

一类富营养水体渔业收获模型的定性分析

郭红建, 杜杰静, 高 斯

(信阳师范学院 数学与信息科学学院, 河南 信阳 464000)

摘 要:基于富营养水体中生产者和消费者之间的关系,构建了一类富营养水体渔业收获模型.给出了系统边界平衡态的存在性和稳定性,分析了正平衡态的存在性及个数变化情况,指出系统在一定条件下存在两个正平衡点,进一步地给出了系统正平衡态为鞍结点的条件.最后,以收获率作为目标参数,简要给出了相关生物学意义.

关键词:富营养;水体;渔业模型;收获;鞍结点分支

中图分类号:O175.2

文献标志码:A

由于工业废水、生活污水和含氮、磷等营养元素的农业退水大量进入水体,越来越多的湖泊、水库等水域呈现富营养化状态^[1-2].在适宜的温度和光照作用下,流入水体中的过量营养元素(如N、P等)会引起藻类大量繁殖,尤其是鱼腥藻(*Anabaena*)、束丝藻(*Aphanizomenon*)、微囊藻(*Microcystis*)、颤藻(*Oscillatoria*)等藻类的过度繁殖易形成水华.水华的发生不仅对水体自身的生态结构带来不利影响,而且严重影响鱼类及其他生物的生存,进而影响渔业资源的开发和利用.另一方面,渔业资源的开发利用又反过来影响水体中的生物量及群落结构,不合理的开发利用特别是对鱼类等消费者的过度开发,会减弱水体生态系统中消费者对生产者的制约作用.因此,对已发生富营养化的水体进行治理及制定合理的渔业资源开发措施都是非常重要的^[3-4].

按照系统生态学的观点,生产者和消费者是水体生态系统中至关重要的两个组分.为了叙述和理解方便,本文以鲢鱼和蓝藻分别作为生产者和消费者的代表^[5].在水体中,鲢鱼和蓝藻均有各自的食物源来满足自身生长,因此这里假设鲢鱼和蓝藻的生长均遵循Logistics增长率;另外,一方面鲢鱼可以捕食蓝藻^[5],但另一方面,在水体富营养化的情况下,蓝藻会产生毒素甚至形成水华现象,对鲢鱼的生长有一定的抑制作用^[6].

已有不少文献研究了藻类和鱼类的相互作用模型并取得了丰富的成果^[7-13].例如,文献[7]研究了具有成比例依赖的捕食-被捕食系统的选择性收获问题,其中捕食-被捕食者均遵循Logistics增长率,且仅连续收获捕食者.文献[8]研究了一个具有非零常数速率的比率依赖型捕食者-食饵模型的动力学特性.为了较为清楚合理地描述在水体富营养化条件下蓝藻和鲢鱼的相互关系,同时考虑人类对它们的管理开发作用,建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r_1 P \left(1 - \frac{P}{\bar{K}_1}\right) - \frac{\beta_1 PZ}{\alpha + P} - C_1 P, \\ \frac{dZ}{dt} = r_2 Z \left(1 - \frac{Z}{\bar{K}_2}\right) + \frac{\beta_2 PZ}{\alpha + P} - \frac{\rho PZ}{\alpha + P} - C_2 Z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $P = P(t)$ 表示蓝藻的种群密度, $Z = Z(t)$ 表示鲢鱼的种群密度; r_1, r_2 分别表示蓝藻、鲢鱼的内禀增长率; \bar{K}_1, \bar{K}_2 分别表示蓝藻、鲢鱼的环境容纳量;常数 C_1, C_2 分别表示为人类对蓝藻、鲢鱼的捕捞系数;考虑生物学和实际意义,假设 $r_1 \geq C_1, r_2 \geq C_2$.

收稿日期:2016-01-25;修回日期:2016-05-25.

基金项目:国家自然科学基金(11371306; 11171284);河南省高校科技创新人才支持计划(14HASTIT046).

第1作者简介(通信作者):郭红建(1972-),男,河南尉氏人,信阳师范学院副教授,博士,从事生物数学等方向的研究,

E-mail:xbghj@163.com.

