文章编号:1000－2367(2016)01－0025－06 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.01.005

带有时域硬约束的不确定系统最优保代价控制

高兴泉[1], 胡云峰[2]

(1.吉林化工学院 信息与控制工程学院,吉林 吉林 132022;2.吉林大学 吉林通信工程学院,长春 130025)

摘　要:针对带有时域硬约束的不确定系统,提出了一种最优鲁棒保代价控制方法.首先将系统中存在的时域硬约束统一由控制量和状态量的线性不等式描述,然后利用矩阵不等式方法,导出了约束鲁棒保代价状态反馈控制器存在且能保证系统一定二次性能同时满足时域硬约束的充分条件.最终最优鲁棒约束保代价控制问题可以转化为求解一个非凸的矩阵不等式优化问题,给出了该类优化问题的迭代求解步骤.在质量-弹簧-阻尼系统上的仿真应用结果表明所提方法可以在约束范围内尽可能地提高系统的鲁棒性能.

关键词:时域硬约束;保代价控制;不确定性;线性矩阵不等式

中图分类号:TP273 **文献标志码**:A

近年来,随着不确定系统鲁棒控制研究所取得的进展,尤其是 Chang 和 Peng[1] 提出保代价控制问题(或称为保性能控制、保成本控制)以来,结合稳定性和二次性能要求的鲁棒保代价控制得到了广泛的关注并取得了很多成果[2-7].实际上,在设计保代价控制律时,除了保证闭环系统稳定、最大程度提高控制性能以外,还应该考虑客观存在的时域硬约束对系统的限制[8],例如由于饱和特性执行机构有时并不能实现要求的控制动作,由于某种物理机械结构限制或出于安全考虑需要系统某些内部变量或输出必须满足一定的限幅要求等.一般来说,时域硬约束表现为控制量约束或输出约束.在控制器设计时若不考虑这些硬约束,期望的闭环系统性能就可能得不到保证,甚至会使闭环系统失去稳定性.目前,考虑控制输入约束的不确定系统保代价控制取得了一定的成果,取得了很好的效果,如针对不确定连续线性系统[5-7,9-10]、离散系统[11]、离散时滞系统[12]的约束保代价控制等等.但是这些成果都仅仅考虑的是控制输入约束,没有讨论输出约束(可能表现为状态约束或控制量一状态的混合约束).

针对一类具有范数有界时变参数不确定性的连续时间系统,事先考虑时域硬约束的影响,本文提出了一种约束鲁棒保代价控制方法.首先将时域硬约束描述为更一般的控制量与状态的线性组合约束形式,它既能描述控制量约束、状态约束,还可以表示控制量一状态的混合约束,同时还很容易将约束中可能存在的不确定性通过相应的系数矩阵体现出来.通过矩阵不等式方法,本文还导出了一种约束鲁棒保代价状态反馈控制律存在的充分条件,使得闭环系统对于所有考虑的不确定性,二次性能指标不超过一个确定的上界,同时满足时域硬约束.进一步,通过优化性能指标上界,最优鲁棒约束保代价控制问题可以转化为求解一个非线性矩阵不等式优化问题.

1 问题描述

考虑一个连续不确定线性系统由以下状态空间模型描述

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [\boldsymbol{A} + \Delta \boldsymbol{A}]x(t) + [\boldsymbol{B} + \Delta B]\boldsymbol{u}(t),\ x(0) = x_0, \\ z(t) = [\boldsymbol{C} + \Delta \boldsymbol{C}]x(t) + [\boldsymbol{D} + \Delta \boldsymbol{D}]\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2015-03-12;**修回日期**:2015-12-10.

基金项目:国家自然科学基金重点项目(61034001);吉林省科技发展计划项目(20090148);吉林省教育厅项目(20140352).

第 1 作者简介(通信作者):高兴泉(1976－),男,吉林松原人,吉林化工学院教授,博士,研究方向为鲁棒控制、非线性系统控制,E-mail:xqgao_jl@126.com.

