第 44 卷 第 4 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.44 No.4
2016 年 7 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jul. 2016

文章编号:1000－2367(2016)04－0007－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.04.002

二阶 Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题解的正则性

丁丹平，朱 琳

(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013)

摘 要:通过利用小黏性方法得到二阶 Camassa-Holm 方程柯西问题局部弱解的存在性,再利用 Hölder 不等式和 Gronwall 不等式等进行一系列的先验估计,研究 Camassa-Holm 方程解的正则性.

关键词:二阶 Camassa-Holm 方程;弱解的存在性;解的正则性估计

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A

1993 年,Camassa 和 Holm[1] 利用 Hamilton 方法研究浅水波运动时得到了浅水波方程 $u_t+2\alpha u_x-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}$,其中 $u(t,x)$ 表示水波在 x 方向的振幅,α 是与波速有关的常数,此方程是完全可积的.

当 $\alpha=0$ 时,即为 Camassa-Holm (C-H) 方程

$$u_t-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx},$$

其具有尖峰孤子解 $u(t,x)=ce^{-|x-ct|}$,其中 c 为任意常数. 该解在尖峰处一阶不可导,是 $H^1(R)$ 意义下的弱解.

2003 年,Adrian Constantin 和 Boris Kolev[2] 在研究单位圆微分同胚群上的测地线时,首次得到方程

$$\partial_t u=B_k(u,u),k\in\mathbf{N}, \tag{1}$$

其中,$A_k(u):=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\partial_x^{2j}u$,$C_k(u):=-uA_k(\partial_xu)+A_k(u\partial_xu)-2\partial_xuA_k(u)$.

显然算子 $C_k(u)$ 是一个全导数. 记多项式 $F_k(u)$,使得 $B_k(u,u):=A_k^{-1}C_k(u)-u\partial_xu$,$C_k(u)=-\partial_xF_k(u)$,$-F_k(u)=\int_{-\infty}^{x}C_k(u(\xi))\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\partial_x^{2j}(u^2)-\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\int_{-\infty}^{x}(u\partial_x^{2j}\partial_xu+2\partial_xu\partial_x^{2j}u)\mathrm{d}\xi$.

当 $k=0$ 和 $k=1$,方程(1) 变为非黏性 Burgers 方程

$$u_t+3uu_x=0, \tag{2}$$

以及 C-H 方程

$$\partial_tu-\partial_t\partial_x^2u+3u\partial_xu-2\partial_xu\partial_x^2u-u\partial_x^3u=0. \tag{3}$$

通常称方程(1) 为高阶 Camassa-Holm 方程.

C-H 方程是一类具有潜水波背景的色散方程. 潜水波方程可用于解决物理学、流体力学等领域中诸多问题,因此,国内外许多人员研究了潜水波方程,如文献[3] 利用 Clifford 分解方法得到了三维潜水波方程解的适定性问题.

2009 年,文献[4] 讨论了高阶 Camassa-Holm 方程的柯西问题的适定性问题,得到如下结论:当 $u_0\in H_{k,p}=\{f\in H^k(R)\mid\partial_x^kf\in L^p(R)\}$ 且 $2<p<\infty$ 时,方程有一全局弱解

$$u\in C([0,\infty);C^{k-1}(R))\cap L^\infty([0,\infty);H^k(R)).$$

文献[5] 研究了高阶 Camassa-Holm 方程柯西问题的解,得到如下结论:

收稿日期:2015-11-06;修回日期:2016-04-13.

基金项目:国家自然科学基金(11371175)

第 1 作者简介:丁丹平(1965－),男,江苏丹阳人,江苏大学教授,博士,研究方向为非线性发展方程.

通信作者:朱 琳(1990－),女,江苏南通人,江苏大学硕士研究生,E-mail:673786142@qq.com.