系统(1)假设鲢鱼对蓝藻的捕食满足 Holling II 类功能性反应函数, $\beta_1 (> 0)$ 表示鲢鱼对蓝藻最大的捕食系数, $\beta_2 = \theta\beta_1$, θ 表示单位被捕食蓝藻的生物量转化率 ($0 < \theta < 1$); 参数 $\rho (> 0)$ 表示单位蓝藻对鲢鱼的抑制系数^[6]. 若 $\beta_2 - \rho > 0$, 此时蓝藻对鲢鱼生长的贡献率为正值, 则系统(1)可看作是捕食系统; 若 $\beta_2 - \rho = 0$, 此时蓝藻对鲢鱼生长的贡献率为 0; 若 $\beta_2 - \rho < 0$, 此时蓝藻对鲢鱼生长的贡献率为负值, 则系统(1)可看作是竞争系统.

1 动力学性质

为了计算方便, 令

$$a_1 = r_1 - C_1, a_2 = r_2 - C_2, K_1 = \frac{\bar{K}_1}{r_1}, K_2 = \frac{\bar{K}_2}{r_2}, \gamma = \beta_2 - \rho,$$

则系统(1)可简化为

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P\left(a_1 - \frac{P}{K_1}\right) - \frac{\beta_1 PZ}{\alpha + P}, \\ \frac{dZ}{dt} = Z\left(a_2 - \frac{Z}{K_2}\right) + \frac{\gamma PZ}{\alpha + P}. \end{cases} \quad (2)$$

由系统(2)可知, $P(t) = 0$ 和 $Z(t) = 0$ 分别是该系统的解. 由自治系统的轨线不相交性可知, 系统(2)初值在第一象限的解只能在 \mathbf{R}_+^2 内, 因此下面总假设初始条件 $P(0) = P_0 \geq 0, Z(0) = Z_0 \geq 0$. 对于系统的有界性, 容易得到下面的定理.

定理 1 若初值 $(P_0, Z_0) \in \mathbf{R}_+^2$, 则系统(2)的解最终进入到有界区域 $B \subseteq \mathbf{R}_+^2$ 内, 其中 $B = \{(P, Z) \in \mathbf{R}_+^2 : 0 \leq P(t) \leq a_1 K_1, 0 \leq Z(t) \leq \max\{(a_2 + \gamma)K_2, a_2 K_2\}\}$.

易知, 系统(2)总有平衡点 $S_0 = (0, 0), S_1 = (0, a_2 K_2), S_2 = (a_1 K_1, 0)$, 且通过计算系统在 3 个边界平衡点的特征值, 可以得到下面的结论.

定理 2 (1) $S_0 = (0, 0)$ 恒为不稳定的结点;

(2) 当 $a_2 K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时, S_1 为鞍点; 当 $a_2 K_2 > \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时, S_1 为稳定的结点;

(3) 当 $\gamma \geq 0$ 时, S_2 为鞍点; 当 $\gamma < 0$ 且 $a_2 + \frac{\gamma a_1 K_1}{\alpha + a_1 K_1} > 0$ 时, S_2 是鞍点; 当 $\gamma < 0$ 且 $a_2 + \frac{\gamma a_1 K_1}{\alpha + a_1 K_1} < 0$ 时, S_2 是稳定的结点.

1.1 正平衡态的存在性

由系统(2)的第 1 个方程可得等倾线 $l_1 \left(\frac{dP}{dt} = 0\right)$ 的方程为:

$$Z = -\frac{P^2}{\beta_1 K_1} + \frac{a_1 K_1 - \alpha P}{\beta_1 K_1} + \frac{\alpha a_1}{\beta_1} = -\frac{1}{\beta_1 K_1} (P - a_1 K_1)(P + \alpha). \quad (3)$$

由系统(2)的第 2 个方程可得等倾线 $l_2 \left(\frac{dZ}{dt} = 0\right)$ 的方程为:

$$Z = -\frac{\alpha \gamma K_2}{\alpha + P} + (a_2 + \gamma)K_2. \quad (4)$$

若系统(2)存在正平衡态, 则必须同时满足方程(3)和(4). 因此, 联立方程(3)和(4)可得

$$P^3 + DP^2 + EP + F = 0, \quad (5)$$

其中 $D = 2\alpha - a_1 K_1, E = \alpha^2 - 2\alpha a_1 K_1 + \beta_1 K_1 (a_2 + \gamma)K_2, F = \alpha K_1 (\beta_1 a_2 K_2 - \alpha a_1)$.