系统中存在的时域硬束可以表示为

$$| z_\nu(t) | \leq z_{\nu,\max}, \nu = 1,2,\cdots,p, t > 0, \tag{2}$$

其中下标 ν 表示向量的第 ν 个分量,$x(t) \in R^n$ 是系统状态向量,$\boldsymbol{u}(t) \in R^m$ 是控制输入向量,$z(t) \in R^p$ 是约束输出向量,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是已知的常数矩阵,$\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B},\Delta\boldsymbol{C},\Delta\boldsymbol{D}$ 是具有相应维数并反映系统模型中参数不确定性的未知实矩阵.假设考虑的参数不确定性是范数有界的,并具有以下形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A} & \Delta\boldsymbol{B} \\ \Delta\boldsymbol{C} & \Delta\boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}(t) \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{H}_i$ 和 $\boldsymbol{E}_i (i = 1,2)$ 是具有适当大小的实数矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$ 是时变矩阵,满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leq \boldsymbol{I}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 为合适大小的单位矩阵.它们反映了不确定参数的结构信息.

注 1 通过选择合适的参数 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$,系统存在的某些控制输入约束、状态约束或控制－状态混合约束可统一描述为式不等式(2)的形式,并且可以选择合适的矩阵 $\boldsymbol{H}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ 将约束表达式中可能存在的不确定性因素考虑进去,具有更一般的意义.

对于系统(1),定义性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{Q} > 0, \boldsymbol{R} > 0$ 是正定的加权矩阵.

一个约束不确定线性系统的鲁棒保代价控制问题是:对于所有如(3)式所描述的不确定性,设计控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}x(t), \tag{5}$$

使得如(4)定义的闭环系统性能指标满足 $J \leq J^*$,同时满足时域硬约束(2),这里 J^* 称为系统(1)二次性能指标的一个上界.

将控制器(5)及系统不确定性(3)代入系统(1),得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \boldsymbol{A}_d x(t), x(0) = x_0, \\ z(t) = \boldsymbol{C}_d x(t), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_1 + [\boldsymbol{B} + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_2]\boldsymbol{K}, \boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_1 + [\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_2]\boldsymbol{K}$.对于该系统,根据文献[13],有以下结论.

引理 1 若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P} > 0, \boldsymbol{K}$ 及矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} < 0, \tag{7}$$

则 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(6)的一个保代价控制律,性能指标的一个上界为 $J^* = x_0\boldsymbol{P}x_0$,同时对于任意的 $t > 0$ 都有 $x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \leq x_0\boldsymbol{P}x_0$.

在给出本文的结论之前,再介绍两个有用的引理.

引理 2[14] 取 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 为具有相应维数的实数矩阵,对于满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leq \boldsymbol{I}$ 的 $\boldsymbol{F}(t)$,则 $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} < 0$ 成立的一个充要条件是:存在标量 $\varepsilon > 0$,使得

$$\boldsymbol{M} + \varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0.$$

引理 3[15] 矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 同引理 1,则矩阵不等式 $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} > 0$ 等价于:存在标量 $\varepsilon > 0$,使得 $\boldsymbol{M} - \varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} > 0$ 成立.

2 主要结果

定理 1 对系统(6),若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$ 使得(7)以及

$$x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}x_0 \leq \delta, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{z_{\nu,\max}^2}{\delta} & \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d \\ \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{9}$$

成立,则闭环系统稳定,δ 是性能指标(5)的一个上界,同时满足时域硬约束条件(2).其中 δ 是一固定的常数,$\boldsymbol{e}_\nu$ 为约束输出空间 R^p 上的一个标准向量基.

证明　根据引理 1，若(7) 成立，则闭环系统稳定，性能指标 $J \le x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$，同时对于任意的 $t>0$ 有 $x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \le \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$，所以(8) 意味着性能指标(5) 的一个上界为 δ，而且有 $x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \le \delta$.