(1) 若 $u_0 \in H^r(R^1)$, $r \geq 2s+1$, 其中 $s \geq 0$, 则存在一个最大时间 $T = T(u_0) > 0$ 使得方程存在唯一解

$$u = u(\cdot, u_0) \in C([0,T); H^r(R^1)) \cap C^1([0,T); H^{r-1}(R^1));$$

(2) 若 $u_0 \in H^k(R^1)$, 且 $\forall x \in R^1$, 存在 $M > 0$, 使得 $P_{>M} u_0 = 0$, 则方程存在全局弱解

$$u \in C([0,\infty); H^{k-1}(R)) \cap L^\infty([0,\infty); H^k(R)),$$

并且满足守恒律 $\int_R u^2 + (\partial_x u)^2 + \cdots + (\partial_x^k u)^2 \mathrm{d}x = \int_R u_0^2 + (\partial_x u_0)^2 + \cdots + (\partial_x^k u_0)^2 \mathrm{d}x$.

文献[6]研究了二阶 Camassa-Holm 柯西问题整体解的存在性,得到如下结论:若 $u_0 \in H^s(R)$, $s > \frac{9}{2}$, 存在依赖于 $\| u_0 \|_{H^s}$ 的时间 $T > 0$, 使方程存在唯一的解 $u = u(t,x)$ 满足 $u \in C([0,T); H^s(R)) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(R))$.

文献[7]研究了局部适定性,得到如下结论:若 $u_0 \in H^s(R)$, $s \geq k$, $k \geq 2$, 存在 $T > 0$, 使 Cauchy 问题(1)有唯一解 $u \in C([0,T); H^s(R)) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(R))$.

上述工作主要是对高阶 Camassa-Holm 方程的相关问题的弱解存在唯一性展开研究,弱解的正则性则是本文的兴趣所在.

文献[8]对 Navier-Stokes 方程柯西问题进行了解的正则性研究,得到如下结论:若 $(\rho_0, \rho_0^\beta, \rho_0^\gamma) \in L^1(R) \cap H^2(R)$, $u_0 \in D^1(R) \cap D^2(R)$, 对任意 $T > 0$, 使方程存在唯一的整体经典解 $(\rho, \rho^\gamma, \rho^\beta) \in C([0,T]; H^2(R))$; $(\rho_t, (\rho^\gamma)_t (\rho^\beta)_t) \in C([0,T]; H^1(R))$.

文献[9]对二维 Boussinesq 方程柯西问题进行了解的正则性研究,得到如下结论:设 $u_0, v_0, \theta \in H^2(R^2)$, 且 $\operatorname{div}(u_0, v_0) = 0$, 对任意 $T > 0$, 使得方程存在唯一经典解

$$u, v, \theta \in L^\infty([0,T); H^2(R^2)); v_x, \theta_y \in L^2([0,T); H^2(R^2)).$$

Navier-Stokes 拟线性方程 $(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = [\mu(\rho) u_x]_x - [p(\rho)]_x$ 和 Boussinesq 拟线性方程 $u_t + u u_x = k_1 u_{xx} + k_2 u_{yy} - v u_y - p_x$ 与 Camassa-Holm 方程形式类似,受两者研究工作启发,并结合两者研究方法来研究 Camass-Holm 方程解的正则性问题.

本文主要研究二阶 C-H 方程的 Cauchy 问题,即

$$\begin{cases} \partial_t u = B_2(u,u), (t,x) \in (0,T) \times R, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in R. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $B_2(u,u) := A_2^{-1} C_2(u) - u \partial_x u$, $A_2(u) = \partial_x^4 u - \partial_x^2 u + u$.

