

# 用微扰 QCD 方法研究 $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D$ 过程

杨悦玲<sup>1</sup>, 李海燕<sup>1</sup>, 高洁<sup>1</sup>, 郭育培<sup>1</sup>, 黄金书<sup>2</sup>

(1. 河南师范大学 物理与材料科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 南阳师范学院 物理与电子工程学院, 河南 南阳 473061)

**摘 要:**采用微扰 QCD 方法, 考虑树图算符和企鹅图算符对  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  弱衰变过程中发射图和湮灭图两种拓扑振幅(其中  $n=1, 2, 3$ )的贡献, 结果表明  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  的分支比分别可以达到  $10^{-10}$  和  $10^{-11}$  量级. 这些过程有可能在未来的高能物理实验中被观测到.

**关键词:**微扰 QCD 方法;  $\Upsilon(nS)$  介子; 弱衰变; 分支比

**中图分类号:** O572.2; O413

**文献标志码:** A

$\Upsilon(1S), \Upsilon(2S), \Upsilon(3S)$  介子都是由正反底夸克对( $b\bar{b}$ )组成的矢量介子. 它们质量大约是质子质量的 10 倍, 但都在  $B\bar{B}$  的阈值以下, 因此主要通过正反底夸克对湮灭成三胶子或虚光子进行衰变<sup>[1]</sup>. 这导致它们的宽度都非常窄, 只有十几 keV<sup>[2]</sup> (基于这些特点, 用符号  $\Upsilon(nS)$  来表示  $\Upsilon(1S), \Upsilon(2S), \Upsilon(3S)$  三个粒子). 除了通过强作用和电磁作用衰变机制外,  $\Upsilon(nS)$  介子还可以通过弱作用进行衰变. 目前, 人们对  $\Upsilon(nS)$  介子的强衰变和电磁衰变已经进行很多研究, 但对  $\Upsilon(nS)$  介子弱衰变的研究还不多, 主要原因是在  $B$  介子工厂之前, 实验上收集到的关于  $\Upsilon(nS)$  介子事例很少, 且  $\Upsilon(nS)$  介子弱衰变过程的分支比非常小, 相关的实验研究很少. 随着大型强子对撞 LHC 实验的进行, 以及即将到来的超级  $B$  工厂实验, 人们将得到大量的  $\Upsilon(nS)$  介子事例, 这为  $\Upsilon(nS)$  介子弱衰变过程的研究提供了可能. 在本文中, 采用国际上流行的处理重味弱衰变的微扰 QCD 方法<sup>[3]</sup> (简称为 pQCD), 对  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  弱衰变过程进行唯象研究, 以期为将来的实验分析提供帮助.

## 1 低能有效哈密顿量

计算  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  弱衰变的出发点是低能有效哈密顿量, 其表达式可以写为如下形式<sup>[4]</sup>:

$$H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s} \{ V_{cb} V_{cq}^* \sum_{i=1}^2 C_i(\mu) Q_i(\mu) + \sum_{p=u,c} V_{pb} V_{pq}^* \sum_{j=3}^{10} C_j(\mu) Q_j(\mu) \} + h. c. \quad (1)$$

其中,  $G_F$  是费米常数;  $V_{pb} V_{pq}^*$  是 CKM 矩阵因子; 低能有效理论将一个物理过程因子化成两部分: 一部分是 Wilson 系数  $C_i$ , 它包含了能标大于  $\mu$  的物理贡献, 是可以微扰论进行计算的; 另一部分是四夸克有效算符  $Q_i$ , 有效算符的强子矩阵元中包含了能标小于  $\mu$  的物理贡献.

## 2 强子矩阵元

如何将四夸克算符强子矩阵元中包含的微扰和非微扰贡献进行有效的分离是目前处理强子弱衰变最棘手的部分, 这是理论计算的难点所在. 目前, 通常采用的办法是基于 hard scattering 方法<sup>[5]</sup>, 将强子矩阵元写成硬散射部分和强子波函数的卷积形式. 这样可以使得强子矩阵元的表示形式变得很简单, 所有非微扰的贡献都集中在强子波函数中, 且强子波函数是普适的. 为了克服在共线近似处理中出现的端点发散问题<sup>[6]</sup>, 微

收稿日期: 2016-07-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11547014; 11475055); 河南师范大学博士科研启动课题(QD14205).