由一元三次方程根与系数的关系可得方程(5)的判别式为

$$\Delta = (DE - 9F)^2 - 4(D^2 - 3E)(E^2 - 3DF) = -3(D^2 E^2 - 4E^3 - 4D^3 F + 18DEF - 27F^2).$$

记

$$\lambda = D^2 E^2 - 4E^3 - 4D^3 F + 18DEF - 27F^2. \quad (6)$$

因此, 当 $\Delta < 0$ 即 $\lambda > 0$ 时, 方程有 3 个不相等的实根; 当 $\Delta = 0$ 即 $\lambda = 0$ 时, 方程有 3 个实根(有重根); 当 $\Delta >$

0 即 $\lambda < 0$, 方程有唯一实根.

由于 λ 计算过程较为复杂, 且这里只需要考虑方程(5) 正实根的存在情况, 故下面通过分析, 即方程(3) 和(4) 在相平面第一象限内的交点情况, 给出其正实根的存在条件.

系统(2) 的正平衡点为等倾线 l_1 与等倾线 l_2 在第一象限的交点, 其中等倾线 l_1 是开口向下的抛物线, 等倾线 l_2 是渐近线为 $Z = (a_2 + \gamma)K_2, P = -\alpha$ 的双曲线(如图 1 所示, 图 1 中 3 条抛物线 l_1 对应不同的参数). 显然, 当取不同的参数值时, 这两条等倾线在第一象限内可能交于两点、一点或无交点.

由方程(3) 和(4), 通过计算可得, 等倾线 l_1 和 l_2 在 $P = 0$ 处的斜率分别 $\frac{1}{\beta_1} \left(a_1 - \frac{\alpha}{K_1} \right), \frac{\gamma K_2}{\alpha}$; 与 Z 轴的交点分别为 $\frac{\alpha a_1}{\beta_1}, a_2 K_2$; 抛物线的顶点坐标为 (\bar{P}_1, \bar{Z}_1) , 其中 $\bar{P}_1 = \frac{a_1 K_1 - \alpha}{2}, \bar{Z}_1 = \frac{(a_1 K_1 + \alpha)^2}{4\beta_1 K_1}$. 另外, 由抛物线与双曲线的位置关系可知, 其相切的情况是存在的, 因此, 设当抛物线与双曲线相切时, 双曲线 l_2 与 Z 轴的交点为 $(0, H)$.

由方程(3) 和(4) 在不同参数下的几何性质和位置关系, 则有下面的定理成立.

定理 3 设 $a_1 - \frac{\alpha}{K_1} > 0, \gamma > 0$.

- 1) 当 $a_2 K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 且 $\frac{\gamma K_2}{\alpha} < \frac{1}{\beta_1} \left(a_1 - \frac{\alpha}{K_1} \right)$ 时, 系统(2) 存在唯一的正平衡点;
- 2) 当 $a_2 K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 且 $\frac{\gamma K_2}{\alpha} > \frac{1}{\beta_1} \left(a_1 - \frac{\alpha}{K_1} \right)$ 时, 系统(2) 分别存在 0、1、2、3 个(含重根) 正平衡点;
- 3) 当 $a_2 K_2 > \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 且 $\frac{\gamma K_2}{\alpha} < \frac{1}{\beta_1} \left(a_1 - \frac{\alpha}{K_1} \right)$ 时, 若 $a_2 K_2 < H$, 则系统(2) 存在两个正平衡点(如图 1 所示的点 A_1, A_2); 若 $a_2 K_2 = H$ 时, 则系统(2) 存在一个正平衡点(如图 1 所示的点 A_3); 若 $a_2 K_2 > H$ 时, 则系统(2) 不存在正平衡点;
- 4) 当 $a_2 K_2 > \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 且 $\frac{\gamma K_2}{\alpha} > \frac{1}{\beta_1} \left(a_1 - \frac{\alpha}{K_1} \right)$ 时, 系统(2) 分别存在 0、1、2 个正平衡点.