1 弱解的存在性

将(4)式写成如下形式:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x p = 0, t > 0, x \in R, \\ A_2(p) = F_2(u), t > 0, x \in R, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in R. \end{cases} \tag{5}$$

构造(5)式的黏性方程形式如下:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon + \partial_x p_\varepsilon = \varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon, \\ A_2(p_\varepsilon) = F_2(u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x). \end{cases} \tag{6}$$

引理 1[10] 若初值 $u_{\varepsilon 0} \in H^3(R)$, 则对任意的 $\| u_\varepsilon \|_{H^3(R)}$, $\| v_\varepsilon \|_{H^3(R)} \leq C$ 如果方程

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} - \Delta u_\varepsilon = F(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, \Delta u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0,x) = u_{\varepsilon 0}(x) \end{cases}$$

的非线性部分满足 $\| F(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, \Delta u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, \Delta v_\varepsilon) \|_{H^2(R)} \leq M_R \| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|_{H^3(R)}$, 其中 M_R 为与 C 有关的常数,那么存在一个依赖于 $\| u_{\varepsilon 0} \|_{H^3(R)}$ 的时间 T, 使得方程(6)有唯一的局部解 $u_\varepsilon \in C([0,T), H^3(R)) \cap C^1([0,T), H^2(R))$. 进一步,若 $t_0 > 0$, 则对任意 $T > t_0$, 解 $u_\varepsilon \in C^\infty(R \times (t_0, T))$.

引理 1 是经典的非线性热传导方程的局部存在性结果[11-12],其结果可由压缩映射原理得到,证明依赖

于热半群的光滑性，即

$$\begin{cases} \| e^{t\Delta} u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^3(R)} \leq C t^{\frac{1}{2}} \| u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^2(R)}, \\ \| (e^{t\Delta} - Id) u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^2(R)} \leq C t^{\frac{1}{2}} \| u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^3(R)}. \end{cases}$$

假设 1　$u_{\varepsilon 0} \in H^3(R)$，$\| u_{\varepsilon 0} \|_{H^2(R)} \leq \| u_0 \|_{H^2(R)}$ 且在 $H^2(R)$ 上 $u_{0,\varepsilon} \to u_0$.

假设 2　$u_0 \in H^2(R)$ 且对某一 $2 < p < \infty$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$.

引理 2[4]　若假设 1 和假设 2 成立，则对任意的 $\varepsilon > 0$ 及每个 $t \geq 0$ 都有

$$\| u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(R)}^2 + 2\varepsilon \int_0^t \| \partial_x u_\varepsilon(\tau,\cdot) \|_{H^2(R)}^2 \mathrm{d}\tau = \| u_{0,\varepsilon} \|_{H^2(R)}^2,$$

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,T)\times R)},\ \| \partial_x u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,T)\times R)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(R)}.$$

对(6) 式的第 2 个方程使用傅里叶变换，得

$$P_\varepsilon(t,x) = \int_R \left(\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}-3i}{12} e^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) \left(u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} u_{\varepsilon x}^2 - \frac{1}{2} u_{\varepsilon xx}^2 \right)(t,z)\mathrm{d}z +$$

$$\frac{3}{2} \int_R \left(\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) u_{\varepsilon x}^2(t,z)\mathrm{d}z.$$

令

$$P_\varepsilon(t,x) = P_{1\varepsilon}(t,x) + P_{2\varepsilon}(t,x), \tag{7}$$

记

$$G_1(x-z) = \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{8}$$

$$G_2(x-z) = \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} e^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{9}$$

所以

$$P_{1\varepsilon}(t,x) = \int_R G_1(x-z) \left[u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2 \right](t,z)\mathrm{d}z, \tag{10}$$

$$P_{2\varepsilon}(t,x) = \frac{3}{2} \int_R G_2(x-z) u_{\varepsilon x}^2(t,z)\mathrm{d}z. \tag{11}$$

引理 3　若假设 1 和假设 2 成立，则对每个 $t \geq 0, \varepsilon > 0$，有

$$\| P_\varepsilon(t,\cdot) \|_{W^{p,1}(R)},\ \| P_\varepsilon(t,\cdot) \|_{W^{p,\infty}(R)} \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2, \tag{12}$$

其中 C_0 是不依赖于 ε 的常数.