第 1 作者简介(通信作者): 杨悦玲(1977-), 女, 山西永济人, 河南师范大学副教授, 从事粒子物理研究, E-mail: yangyueling@htu.cn.

扰 QCD 方法(简称为 pQCD)建议保留夸克的横动量,并引入 Sudakov 因子来压低软的贡献.采用 pQCD 方法,一个具体过程的振幅可以写成三部分,即 Wilson 系数  $C_i$ ,硬散射振幅  $H$ ,和强子波函数  $\Phi$  的卷积,形式如下<sup>[3]</sup>:

$$A \sim \int dx db C_i(t) H(t, x, b) \Phi(x, b) e^{-S}, \tag{2}$$

其中,  $x$  是夸克所携带的纵向动量分数,  $b$  是夸克横动量的共轭变量,  $t$  特征标度,  $e^{-S}$  是 Sudakov 因子.

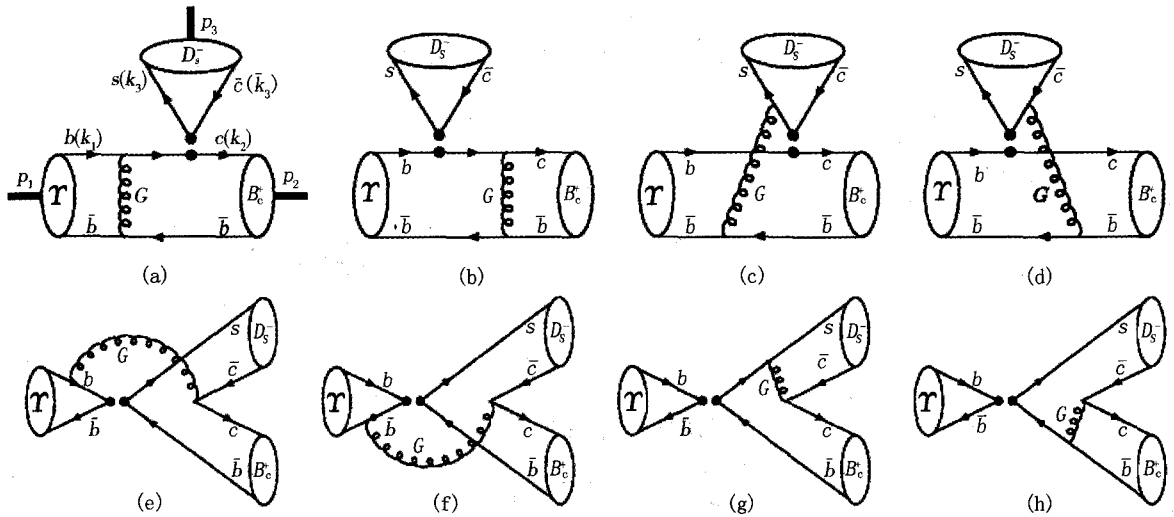
### 3 衰变振幅

以  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s$  过程为例,相关的运动学变量约定和费曼图见图 1.  $a$  和  $b$  是因子化的发射图;  $c$  和  $d$  是不可因子化的发射图,  $e$  和  $f$  是不可因子化的湮灭图,  $g$  和  $h$  是因子化的湮灭图. 经过计算得到的振幅表达式是:

$$A(\Upsilon \rightarrow B_c D_s) = \frac{\sqrt{2}}{N_c} G_F C_F \pi f_{\Upsilon} f_{B_c} f_{D_s} m_{\Upsilon}^3 (\epsilon_{\Upsilon} \cdot p_D) \times \{ V_{cb} V_{cs}^* [a_1 (A_a^{LL} + A_b^{LL}) + C_2 (A_c^{LL} + A_d^{LL})] + (V_{ub} V_{us}^* + V_{cb} V_{cs}^*) [(a_4 + a_{10})(A_a^{LL} + A_b^{LL}) + (a_6 + a_8)(A_e^{SP} + A_f^{SP}) + (C_3 + C_9)(A_c^{LL} + A_d^{LL}) + (C_5 + C_7)(A_e^{SP} + A_f^{SP}) + (a_5 - a_7/2)(A_g^{LR} + A_h^{LR}) + (C_6 - C_8/2)(A_e^{LR} + A_f^{LR}) + (C_5 - C_7/2)(A_e^{SP} + A_f^{SP}) + (C_3 + C_4 - C_9/2 - C_{10}/2)(A_g^{LL} + A_h^{LL})] \}, \tag{3}$$