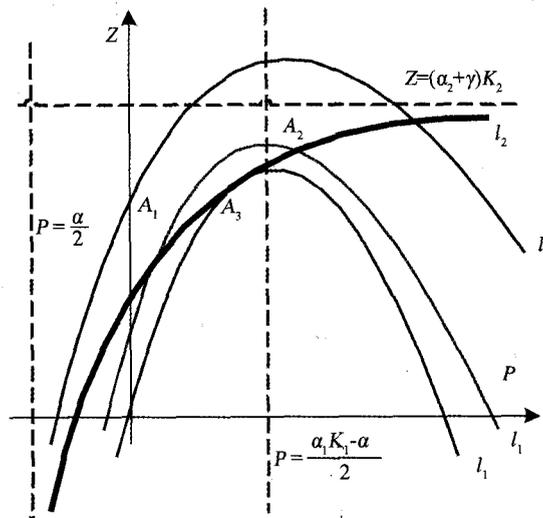


图1 当 $a_1 - \frac{\alpha}{K_1}, \gamma > 0$ 时, 方程(4)和不同的抛物线相交情况示意图

利用类似的思想和方法, 可以得到以下定理.

定理 4 设 $a_1 - \frac{\alpha}{K_1} > 0, \gamma < 0$.

- 1) 当 $a_2 K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时, 系统(2) 存在唯一的平衡点;

2) 当 $a_2 K_2 > \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时,若 $a_2 K_2 < H$,则系统(2)存在两个正平衡点;若 $a_2 K_2 = H$,则系统(2)存在一个正平衡点;若 $a_2 K_2 > H$,系统(2)不存在正平衡点.

定理 5 设 $a_1 - \frac{\alpha}{K_1} < 0, \gamma < 0$,

1) 若 $(a_2 + \gamma)K_2 < 0$,

i) 当 $a_2 K_2 \leq \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 且 $P_1 < P_2$ 时,系统(2)存在唯一的平衡点,这里

$$P_1 = a_1 K_1, P_2 = -\frac{\alpha a_2 K_2}{(a_2 + \gamma)K_2}$$

分别为抛物线和双曲线与 P 轴正半轴的交点的横坐标;

ii) 当 $\frac{\alpha a_1}{\beta_1} < a_2 K_2 < H$ 时,系统(2)存在 2 个正平衡态;

iii) 当 $a_2 K_2 = H$ 时,系统(2)存在 1 个正平衡态;

iv) 当 $a_2 K_2 > H$ 时,系统(2)不存在正平衡态.

2) 若 $0 < (a_2 + \gamma)K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$, 则

当 $a_2 K_2 \leq \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时,系统(2)存在唯一的平衡点;

当 $\frac{\alpha a_1}{\beta_1} < a_2 K_2 < H$ 时,系统(2)存在 2 个正平衡态;

当 $a_2 K_2 = H$ 时,系统(2)存在 1 个正平衡态;

当 $a_2 K_2 > H$ 时,系统(2)不存在正平衡态.

3) 若 $(a_2 + \gamma)K_2 > \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$, 则系统(2)不存在正平衡态.

定理 6 设 $a_1 - \frac{\alpha}{K_1} < 0, \gamma > 0$, 当 $a_2 K_2 < \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时,系统(2)存在唯一的平衡点;当 $a_2 K_2 \geq \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时,则系统(2)不存在正平衡态.

1.2 鞍结点分支

由定理 3 ~ 6 及图 1 可知,随着参数的变化,系统(2)正平衡态的个数将经历 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 的变化. 由方程(5)及(6)式知,当 $\lambda = 0$ 时,方程(5)有 3 个实根(有重根),下面根据文献[14](P194 定理 3.1)来讨论系统(2)的鞍结点分支存在性,并得到下面结论.

定理 7 若 $F = 0, E \neq 0, a_1 K_1 - 2\alpha > 0$, 则对系统(2), $(P, \lambda) = \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, 0\right)$ 为系统的鞍-结分支点且

(1) 当 $\lambda = 0$ 时,系统有唯一的高阶正平衡点 $\left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2}\right)$, 其为鞍结点;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时,在点 $\left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2}\right)$ 的小邻域产生两个正平衡点,一个为鞍点,另一个为结点;

(3) 当 $\lambda < 0$ 时,奇点 $\left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2}\right)$ 消失,在它的小邻域内没有奇点.