证明　固定 $t > 0$，对于每个 $p \in \{1,\infty\}$，$i, j \in \{0,1,2,3\}$，

$$\partial_x^i P_{1\varepsilon}(t,x) = \int_R \frac{d^i G_1}{\mathrm{d}x^i}(x-z) \left[u_\varepsilon^2(t,z) + \frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon(t,z))^2 - \frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon(t,z))^2 \right]\mathrm{d}z,$$

$$\partial_x^j P_{2\varepsilon}(t,x) = \frac{3}{2} \int_R \frac{d^j G_2}{\mathrm{d}x^j}(x-z)(\partial_x u_\varepsilon)^2(t,z)\mathrm{d}z.$$

由卷积的 young 不等式，(7)，(8)，(9) 和(10) 式中得

$$\| \partial_x^i P_{1\varepsilon}(t,\cdot) \|_{L^p(R)} \leq \left\| \frac{d^i G_1}{\mathrm{d}x^i} \right\|_{L^p(R)} \int_R \left[u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2 \right]\mathrm{d}z \leq$$

$$C_0 \| u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(R)}^2 \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2. \tag{13}$$

类似地，

$$\| \partial_x^j P_{2\varepsilon}(t,x) \|_{L^p(R)} \leq \frac{3}{2} \left\| \frac{d^j G_2}{\mathrm{d}x^j} \right\|_{L^p(R)} \int_R |(\partial_x u_\varepsilon)^2(t,z)| \mathrm{d}z \leq$$

$$C_0 \| u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(R)}^2 \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2. \tag{14}$$

其中 C_0 是不依赖于 ε 的常数.

因此，由估计(13) 和(14) 式可以得到(12) 式.

对任意给定的正常数 T,记 $\Pi_T := [0,T)\times R$.

引理 4[4] 若假设 1 成立,则对任意的 $0<\varepsilon<1$ 以及每一 T, $0<t<T$,

$$\|\partial_t u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(R)}\le K_1,$$
$$\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\Pi_T)}\le K_2.$$

其中 $K_1=(\frac{1}{\sqrt{2}}+C_0)\|u_0\|^2_{H^2(R)}+\|u_0\|_{H^2(R)}$, $K_2=(\sqrt{2T}+C_0\sqrt{T})\|u_0\|^2_{H^2(R)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(R)}$.

引理 5 若假设 1 和假设 2 成立,则对每个 $0<\varepsilon<1$,都存在一个仅依赖于 $\|u_0\|_{H^2(R)}$, T 不依赖于 ε 的正常数 K_T,使得

$$\|\partial_t\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^1(\Pi_T)},\ \|\partial_t\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\le K_T.$$

证明 固定 $T>0$ 及 $0<\varepsilon<1$. 对(6)式的第一个方程两边关于 x 求两次导

$$\partial_t\partial_x^2 u_\varepsilon+u_\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon+3\partial_x u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon+\partial_x^3 P_\varepsilon=\varepsilon\partial_x^4 u_\varepsilon.$$

根据引理 2、引理 3 和引理 4 有

$$\begin{aligned}\|\partial_t\partial_x^3 P_{2\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}&\le 3\|G_1''(x-z)\|_{L^p(R)}\int_{\Pi_T}\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t,z)\mathrm{d}z\le\\ &C_0\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\le C_0K_2\sqrt{T}\|u_0\|_{H^2},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\partial_x^3 P_{1,\varepsilon}(t,x)=&\int_R G_1''(x-z)(2u_\varepsilon\partial_t u_\varepsilon+\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon)\mathrm{d}z+\int_R G_1''(x-z)\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_x^3 P_\varepsilon\mathrm{d}z+\\ &\frac{1}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2-\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon+\int_R(G_1''-G_1)(x-z)[\frac{1}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2-\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon]\mathrm{d}z+\\ &\int_R G_1''(x-z)[\frac{5}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2+\varepsilon(\partial_x^3 u_\varepsilon)^2]\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