其中,颜色因子  $C_F = 4/3$ ; 颜色量子数  $N_c = 3$ ;  $f_{\Upsilon}, f_{B_c}, f_{D_s}$  分别是  $\Upsilon(nS), B_c, D_s$  介子的衰变常数;  $\epsilon_{\Upsilon}$  是  $\Upsilon(nS)$  介子的极化矢量;  $a_i$  是 Wilson 系数  $C_i$  的线性组合, 即

$$a_i = \begin{cases} C_i + C_{i+1}/N_c, & i = 1, 3, 5, 7, 9, \\ C_i + C_{i-1}/N_c, & i = 2, 4, 6, 8, 10. \end{cases} \tag{4}$$



(a)和(b)是因子化的发射图; (c)和(d)是不可因子化的发射图; (e)和(f)是不可因子化的湮灭图; (g)和(h)是因子化的湮灭图

图1  $\Upsilon \rightarrow B_c D_s$  过程的费曼图

子振幅  $A_i^j$  的下标和图 1 中各拓扑图相对应, 上标  $j$  和算符的三种 Dirac 流结构相对应, 即  $j = LL, LR, SP$  分别对应于  $(V-A)(V-A), (V-A)(V+A), -2(S-P)(S+P)$ , 其中  $S, P, V, A$  分别表示标量流、赝标流, 矢量流, 轴矢流. 以  $A_a^{LL}$  为例, 它所对应是  $(V-A)(V-A)$  流算符插入到图 1(a) 所得到的子振幅, 其表达式如下:

$$A_a^{LL} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^\infty b_1 db_1 \int_0^\infty b_2 db_2 H_a(\alpha_a, \beta_a, b_1, b_2) \alpha_s(t_a) \phi_{\Upsilon}^a(x_1) e^{-S_{\Upsilon}} \{ \phi_{B_c}^a(x_2) [x_2 + m_{D_s}^2/m_{\Upsilon}^2(1-x_2)] + \phi_{D_s}^a(x_2) m_{B_c} m_b/m_{\Upsilon}^2 \} e^{-S_{B_c}} \tag{5}$$

其中,  $x_1$  和  $b_1$  分别是  $\Upsilon(nS)$  介子中  $b$  夸克所携带纵向动量分数和横动量的共轭变量;  $x_2$  和  $b_2$  分别是  $B_c$  介子中  $c$  夸克所携带纵向动量分数和横动量的共轭变量;  $\alpha_s$  是 QCD 耦合常数;  $\phi_T^a$  描述的是纵向极化  $\Upsilon(nS)$  介子扭度为 2 的分布振幅;  $\phi_{B_c}^2$  和  $\phi_{B_c}^3$  分别是  $B_c$  介子扭度为 2 和扭度为 3 的分布振幅, 这些分布振幅的具体形式可以在文献<sup>[7]</sup> 中找到;  $e^{-S_T}$  和  $e^{-S_{B_c}}$  分别是  $\Upsilon(nS)$  介子和  $B_c$  介子波函数相关的 Sudakov 因子<sup>[7]</sup>;  $H_a$  是费曼图 1(a) 所对应的硬散射函数, 具体形式是

$$H_a(\alpha_a, \beta_a, b_1, b_2) = \{\theta(b_1 - b_2) K_0(b_1 \sqrt{-\beta_a}) I_0(b_2 \sqrt{-\beta_a}) + \theta(b_2 - b_1) K_0(b_2 \sqrt{-\beta_a}) I_0(b_1 \sqrt{-\beta_a})\} K_0(b_1 \sqrt{-\alpha_a}), \quad (6)$$

其中,  $K_0$  和  $I_0$  是 Bessel 函数;  $\alpha_a$  和  $\beta_a$  是费曼图 1(a) 中内线胶子和夸克的四动量的平方; 特征能标

$$t_a = \max\{\sqrt{-\alpha_a}, \sqrt{-\beta_a}, 1/b_1, 1/b_2\}. \quad (7)$$

这样选取能标的目的是为了保证硬散射部分是微扰可算的. 同样地, 可以得到其他子振幅  $A_i^j$  的表示形式, 不再一一列举.