下面考虑满足时域硬约束的情况. 根据 Schur 补公式，不等式(9) 等价于

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\delta} - \frac{\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d}{z_{\nu,\max}^2} \ge 0,$$

因此对于任意的 $x(t) \ne 0$ 都有

$$x^{\mathrm{T}}(t)\frac{\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d}{z_{\nu,\max}^2}x(t) \le \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)}{\delta}, \tag{10}$$

因为(7) 和(8) 可保证 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \le \delta$，所以(10) 意味着 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\dfrac{\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d}{z_{\nu,\max}^2}\boldsymbol{x}(t) \le 1$，即 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(t) \le z_{\nu,\max}^2$，由 $\boldsymbol{z}_\nu(t) = \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(t)$ 得，$\boldsymbol{z}_\nu^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}_\nu(t) \le z_{\nu,\max}^2$，$\nu = 1,2,\cdots,n_p$. 意味着闭环系统满足时域硬约束条件(2). 证毕.

实际上，定理 1 给出的保代价控制器存在的充分条件(7)、(8)、(9) 等价于求解一个线性矩阵不等式的可行性问题.

定理 2　给定常数 $\delta>0$，对于闭环系统(6) 和存在的不确定性(3)，如果存在正数 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 以及对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BY}+(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BY})^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Y} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & * & * \\ \boldsymbol{X} & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & * \\ \boldsymbol{Y} & 0 & 0 & -\boldsymbol{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} \delta & \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \le 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{z_{\nu,\max}^2}{\delta} - \varepsilon_2\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & * & * \\ (\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{X} & * \\ 0 & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Y} & \varepsilon_2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \ge 0,\ \nu = 1,2,\cdots,n_p, \tag{13}$$

有解(ε_1^*，ε_2^*，$\boldsymbol{Y}^*$，$\boldsymbol{X}^*$)，则闭环系统稳定，控制器(5) 的反馈矩阵可由 $K = \boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{X}^{*-1}$ 求出，且 δ 是由式(4) 所示的性能指标 J 的一个上界，同时满足时域约束(2).

证明　定义矩阵 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{KX}$，根据文献[13] 中定理 2 的相关结论：当且仅当存在 $\varepsilon_1>0$ 使得(11) 成立时，不等式(7) 成立，证明过程这里不再赘述. 下面再考虑保证满足时域约束的矩阵不等式(8)，(9). 很显然，根据 Schur 补公式，(8) 等价于 LMI (12). 将 C_d 代入不等式(9)，得

$$\begin{bmatrix} \dfrac{z_{\nu,\max}^2}{\delta} & \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK}) \\ (\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K} \end{bmatrix} \ge 0,$$

根据引理 3，上式成立的一个充要条件是存在正数 $\varepsilon_2>0$，使得

$$\begin{bmatrix} \dfrac{z_{\nu,\max}^2}{\delta} & \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK}) \\ (\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} - \varepsilon_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} - \varepsilon_2^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \ge 0,$$

整理并利用 Schur 补公式有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{z_{\nu,\max}^2}{\delta} - \varepsilon_2\boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{e}_\nu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK}) & 0 \\ (\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\nu & \boldsymbol{P} & (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K} & \varepsilon_2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \ge 0,$$

用 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{I})$ 左乘右乘上式作同余变换，同时由定义 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{KX}$ 得 LMI(11).

对于给定的常数 $\delta>0$，矩阵不等式(8) 对于变量 ε_1，ε_2，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X}$ 是线性的，可以利用求解可行性问题来求出

满足条件的矩阵增益.当然,为了使得闭环系统具有最好的保代价性能,可以将 δ 作为一个变量,并通过求解以下优化问题来最小化性能指标上界 δ 来获取最优保代价控制律.

定理 3 假设系统初始状态是 x_0,如果优化问题

$$\min_{\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,Y,Q} \delta \quad \text{s.t. } (11)、(12)、(13) \tag{14}$$

有(数值)最优解($\delta^*,\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*$),则闭环系统稳定,状态反馈 $u(t)=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{Q}^{*-1}x(t)$ 是系统的一个最优保代价控制律,相应的保代价性能为 δ^*,且对所有考虑的不确定性,闭环系统满足时域硬约束条件.