类似(15),根据引理 2、引理 3 和引理 4 并使用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|\partial_t\partial_x^3 P_{1,\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le& C_0[\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\\ &\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Pi_T)}+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Pi_T)}+\\ &\varepsilon\|\partial_x^3 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}(\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+1)]\le C_0[\sqrt{T}\|u_0\|_{H^2(R)}(K_1+K_2+C_0\|u_0\|^2_{H^2(R)})+\\ &T\|u_0\|^2_{H^2(R)}(\sqrt{2}\|u_0\|_{H^2(R)}+\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^2(\Pi_T)})+\frac{1}{2}T\|u_0\|^2_{H^2(R)}],\end{aligned}\tag{16}$$

其中 K_1, K_2 在引理 4 中给出,C_0 不依赖于 ε.

因此,对于 $p\in\{1,\infty\}$, $\|\partial_t\partial_x^i P_\varepsilon(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le\|\partial_t\partial_x^i P_{1,\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}+\|\partial_t\partial_x^i P_{2\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le C_0K_T$,由于(15)、(16)两不等式的右边每项的估计都只与 $\|u_0\|_{H^2(R)}$ 和 T 有关而与 ε 无关,所以 K_T 是依赖于 $\|u_0\|_{H^2(R)}$ 和 T 不依赖于 ε 的常数.

引理 6[4] 若假设 1 和假设 2 成立,则对任意的 $2<p<\infty$, $t\ge 0$ 和 $\varepsilon>0$,有

$$\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(R)}\le\|\partial_x^2 u_{\varepsilon 0}(t,\cdot)\|_{L^p(R)}\mathrm{e}^{K_3t}+K_4\frac{\mathrm{e}^{K_3t}-1}{K_3},$$

其中 $K_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(R)}$, $K_4=(3+C_0)\|u_0\|^2_{H^2(R)}$ 是依赖于 $\|u_0\|_{H^2(R)}$ 的常数.

引理 7[4] 令 $2<p<\infty$,若假设 1 和假设 2 成立. 则方程(6)的解集 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^\infty_{loc}([0,T);H^2(R))$ 上是紧致的并且对每一个 $T>0$ 存在一个递减至零的正序列 $\{\varepsilon_h\}_{h\in\mathbf{N}}$ 以及一个函数 $u\in L^\infty([0,T);H^2(R))\cap H^1([0,T);H^1(R))$,使得在 $L^\infty([0,T);H^2(R))$ 上,有 $u_{\varepsilon_h}\to u$.

定义 1 称函数 $u=u(t,x)$ 是柯西问题(4)式的弱解,若满足:

(i) $u(t,x)\in C([0,T);C^1(R))\cap L^\infty([0,T);H^2(R))$;

(ii) u 在分布意义下满足方程(4);

(iii) $u(0,x)=u_0(x)$,对任意 $x\in R$;

(iv) $\|u(t,\cdot)\|_{H^2(R)}\le\|u_0\|_{H^2(R)}$,对任意 $t>0$.

引理 8 若假设 2 成立,则柯西问题(4)式具有弱解 $u(t,x)\in C([0,T);C^1(R))\cap L^\infty([0,T);H^2(R))$.

证明　当 $\epsilon \to 0^+$，令 $u(t,x)$ 为黏性渐近解 $u_\epsilon(t,x)$ 的极限. 由引理 2 ～ 引理 7，可知

$$u(t,x) \in C([0,T);C^1(R)) \cap L^\infty([0,T);H^2(R)),$$

即定义 1 中的(i)，(ii)，(iii) 成立.

综合引理 2 和引理 7，可知定义 1 中(iv) 成立.

引理 9　设 $2 < p < \infty$，给定初值 $u_0 \in H^2(R)$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$，则存在正常数 T，使得柯西问题(4) 式有解 $u \in H^2(R)$.

证明　由引理 1 及引理 7 直接得到.