### 4 分支比

在  $\Upsilon(nS)$  粒子的质心系中,  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D$  的衰变分支比定义是

$$Br(\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{8\pi} \frac{p_{cm}}{m_T^2 \Gamma_T} |A(\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D)|^2, \quad (8)$$

其中, 因子 2 来源于  $\Upsilon(nS)$  粒子中的正反底夸克可以独立地衰变; 因子 1/3 是对  $\Upsilon(nS)$  粒子的自旋求统计平均,  $\Gamma_T$  是  $\Upsilon(nS)$  粒子的宽度, 末态粒子的动量

$$p_{cm} = \frac{\sqrt{[m_T^2 - (m_{B_c} + m_D)^2][m_T^2 - (m_{B_c} - m_D)^2]}}{2m_T}. \quad (9)$$

### 5 数值结果和讨论

表 1 给出了数值计算中用到的一些参数. 如果没有特别指出, 将用这些参数的中心值作为输入. 表 2 给出了分支比的计算结果, 第一个理论不确定性来自 CKM 参数; 第二个理论不确定性来自  $m_b$  和  $m_c$ , 它们会影响强子分布振幅的形状; 第三个理论不确定性来自特征能标, 即  $(1 \pm 0.1)t$ . 下面对这些结果进行讨论和说明.

表 1 输入参数

介子质量 <sup>[2]</sup>	$m_{T(1S)} = 9460.30 \pm 0.26 \text{ MeV}$ $m_{B_c} = 6275.6 \pm 1.1 \text{ MeV}$	$m_{T(2S)} = 10\,023.26 \pm 0.31 \text{ MeV}$ $m_{D_s} = 1968.30 \pm 0.11 \text{ MeV}$	$m_{T(3S)} = 10\,355.2 \pm 0.5 \text{ MeV}$ $m_{D_d} = 1869.61 \pm 0.10 \text{ MeV}$
夸克质量	$m_b = 4.78 \pm 0.06 \text{ GeV}^{[2]}$	$m_c = 1.67 \pm 0.07 \text{ GeV}^{[2]}$	$m_s = 510 \text{ MeV}^{[8]}$
介子宽度 <sup>[2]</sup>	$\Gamma_{T(1S)} = 54.02 \pm 1.25 \text{ keV}$	$\Gamma_{T(2S)} = 31.98 \pm 2.63 \text{ keV}$	$\Gamma_{T(3S)} = 20.32 \pm 1.85 \text{ keV}$
衰变常数	$f_{T(1S)} = 676.4 \pm 10.7 \text{ MeV}^{[7]}$ $f_{B_c} = 489.5 \text{ MeV}$	$f_{T(2S)} = 473.0 \pm 23.7 \text{ MeV}^{[7]}$ $f_{D_s} = 257.5 \pm 4.6 \text{ MeV}$	$f_{T(3S)} = 409.5 \pm 29.4 \text{ MeV}^{[7]}$ $f_{D_d} = 204.6 \pm 5.0 \text{ MeV}$
CKM 参数 <sup>[2]</sup>	$A = 0.814 \pm 0.024$ $\bar{\rho} = 0.117 \pm 0.021$	$\lambda = 0.225\,37 \pm 0.000\,61$ $\bar{\eta} = 0.353 \pm 0.013$	

表 2  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  的分支比

分支比	$\Upsilon(1S)$	$\Upsilon(2S)$	$\Upsilon(3S)$
$Br(\Upsilon \rightarrow B_c D_s) \times 10^{10}$	$5.42^{+0.38+0.64+1.47}_{-0.37-0.60-0.76}$	$4.28^{+0.30+0.49+0.93}_{-0.29-0.67-0.48}$	$4.61^{+0.33+0.40+0.93}_{-0.31-0.88-0.52}$
$Br(\Upsilon \rightarrow B_c D_d) \times 10^{11}$	$1.96^{+0.15+0.23+0.56}_{-0.15-0.22-0.27}$	$1.38^{+0.11+0.24+0.29}_{-0.10-0.05-0.15}$	$1.58^{+0.12+0.15+0.33}_{-0.12-0.23-0.16}$

