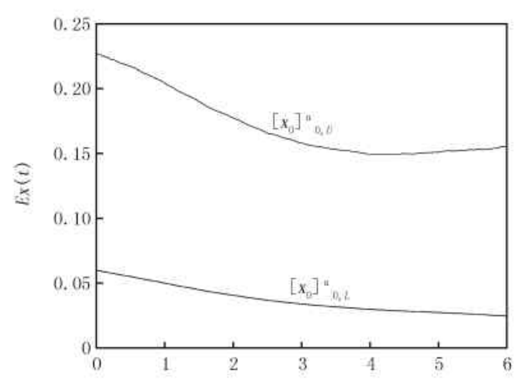

图 6　当 $\alpha=0.66$ 时，模糊随机种群系统的均值数值模拟

4　结　论

本文将模糊和随机两种不确定性因素引入种群系统，得到了模糊随机种群系统.同时该模型还考虑了生物体内毒素和环境污染毒素对种群的影响，更加真实准确的反映了生物体在自然环境下的生存状态，而且较确定性种群模型能更好地反应种群发展特性.利用 Itô 公式和 Bellman-Gronwall-type 引理，建立了均方意义下与年龄相关的模糊随机种群扩散系统均方散逸性的判定准则.本文所得到的结论为种群灭绝和最优控

制等研究提供了一定的理论依据.

参 考 文 献

[1] Wang K,Random Mathematical Biology Model[M].Beijing:Science Press,2010.

[2] Liu B,Chen L,Zhang Y.The effects of impulsive toxicant input on a population in a polluted environment[J].Journal of Biological Systems,2003,11(3):265-274.

[3] He J,Wang K.The survival analysis for a single-species in a polluted environment[J].Applied Mathematical Modelling,2007,31(10):2227-2238.

[4] Luo Z,He Z.Optimal control for age-dependent population hybrid system in a polluted environment[J].Applied Mathematical Modelling,2014,228(9):68-76.

[5] Fei W.Existence and uniqueness for solutions to fuzzy stochastic differential equations driven by local martingales under the non-Lipschitzian condition[J].Nonlinear Analysis,2013,76(1):202-214.

[6] 郭建敏,田海燕.带控制项的模糊微分方程的稳定性[J].数学的实践与认识,2013,43(13):276-279.

[7] Malinowski M.Strong solutions to stochastic fuzzy differential equations of Itô type[J].Mathematical & Computer Modelling,2012,55(3):918-928.

[8] Zhao Y,Yuan S,Zhang Q.Numerical solutions of a fuzzy stochastic single-species age-structure model in a polluted environment[J].Applied Mathematics and Computation,2015,260(C):385-396.

[9] 杨洪福,申芳芳,张启敏.与年龄相关的模糊随机种群扩散系统的数值解[J].模糊系统与数学,2015,29(1):74-82.

[10] 李强,张启敏,辛志贤.分数 Brown 运动时变随机种群收获系统数值解的均方散逸性[J].数学的实践与认识,2017,47(2):176-183.

[11] 申芳芳,辛志贤,张启敏,等.与年龄相关的随机种群系统分裂倒向 Euler 法的几乎必然指数稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2017,45(2):8-13.

[12] 杨洪福,张启敏.具有 Markov 调制的随机年龄结构种群系统半驯服 Euler 法的指数稳定性[J].数学年刊 A 辑(中文版),2016 (1):71-88.

[13] Ma Q,Ding D,Ding X.Mean-square dissipativity of several numerical mathods for stochastic differential equations with jumps[J].Applied Numerical Mathematics,2014,82(4):44-50.

[14] Mao X.Exponential Stability of Stochastic Differential Equations[M].Basel:Marcel Dekker Inc,1994.

[15] Zhang Q,Li X.Existence and uniqueness for stochastic age-dependent population with fractional Brownian motion[J].Mathenatical Problems in Engineering,2012.DOI:10.1155/2012/813535.

Mean-square dissipativity of fuzzy stochastic age-structured population system in a polluted environment

He Jian[1], Li Qiang[1], Zhang Qimin[1,2], Kang Ting[2]

(1.School of Mathematics and Information Science,North University for nationalities,Yinchuan 750021,China;
2.School of Mathematics and Statistics,Ningxia University,Yinchuan 750021,China)

Abstract:This paper presents an investigation of a class of fuzzy stochastic age-structured population system in a polluted environment,where the system is subjected to two kinds of uncertainties: stochastic and fuzziness,simultaneously.Under the linear growth condition and Lipschitz condition,we establish some criterions of mean-square dissipativity of a fuzzy stochastic age-structured population system through Itô formula and Bellman-Gronwall-type lemma.Finally,a numerical example is provided to illustrate the theoretical results.

Keywords:environmental pollution; fuzzy stochastic age-structured population system; Lipschitz condition; mean-square dissipativity

[责任编校 陈留院]