2　解的正则性估计

引理 10　设 $2 < p < \infty$，$u_0 \in H^4(R)$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$，则存在正常数 T，使得柯西问题(4) 式有解 $u \in H^4(R)$.

证明　因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2)\mathrm{d}x = -\int_R u_x^3\,\mathrm{d}x - 5\int_R u_x u_{xx}^2\,\mathrm{d}x - \int_R u_x u_{xxx}^2\,\mathrm{d}x - 3\int_R u_x u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x -$$
$$2\int_R u_{xxx}\left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)\mathrm{d}x + 4\int_R u_x^2 u_{xxx}\mathrm{d}x - 2\int_R u_x u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + 2\int_R u_x u_{xxx}^2\,\mathrm{d}x + 2\int_R u_{xxx}u_{xx}^2\,\mathrm{d}x -$$
$$2\int_R uP_x + u_xP_{xx} + u_{xx}P_{xxx} - u_{xxx}P + u_{xxx}P_{xx} - u_{xxxx}P_x + u_{xxxx}P_{xxx}\,\mathrm{d}x \leq$$
$$\int_R |u_x||u_x^2 + 7u_{xx}^2 - u_{xxx}^2 + 3u_{xxxx}^2|\,\mathrm{d}x + \int_R |u_{xxx}||-2u^2 + 3u_x^2|\,\mathrm{d}x +$$
$$2\int_R |uP_x + u_xP_{xx} + u_{xx}P_{xxx} - u_{xxx}P + u_{xxx}P_{xx} - u_{xxxx}P_x + u_{xxxx}P_{xxx}|\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^4}^2 \leq 7\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^4}^2 + 3\|u_{xxx}\|_{L^\infty}\|u\|_{H^2}^2 + 2\|P_x\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + 2\|P_{xx}\|_{L^\infty}\|u_x\|_{L^2} +$$
$$2\|P_{xxx}\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} + 2\|P\|_{L^\infty}\|u_{xxx}\|_{L^2} + 2\|P_{xx}\|_{L^\infty}\|u_{xxx}\|_{L^2} + 2\|P_x\|_{L^\infty}\|u_{xxxx}\|_{L^2} +$$
$$2\|P_{xxx}\|_{L^\infty}\|u_{xxxx}\|_{L^2} \leq 7\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^4}^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\|u\|_{H^4}^2\|u\|_{H^2}^2 + \|P_x\|_{L^\infty}^2 + \|u\|_{L^2}^2 +$$
$$\|P_{xx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|P_{xxx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \|P\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + \|P_{xx}\|_{L^\infty}^2 +$$
$$\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + \|P_x\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 + \|P_{xxx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 \leq$$
$$(5\sqrt{2}\|u_0\|_{H^2} + 2)\|u\|_{H^4}^2 + 7C_0\|u_0\|_{H^2(R)}^2,$$

其中 $C_1 = (5\sqrt{2}\|u_0\|_{H^2} + 2)$，$C_2 = 7C_0\|u_0\|_{H^2(R)}^2$ 根据 Gronwall 不等式，有 $\|u\|_{H^4}^2 \leq \|u_0\|_{H^4}^2\mathrm{e}^{C_1t} + C_2\dfrac{\mathrm{e}^{C_1t} - 1}{C_1}$.

引理 11　设 $2 < p < \infty$，$u_0 \in H^6(R)$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$，则存在正常数 T，使得柯西问题(4) 式有解 $u \in H^6(R)$.

证明　类似引理 10 估计可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^6}^2 \leq (7\|u_0\|_{H^2} + 7\|u_0\|_{H^3}^2)\|u\|_{H^6}^2 + 10\|u_0\|_{H^3}^2\|u_0\|_{H^5}^2 +$$
$$3\|u_0\|_{H^4}^2\|u_0\|_{H^2}^2 + 12C_0\|u_0\|_{H^2(R)}^2,$$

其中 $C_3 = 7\|u_0\|_{H^2} + 7\|u_0\|_{H^3}^2$，$C_4 = 10\|u_0\|_{H^3}^2\|u_0\|_{H^5}^2 + 3\|u_0\|_{H^4}^2\|u_0\|_{H^2}^2 + 12C_0\|u_0\|_{H^2(R)}^2$，根据 Gronwall 不等式，有 $\|u\|_{H^6}^2 \leq \|u_0\|_{H^6}^2\mathrm{e}^{C_3t} + C_4\dfrac{\mathrm{e}^{C_3t} - 1}{C_3}$.