1) 从表 2 中的数值容易看出, 由于 CKM 因子之间存在一定的关系,  $|V_{cb}V_{cs}^*| > |V_{cb}V_{cd}^*|$ , 导致了  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D$  过程的分支比之间的大小等级关系, 即  $Br(\Upsilon \rightarrow B_c D_s) > Br(\Upsilon \rightarrow B_c D_d)$ , 且有关系

$$\frac{Br(\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s)}{Br(\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_d)} \propto \frac{|V_{cb}V_{cs}^*|^2}{|V_{cb}V_{cd}^*|^2} \times \frac{f_{D_s}^2}{f_{D_d}^2}. \quad (10)$$

2) 根据(8)式, 可以看到, 介子的宽度越小, 相应的分支比应该越大. 从表 1 中的参数来看, 宽度之间存在大小关系,  $\Gamma_{\Upsilon(1S)} > \Gamma_{\Upsilon(2S)} > \Gamma_{\Upsilon(3S)}$ , 原则上说, 应该有  $Br(\Upsilon(3S) \rightarrow B_c D) > Br(\Upsilon(2S) \rightarrow B_c D) > Br(\Upsilon(1S) \rightarrow B_c D)$ , 但是表 2 中的数据和预期并不一致. 这主要是因为, 除了介子波函数和跃迁形状因子外, 衰变振幅还和介子的衰变常数成比例(见(3)式),

$$Br(\Upsilon(1S) \rightarrow B_c D); Br(\Upsilon(2S) \rightarrow B_c D); Br(\Upsilon(3S) \rightarrow B_c D) \propto \frac{f_{\Upsilon(1S)}^2}{\Gamma_{\Upsilon(1S)}}; \frac{f_{\Upsilon(2S)}^2}{\Gamma_{\Upsilon(2S)}}; \frac{f_{\Upsilon(3S)}^2}{\Gamma_{\Upsilon(3S)}} \propto 1; 1; 1. \quad (11)$$

3)  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s$  和  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_d$  的分支比分别可以达到  $10^{-10}$  和  $10^{-11}$  量级.

根据估计,  $\Upsilon(nS)$  介子在 LHCb<sup>[10]</sup> 和 ALICE<sup>[11]</sup> 的产生截面可以达到  $\mu\text{b}$  的量级, 即收集的每  $\text{ab}^{-1}$  数据中有超过  $10^{12}$  个  $\Upsilon(nS)$  介子事例, 对应大约几百个  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s$  事例和几十个  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_d$  事例. 由于末态粒子都带电. 它们在  $\Upsilon(nS)$  介子质心系是背对背飞行的, 且具有确定的能量和动量, 实验上较容易鉴别. 并且末态都具有一定的味道量子数, 可以采用特殊的“flavor-tag”或者“charge-tag”技术进行标记, 从而提高事例的鉴别效率. 综上所述,  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D$  过程有可能在未来的高能物理实验中被观测到.

4) 本文结果对参数的选取具有一定的依赖性. 除了表 2 中给出的理论不确定性外, 衰变常数还可以给  $\Upsilon(1S)$ ,  $\Upsilon(2S)$ ,  $\Upsilon(3S)$  介子的弱衰变分别带来 5%, 10%, 15% 的不确定性. 此外, 还有像强子矩阵元高阶修正的贡献, 波函数的选取等等很多因素, 都会对结果产生一定的影响. 本文结果仅仅可以看作是对分支比一个量级的估计, 但对于未来的实验分析还是有一定参考价值的.