注意到(13)式对变量 δ 并不是线性的,因此,该问题是一个非线性优化问题.参考文献[16],流程图 1 给出了该类问题的求解步骤.

3 仿真应用:质量—弹簧—阻尼器系统

图 2 所示为一个质量—弹簧—阻尼器系统[15].

忽略一些非线性因素,该系统可由以下线性动态方程描述

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}y=\frac{F}{m},$$

其中 y 为质量块偏离平衡点的位移,F 为施加在质量块的控制力,$c=1$ 为阻尼器的阻尼系数,$m=3$ 为质量块的质量,k 为弹簧的弹簧刚度,是该系统的不确定参数,其名义值为 $\bar{k}=2$,并在[1.4,2.6]范围内变化,即该参数最大有 30% 的波动量.同时假设这些变量和参数都具有相应的单位.定义状态 $\boldsymbol{x}_1=y$,$x_2=\frac{dy}{dt}$,控制量 $\boldsymbol{u}=F$,则系统的状态空间方程为

$$\frac{dx}{dt}=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bu},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{\bar{k}}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}$,$\Delta\boldsymbol{A}=r(t)\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{0.3\bar{k}}{m} & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}$,$-1\le r(t)\le 1$,定义矩阵 $\boldsymbol{F}(t)=r(t)$,则系统模型不确定性可以表示为 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_1$,这里

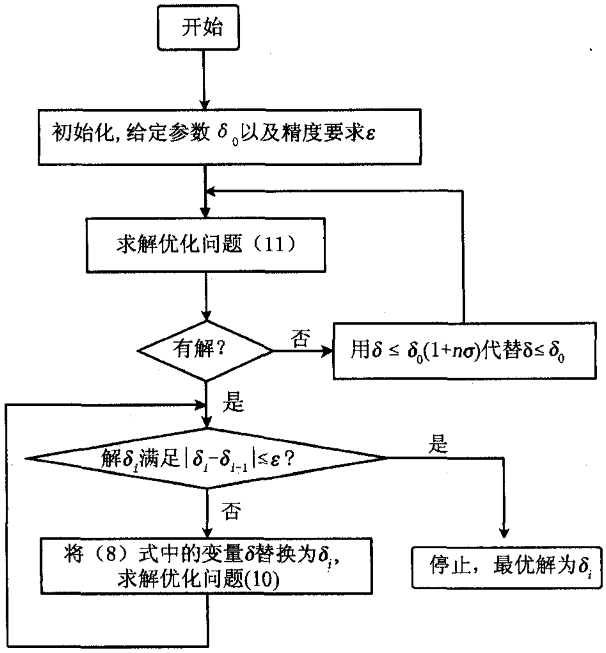

图1 优化问题(14)的求解步骤

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{0.3\bar{k}}{m}\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}0.3 & 0\end{bmatrix},$$

为了保持系统运行的平稳性,要求限制质量块移动的速度是有限的,即

$$\left|\frac{dy}{dt}\right|=|x_2|\le 0.5,$$

同时,由于作用于质量块的力是有限的,即控制量必须满足约束条件

$$|F|\le 1,$$

综上描述时域硬约束的被控输出可描述为

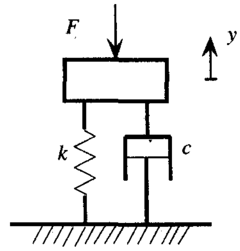

图2 质量-弹簧-阻尼系统示意图

$$z=\begin{bmatrix}x_2\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Du},$$

其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$,以及 $z_{1,\max}=0.5$,$z_{2,\max}=1$.约束输出中没有不确定参数,所以有 $\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{E}_2 = 0$.

取 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R} = 0.01$，假设系统的初始状态为 $x_0 = [0.2 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，通过求解优化问题(14)，求得的状态反馈控制器增益为 $\boldsymbol{K} = [-4.4527 \quad -2.5149]$，以及性能指标上界为 $J^* = 0.035\,51$.