证明 当 $F = 0, \lambda = 0$ 时,由(6)式可得: $\beta_1 a_2 K_2 = \alpha a_1, a_1^2 K_1 = 4\beta_1 K_2 \gamma$, 进而方程(5)可化为

$$P\left(P + \frac{D}{2}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

显然 $P = -\frac{D}{2} = -\frac{1}{2}(2\alpha - a_1 K_1)$ 为方程(5)的一个非零解,由此可求得系统(2)的一个奇点为

$(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2})$. 将 $(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2})$ 平移到坐标原点, 则系统(2)可化为下面的系统

$$\begin{cases} \frac{d\bar{P}}{dt} = (\bar{P} + \frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}) \left[\frac{a_1 K_1 + 2\alpha}{2K_1} - \frac{\bar{P}}{K_1} - \frac{2\beta_1}{2\bar{P} + a_1 K_1} (\bar{Z} + \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2}) \right], \\ \frac{d\bar{Z}}{dt} = (\bar{Z} + \frac{(a_2 + 2\gamma)K_2}{2}) \left[\frac{a_2 - 2\gamma}{2} - \frac{\bar{Z}}{K_2} + \frac{2\gamma}{2\bar{P} + a_1 K_1} (\bar{P} + \frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}) \right], \end{cases} \quad (8)$$

$O(0,0)$ 为系统(8)的奇点, 其线性化系数矩阵为

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(2\gamma - a_2)}{2\gamma K_1} - \frac{\beta_1(a_1 K_1 - 2\alpha)}{2a_1 K_1} \\ \frac{\alpha(a_2 + 2\gamma)}{2\beta_1 K_1} - \frac{\gamma(a_1 K_1 + 2\alpha)}{2a_1 K_1} \end{pmatrix},$$

由定理条件知,

$$\det A = \frac{\alpha}{a_1 K_1^2} (a_1 a_2 K_1 - 4\alpha\gamma) = 0,$$

$$\text{Tr}(A) = \frac{\alpha(2\gamma - a_2)}{2\gamma K_1} - \frac{\gamma(a_1 K_1 + 2\alpha)}{2a_1 K_1} = -\frac{\alpha a_2 + \gamma a_1 K_1}{2a_1 K_1} \neq 0.$$

即 $\det A = 0, \text{Tr}(A) \neq 0$, 所以 $O(0,0)$ 为系统的 Lyapunov 型奇点.

令系统(8)第2个方程右边为0, 可得 \bar{P} 与 \bar{Z} 的关系式:

$$\bar{Z} = K_2 \left(\frac{a_2}{2} - \frac{2\alpha}{2\bar{P} + a_1 K_1} \right). \quad (9)$$

将(9)式代入方程(8)的第一个式子右边, 有

$$\begin{aligned} G(\bar{P}) = & -\frac{\bar{P} + \frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}}{K_1 \left(\bar{P} + \frac{a_1 K_1}{2} \right)^2} \left\{ \left(\left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^3 + D \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^2 + E \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right) + F \right) + \right. \\ & \left. \bar{P}^3 + \left(3 \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right) + D \right) \bar{P}^2 + \left[3 \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^2 + 2D \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right) + E \right] \bar{P} \right\}, \end{aligned}$$

注意到 $\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}$ 是方程(5)的二重根, 所以

$$\begin{cases} \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^3 + D \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^2 + E \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right) + F = 0, \\ 3 \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right)^2 + 2D \left(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2} \right) + E = 0, \end{cases} \quad (10)$$

将(10)式代入(9)并展成级数形式为

$$G(\bar{P}) = -\frac{(a_1 K_1 - 2\alpha)^2}{a_1^2 K_1^3} \bar{P}^2 + \dots \quad (11)$$

由文献[14](P194 定理 3.1)知, $O(0,0)$ 为系统(8)的鞍结点, 故 $(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2})$ 为系统(2)的鞍结点. 随着 λ 的微小变动, 则有

(1) 当 $\lambda > 0$ 时, 在点 $(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2})$ 的小邻域产生两个奇点, 且鞍点个数和结点个数相等,

即一个为鞍点, 一个为结点;

(2) 当 $\lambda < 0$ 时, 奇点 $(\frac{a_1 K_1 - 2\alpha}{2}, \frac{K_2(a_2 + 2\gamma)}{2})$ 消失, 在它的小邻域内没有奇点. 证毕.