## 6 结 论

随着大型强子对撞机的运行, 以及即将到来的超级 B 工厂实验, 将会收集到越来越多的  $\Upsilon(nS)$  实验数据. 这为研究  $\Upsilon(nS)$  介子的弱衰变提供了很好的机会. 本文采用目前国际上流行的 pQCD 方法, 根据低能有效理论, 考虑树图算符和企鹅图算符的贡献, 考虑可因子化和不可因子化的发射图和湮灭图贡献, 计算了  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  过程的衰变振幅. 结果表明  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  的分支比分别可以达到  $10^{-10}$  和  $10^{-11}$  量级, 这些过程有可能在未来的高能物理实验中被观测到.

## 参 考 文 献

- [1] 孙俊峰, 高万东, 陈丽丽, 等. 两体非轻衰变  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c M$  过程的研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(2): 45-48.
- [2] Olive K, Agashe K, Amsler C, et al. Review of Particle Physics [J]. Chin Phys C, 2014, 38(9): 090001.
- [3] Li H, Applicability of perturbative QCD to  $B \rightarrow D$  decays [J]. Phys Rev D, 1995, 52(7): 3958-3965.
- [4] Buchalla G, Buras A, and Lautenbacher M, Weak decays beyond leading logarithms [J]. Rev Mod Phys, 1996, 68(4): 1125-1244.
- [5] Lepage G, Brodsky S. Exclusive process in perturbative quantum chromodynamics [J]. Phys Rev D, 1980, 22(9): 2157-2198.
- [6] Beneke M, Buchalla G, Neubert M, et al. QCD factorization in  $B \rightarrow \pi K, \pi\pi$  decays and extraction of Wolfenstein parameters [J]. Nucl Phys B, 2001, 606: 245-321.
- [7] Yang Y, Sun J, Guo Y, et al. Study of  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c P$  decays with perturbative QCD approach [J]. Phys Lett B, 2015, 751: 171-176.
- [8] Kamal A. Particle physics [M]. Springer-Verlag, Berlin, 2014: 298.
- [9] Chiu T, Hsieh T, Huang C, et al. Beauty mesons in lattice QCD with exact chiral symmetry [J]. Phys Lett B, 2007, 651: 171-176.
- [10] Aaij R, Adeva B, Adinolfi M, et al. Study of  $\Upsilon$  production and cold nuclear matter effects in pPb collision at  $\sqrt{s_{NN}} = 5$  TeV [J]. JHEP, 2014, 1407: 094.
- [11] Abelev B, Adam J, Adamova D, et al. Production of inclusive  $\Upsilon(1S)$  and  $\Upsilon(2S)$  in pPb collision at  $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$  TeV [J]. Phys Lett B, 2015, 740: 105-117.

## Optimized Switching Frequency Three-Level Four-Leg Inverter Vector Control

SHAO Hongjun, GUO Feng

(College of Control Engineering, Northeast University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** The number of space vectors in three-level four-leg inverters is large and the vectors contain redundant components, which make the selection of absolute switch states hard. This paper proposes a 3D SVM technique with optimized switching frequency. Firstly, the three-phase reference voltage vectors in abc coordinate are normalized and the tetrahedron, which the reference vector points to, is selected. Secondly, the action vectors for reference-vector synthesis and the switching sequence are found. Finally, the relations to satisfy the minimum switching time are given. The simulations based on MATLAB software are performed, and the results show that the output voltages follow the reference voltage vectors well and the switching time in every sample period is reduced.

**Keywords:** three-level; four-leg; space vector; switching frequency

(上接第 52 页)

## $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D$ Weak Decays with Perturbative QCD Approach

YANG Yueling<sup>1</sup>, LI Haiyan<sup>1</sup>, GAO Jie<sup>1</sup>, GUO Yupei<sup>1</sup>, HUANG Jinshu<sup>2</sup>

(1. College of Physics and Materials Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;

2. College of Physics and Electronic Engineering, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China)

**Abstract:** The  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s, B_c D_d$  weak decays are studied with the perturbative QCD approach, considering the contributions of both tree and penguin operators to both emission and annihilation topologies where  $n=1, 2, 3$ . It is found that branching ratios for  $\Upsilon(nS) \rightarrow B_c D_s$  and  $B_c D_d$  decays can reach up to  $10^{-10}$  and  $10^{-11}$ , respectively, which might be measurable in the future high energy experiments.

**Keywords:** perturbative QCD approach;  $\Upsilon(nS)$  meson; weak decay; branching ratio