引理 12　设 $2 < p < \infty$，$u_0 \in H^2(R)$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$，则存在正常数 T，使得柯西问题(4) 式有解 $u_t \in H^1([0,T))$.

证明 在方程 $u_t+uu_x+p_x=0$ 两边同乘以 u，有 $uu_t+u^2u_x+up_x=0$，再关于 x 在 R 上进行积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u^2\mathrm{d}x+\int_R u^2u_x\mathrm{d}x+\int_R up_x\mathrm{d}x=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u^2\mathrm{d}x+\int_R up_x\mathrm{d}x=-\int_R u^2u_x\mathrm{d}x\le\|u_x\|_{L^\infty}\int_R u^2\mathrm{d}x\le\|u\|_{H^2}\int_R u^2\mathrm{d}x.\tag{17}$$

在(17)式两边同乘以 t，对 t 在 $[\tau,t_1]$ 上进行积分，$\tau,t_1\in[0,T]$，有

$$\frac{1}{2}\int_\tau^{t_1}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\tau^{t_1}t\int_R up_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\int_R u^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$t_1\|u\|_{L^2}^2(t_1)+\int_\tau^{t_1}t\|\sqrt{up_x}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le\tau\|u\|_{L^2}^2(\tau)+\int_\tau^{t_1}\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+$$

$$\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le\tau\|u\|_{L^2}^2(\tau)+\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C_1(T).$$

由于 $\|u\|_{L^2}^2\in L^2(0,T)$，存在序列 τ_k，使得 $\tau_k\to0,\tau_k\|u\|_{L^2}^2(\tau_k)\to0,k\to\infty$. 令 $\tau=\tau_k$，当 $k\to+\infty$，运用 Gronwall 不等式，得

$$t\|u\|_{L^2}^2+\int_0^T t\|\sqrt{up_x}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le C_1(T),t\int_R u^2\,\mathrm{d}x\le C_1(T).$$

对方程 $u_t+uu_x+p_x=0$ 关于 x 进行微分，再在方程两边同乘以 u_x，有 $u_xu_{xt}+u_x^3+uu_xu_{xx}+u_xp_{xx}=0$，再关于 x 在 R 上进行积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x+\int_R u_x^3\,\mathrm{d}x+\int_R uu_xu_{xx}\mathrm{d}x+\int_R u_xp_{xx}\mathrm{d}x=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x+\int_R u_xp_{xx}\mathrm{d}x=-\int_R uu_xu_{xx}\mathrm{d}x-\int_R u_x^3\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_R u_x^3\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x+\int_R u_xp_{xx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_R u_x^3\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\|u\|_{H^2}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x.\tag{18}$$

在(18)式两边同乘以 t，对 t 在 $[\tau,t_1]$ 上进行积分，$\tau,t_1\in[0,T]$，有

$$\frac{1}{2}\int_\tau^{t_1}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\tau^{t_1}t\int_R u_xp_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$t_1\|u_x\|_{L^2}^2(t_1)+\int_\tau^{t_1}t\|\sqrt{u_xp_{xx}}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le\tau\|u_x\|_{L^2}^2(\tau)+\int_\tau^{t_1}\|u_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\|u_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le$$

$$\tau\|u_x\|_{L^2}^2(\tau)+\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}\int_\tau^{t_1}t\|u_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C_2(T).$$