定理 8 设 (P^*, Z^*) 为系统(2)的正奇点, 若 $F \neq 0$, 且

$$\left(a_1 - \frac{2P^*}{K_1} - \frac{\alpha\beta_1 Z^*}{(\alpha + P^*)^2} \right) \left(a_2 - \frac{2Z^*}{K_2} + \frac{\gamma P^*}{\alpha + P^*} \right) + \frac{\alpha\beta_1}{(\alpha + P^*)^3} = 0,$$

$$\left(a_1 - \frac{2P^*}{K_1} - \frac{\alpha\beta_1 Z^*}{(\alpha + P^*)^2} \right) + \left(a_2 - \frac{2Z^*}{K_2} + \frac{\gamma P^*}{\alpha + P^*} \right) \neq 0,$$

则 $(P, \lambda) = (P^*, 0)$ 为系统(2)的鞍-结分支点(λ 见(6)式),并有

- (1) 当 $\lambda = 0$ 时,系统(2)有唯一的高阶奇点 (P^*, Z^*) ,为鞍结点;
- (2) 当 $\lambda > 0$ 时,系统(2)在 (P^*, Z^*) 的邻域产生两个奇点,一个为鞍点,另一个为结点;
- (3) 当 $\lambda < 0$ 时,奇点 (P^*, Z^*) 消失,在它的邻域内没有奇点.

证明 若 $F \neq 0$, 当 $\lambda = 0$ 时,方程(5)有3个实根,其中有一个非零二重实根. 假设该根为 P^* , 相应的二重根奇点为 (P^*, Z^*) . 将 (P^*, Z^*) 平移到坐标原点来讨论, 做变换 $\tilde{P} = P - P^*$, $\tilde{Z} = Z - Z^*$, 则系统(2)可化为:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{P}}{dt} = (\tilde{P} + P^*) \left(a_1 - \frac{\tilde{P} + P^*}{K_1} \right) - \frac{(\beta_1 \tilde{P} + P^*)(\tilde{Z} + Z^*)}{\alpha + \tilde{P} + P^*}, \\ \frac{d\tilde{Z}}{dt} = (\tilde{Z} + Z^*) \left(a_2 - \frac{\tilde{Z} + Z^*}{K_2} \right) + \frac{\gamma(\tilde{P} + P^*)(\tilde{Z} + Z^*)}{\alpha + \tilde{P} + P^*}, \end{cases} \quad (12)$$

$O(0,0)$ 为系统(12)的奇点,其线性化系统的系数矩阵为

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{2P^*}{K_1} - \frac{\alpha\beta_1 Z^*}{(\alpha + P^*)^2} & -\frac{\beta_1 P^*}{\alpha + P^*} \\ \frac{\alpha\gamma Z^*}{(\alpha + P^*)^2} & a_2 - \frac{2Z^*}{K_2} + \frac{\gamma P^*}{\alpha + P^*} \end{pmatrix}.$$

由定理条件知, $\det A = 0$, $\text{Tr}(A) \neq 0$. 所以 $O(0,0)$ 为系统的 Lyapunov 型奇点.

令系统(12)的第2个方程右边为0可得,

$$\tilde{Z} = -\frac{\alpha\gamma K_2}{\alpha + \tilde{P} + P^*} + (a_2 + \gamma)K_2 - Z^*, \quad (13)$$

将(13)式代入方程组(12)第一个方程右边得

$$G(\tilde{P}) = -\frac{\tilde{P} + P^*}{K_1(\alpha + \tilde{P} + P^*)^2} ((P^{*3} + DP^{*2} + EP^* + F) + \tilde{P}^3 + (3P^* + D)\tilde{P}^2 + (3P^{*2} + 2DP^* + E)\tilde{P}). \quad (14)$$

注意到 P^* 是方程(5)的二重根,所以

$$\begin{cases} P^{*3} + DP^{*2} + EP^* + F = 0, \\ P^{*3} + DP^{*2} + EP^* + F \Big|'_{P=P^*} = 3P^{*2} + 2DP^* + E = 0, \end{cases} \quad (15)$$

将(15)式代入(14)并展成关于 P^* 的级数形式为

$$G(\tilde{P}) = -\frac{P^*(3P^* + D)}{K_1(\alpha + P^*)^2} \tilde{P}^2 + \dots,$$

所以 $O(0,0)$ 为系统(12)的鞍结点,进而 (P^*, Z^*) 为系统(2)的鞍结点,且随着 λ 的微小变动,有

(1) 当 $\lambda > 0$ 时,在奇点 (P^*, Z^*) 的邻域产生两个奇点,且鞍点个数和结点个数相等,即一个为鞍点,一个为结点;

(2) 当 $\lambda < 0$ 时,奇点 (P^*, Z^*) 消失,在它的邻域内没有奇点. 证毕.