为了比较，又考虑了其他 3 种控制方法，首先考虑了无约束鲁棒保代价控制器，通过求解不带约束条件(13) 的优化问题(14)，得到的性能指标的一个上界为 $J^* = 2.3263 \times 10^{-5}$，相应的状态反馈控制器增益为 $\boldsymbol{K} = [-5.9384 \times 10^5 \quad -107.2088]$.

可以看到，该控制器的增益比较大，即使系统初始状态很小或发生微小的变化，利用该控制器求得的控制量也会很大或产生剧烈的波动，这样就会非常容易违背硬约束，而这在实际应用过程中是不允许的. 然后，利用极点配置法将闭环极点配置到$[-2+j2, -2-j2]$处，求得的状态反馈控制器增益矩阵为

$$\boldsymbol{K} = [-22, -11].$$

最后考虑了 PID 控制器，PID 的参数分别选为 $k_p = 1$，$k_i = 0.1$，$k_d = 1$. 图 3、图 4 和图 5 是利用本文方法、极点配置状态反馈控制方法和 PID 控制方法在 $k = 2$ 时闭环系统响应曲线.

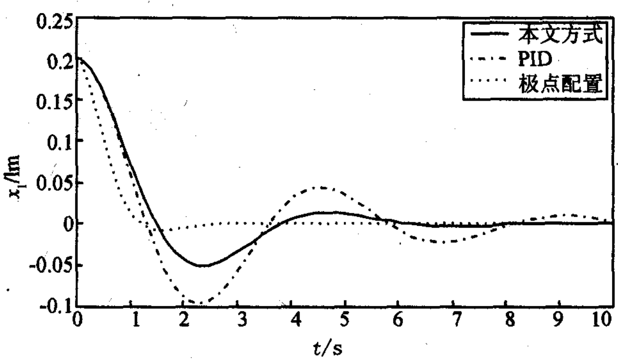

图3 系统响应曲线 x_1

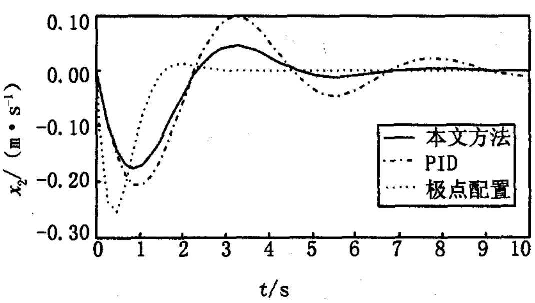

图4 系统响应曲线 x_2

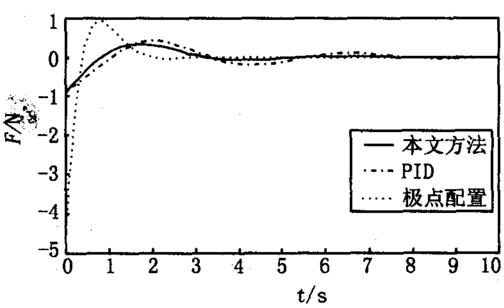

图5 控制输入量曲线

从图 3、图 4 可以看出，与 PID 控制方法相比，利用本文方法，闭环系统在控制量满足约束的情况下(见图 5)，具有更好的性能. 虽然极点配置状态反馈控制方法使得系统具有更好的性能，但是从图 5 可以看出，控制过程中极点配置方法所求出的控制量远远超出了约束的范围，也就是它是违背了实际的执行机构饱和约束的，是不可实现的. 从该角度也可看出，本文方法在考虑约束的同时，是以牺牲一定的性能为代价的.