由于 $\|u_x\|_{L^2}^2\in L^2(0,T)$，因此存在序列 τ_k，使得 $\tau_k\to0,\tau_k\|u_x\|_{L^2}^2(\tau_k)\to0,k\to\infty$，令 $\tau=\tau_k$，当 $k\to+\infty$，运用Gronwall 不等式，得

$$t\|u_x\|_{L^2}^2+\int_0^T t\|\sqrt{u_xp_{xx}}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\le C_2(T),$$

$$t\int_R u_x^2\,\mathrm{d}x\le C_2(T).$$

记 $C_1(T)+C_2(T)=C(T)$ 因此有 $t\int_R u^2+u_x^2\,\mathrm{d}x\le C(T),t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\le C(T)$.

定理 1 设 $u_0\in H^6(R)$ 时，则存在依赖于 $\|u_0\|_{H^6(R)}$ 的时间 $T>0$，使得问题(4)式存在解

$$u\in C([0,T);H^6(R)),u_t\in C^1([0,T)\times R).$$

证明 $u(t,x)$ 是柯西问题(4)式的弱解，根据引理 10、引理 11，有 $u\in H^6(R)$，根据引理 12，$u_t\in H^1([0,T))$，根据 Sobolev 嵌入定理，有

$$\forall t,0<t<T,u(t,x)\in C^5(R);\forall x\in R,u(t,x)\in C^1[0,T).$$

注 1 在临界状态下，高阶 Camassa-Holm 方程解的适定性问题尚未得到令人满意的结果；根据本文的估计方法不能得到很好的结果如：当 $u_0\in H^{\frac{9}{2}}(R)$，只能估计得 $u\in H^4(R)$，而不能得到本文这么高的正则性估计.

参 考 文 献

[1] Camassa R, Holm D. An integrable shallow water equation with peaked solitions[J]. Phys Rev Lett,1993,71:1661-1664.

[2] Constantin A, Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle[J]. Comment Math Helv,2003,78(4):787-804.

[3] Wu Sijue. Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D[J]. Journal of the American Mathematical Society, 1999,12(2):445-495.

[4] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of Higher-order Camassa-Holm equation[J]. Differential Equations,2009,246: 929-963.

[5] Ding Danping, Lü Peng. Conservative solutions for higher-order Camassa-Holm equations[J]. Journal of Mathematical Physics,2010, 51(7):2-6.

[6] Tian Lixin, Zhang Ping, Xia Limeng. Global existence for the higher-order Camassa-Holm shallow water equation[J]. Nonlinear Analysis,2011,74:2468-2474.

[7] Ding Danping, Liu Xin. The Local Well-posedness of The Higher-order Camassa-Holm Equation[J]. International Journal of Mathematics Trends and Technology,2013,4(4):4-8.

[8] Jiu Quansen, Li Mingjie, Ye Yulin. Global classical solution of the Cauchy problem to 1D compressible Navier-Stokes equations with large initial data[J]. Differential Equations,2014,257:311-350.

[9] Cheng Jianfeng, Li Shan. Global weak solutions and regularity for two-dimensional Boussinesq equations with partial dissipation and thermal diffusivity[J]. Math Anal App,2015,428:794-803.

[10] 吕 鹏. 高阶 Camassa-Holm 方程解的研究[D]. 镇江：江苏大学，2009.

[11] McOwen R C. Partial differential Equations[J]. Methods and Applications,1995,21:68-73.

[12] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of solutions of a Parabolic elliptic system[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2005,13(3):659-682.

The Regularity of Solution of the Cauchy Problem for 2-order Camassa-Holm Equation

DING Danping, ZHU Lin

(College of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013,China)

Abstract: In this paper, the Cauchy problem of the second-order Camassa-Holm equation is studied to obtain the existence of the local weak solutions through the approach of viscosity. Also, the regularity of Camassa-Holm equations is researched by using Hölder inequality, Gronwall inequality and a series of prior estimates.

Keywords: second-order Camassa-Holm equation; the existence of weak solutions; the estimate on the regularity of solution