2 结 论

本文主要研究了一个富营养水体的渔业收获模型,给出了系统3个边界平衡态的稳定性,然后利用几何分析的方法给出了正平衡态存在性及个数的条件. 由定理2可知,当对鱼类的收获率 $C_2 < C_2^* = r_2 - \frac{\alpha a_1}{\beta_1}$ 时,藻类灭绝平衡态 $S_1(0, a_2 K_2)$ 是稳定的;当 $C_2 > C_2^*$ 时, $S_1(0, a_2 K_2)$ 是不稳定的. 进一步地,若 $C_2 > r_2 + \frac{\gamma a_1 K_1}{\alpha + a_1 K_1}$, 则鱼类灭绝平衡态 $S_2(a_1 K_1, 0)$ 是稳定的. 类似地,对藻类的收获率也有类似的结果. 因此,对于鱼类或藻类等渔业资源的收获比例都存在一个阈值范围.

由定理3~6可知,在一定条件下,系统会存在鱼类和藻类共存的平衡点,但是平衡点的个数可能会有两个或一个高阶的奇点情况. 定理7~8分别讨论了鱼类和藻类共存平衡点的鞍结点分支. 这些数学结果均

显示了系统的复杂性. 另外, 系统(2)所描述的人类管理措施是连续的方式, 实际上, 人类的管理措施是脉冲式或不连续的. 如何描述并研究人类脉冲控制及不连续控制对富营养化水体中生物种群的影响, 将是我们以后的工作.

参 考 文 献

- [1] 田利, 王金鑫. 鲢鱼、芦台鲈鱼对富营养化水体中藻类的控制作用[J]. 生态环境, 2008, 17(4): 1334-1337.
- [2] 范荣桂, 朱东南, 邓岚. 湖泊富营养化成因及其综合治理技术进展[J]. 水资源与水工程学报, 2010, 21(6): 48-52.
- [3] 傅金波, 郭红建. 一类富营养湖泊中藻类的状态反馈控制模型[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2015, 28(1): 4-7.
- [4] 王嵩, 王启山, 张丽彬, 等. 水库大型围隔放养鲢鱼、鳙鱼控藻的研究[J]. 中国环境科学, 2009, 29(11): 1190-1195.
- [5] 谢平. 鲢、鳙与藻类水华控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] Chattopadhyay J, Sarkar R R, Mandal S. Toxin-producing Plankton May Act as a Biological Control for Planktonic Blooms-Field Study and Mathematical Modelling[J]. Journal of Theoretical Biology, 2002, 215(3): 333-344.
- [7] Kar T K. Conservation of a fishery through optimal taxation: a dynamic reaction model[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2005, 10(2): 121-131.
- [8] Xiao Dongmei, Li Wenxia, Han Mao-An. Dynamics in a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting[J]. J Math Anal Appl, 2006, 324(1): 14-29.
- [9] Kar T K, Chaudhuri K S. On non-selective harvesting of two competing fish species in the presence of toxicity[J]. Ecological Modelling, 2003, 161(1/2): 125-137.
- [10] Wang Yong, Wang Hongbin. Stability and Selective Harvesting of a Phytoplankton-Zooplankton System[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014(4): 1-11.
- [11] Lü Yunfei, Pei Yongzhen. Harvesting of a phytoplankton-Zooplankton model[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5): 3608-3619.
- [12] 刘霞, 王金玲. 带非线性收获的捕食系统的多种分支分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(3): 18-22.
- [13] 李静, 王红军. 带有常值收获的 Leslie-Gower 捕食被捕食模型的多种分支分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(5): 12-17.
- [14] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 182-196.

Qualitative Analysis of a Kind of Fishery Harvest Model in Eutrophic Water Body

GUO Hongjian, DU Jiejing, GAO Si

(Department of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: Based on the relationships between producers and consumers in the eutrophic water body, a kind of fishery harvest model is presented. The existence and stability of the boundary equilibria are given, the existence and the number of positive equilibrium are analyzed. We found under certain conditions the system has two positive equilibria. Furthermore, the conditions under which the positive equilibrium is a saddle-node are given. Finally, taking the catch rate as a target parameter, some biological meanings are given.

Keywords: eutrophication; water; fisheries model; harvest; saddle-node bifurcation