4 结　论

本文针对实际系统中广泛存在的控制输入约束、状态约束或两者的混合约束，提出了一种考虑这些时域硬约束的鲁棒保代价控制方法，推导了保证不确定线性系统满足时域硬约束的充分条件，并将最优控制器求解问题转化为一个非线性矩阵不等式优化问题. 利用本文方法，在控制器求解时可同时兼顾二次性能的优化和满足时域硬约束的要求，避免了常规控制方法中由于为了满足时域硬约束而反复试探性能指标中加权系数带来的设计上的烦琐问题. 在质量－弹簧－阻尼系统上的仿真应用结果表明所提方法可以在约束范围内使得系统有很好的鲁棒性能.

参 考 文 献

[1] Chang S S L, Peng T. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Con-

trol,1972,17(4):474-483.

[2] Ren Junchao, Zhang Qingling. Robust normalization and guaranteed cost control for a class of uncertain descriptor systems[J]. Automatica,2012,48(8):1693-1697.

[3] 刘富春,高焕丽.基于分段连续 Lyapunov 函数的采样系统鲁棒保性能控制[J].控制理论与应用,2012,29(07):909-914.

[4] 罗毅平,周笔锋.时滞扩散性复杂网络同步保性能控制[J].自动化学报,2015,41(1):147-156.

[5] 麻莉莉,马静.基于 LMI 的航空发动机鲁棒弹性保性能控制[J].测控技术,2014,33(5):90-93.

[6] 焦尚彬,钱富才,余加霞.不确定系统实时保性能控制[J].系统仿真学报,2012,24(5):1057-1062.

[7] 龙垚坤,文桂林,陈哲吾.汽车主动悬架鲁棒保性能控制仿真研究[J].汽车工程,2014,36(2):216-221.

[8] Goodwin G C, Seron M M, De Dona' J A. Constrained control and estimation: an optimization Approach[M]. London: Springer,2005

[9] 苏晓宇,金鸿章,姜述强,等.具有输入延时的锚泊自动定位系统保性能控制[J].控制与决策,2014,30(4):748-752.

[10] 孙凤琪.时不变时滞奇异摄动控制系统的保性能控制[J].吉林大学学报(理学版),2015,53(5):863-867.

[11] 俞 立,徐建明.具有控制约束的不确定离散系统最优保性能控制[J].系统工程与电子技术,2004,26(10):1453-1456.

[12] 徐建明,俞立.具有控制约束的不确定离散时滞系统最优保性能控制[J].系统工程理论与实践,2004,24(11):88-93.

[13] Yu L. Optimal Guaranteed cost control of linear uncertain system: an LMI approach[J]. Control Theory and Applications,2000,17(3):423-428.

[14] Xie L H. Output feedback H∞control of systems with parameter uncertainty[J]. International Journal of Control,1996,63(4):741-750.

[15] 高兴泉,胡云峰.考虑时域约束的线性系统非脆弱 H∞控制[J].计算机应用,2014,34(7):2140-2144.

[16] 高兴泉,马苗苗,陈 虹.考虑时域硬约束的 T-S 模糊系统最优控制[J].吉林大学学报(工学版),2007,37(3):640-645.

Optimal Robust Guaranteed Cost Control of Uncertain System with Time-domain Hard Constraints

GAO Xingquan, HU Yunfeng

(1. College of Information and Control Engineering, Jilin University of Chemical Technology, Jilin 132022, China;
2. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract: For a kind of uncertain linear systems with time-domain hard constraints, an optimal robust guaranteed cost control scheme is presented in this paper. First, the existed time-domain hard constraints are described as linear inequalities on control inputs and states uniformly. Then based on inequalities matrix technique, the conditions which can guarantee existing of the robust guaranteed cost controller, certain level of quadratic performance and satisfaction of the time-domain hard constrains are derived. Finally, the optimal robust constrained guaranteed control problem can be deduced to solve an optimization problem with a set of non-vex matrix inequalities. The solution step for this problem has been provided. Simulation results for the application in mass-spring-damper system show that the robust performance of closed-loop system can be improved as far as possibly, while the time-domain constraints are satisfied.

Keywords: time-domain hard constraints; guaranteed cost control; uncertainties; Linear Matrix Inequality