

执行器幅值与速率约束下线性系统的事件触发控制

贾金泽¹, 陈永刚^{2a,b}, 白圆圆^{2a}

(1.河南工学院 管理学院, 河南 新乡 453003; 2.河南科技学院 a.数学科学学院;
b.河南省数字农业工程技术研究中心, 河南 新乡 453003)

摘要:传统的网络化控制系统中,控制任务通常以周期的方式执行.为了节约网络通信资源,一些学者提出了事件触发控制.另一方面,由于物理限制或出于安全考虑,几乎所有反馈控制系统都会受到饱和约束.饱和的存在是系统性能退化甚至不稳定的主要因素.研究了受到执行器幅值与速率饱和约束的线性系统的事件触发控制问题.首先,一阶系统用来表示执行器的幅值和速率限制.然后,引入了两个推广的扇区条件来处理由饱和引起的死区非线性.接下来,通过利用 Lyapunov 稳定性理论,获得了确保闭环系统区域渐近稳定的充分条件.通过限制稳定域的最小范围,提出了事件触发率的最优化问题.所获得的结果用线性矩阵不等式表示,能够方便地利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱进行求解.最后,数值例子和仿真验证了所得结果的有效性.

关键词:线性系统;事件触发控制;幅值约束;速率约束

中图分类号: O231

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2024)03-0106-07

随着计算机技术和网络通信技术的快速发展,工业控制系统发生了重大变革,网络化系统的管理与优化控制成为重要的研究方向.网络化控制系统是一种空间分布控制系统,其中传感器、控制器和执行器之间通过网络进行数据传递.相对传统的点对点信息无损的控制系统,基于网络的控制系统具有布线简单、易于安装与维护、较高的容错与故障诊断能力、可实现数据共享以及企业对系统的远程监控、优化与维护等优点.然而,通信网络的引入带来了一些新问题,比如:时滞、丢包、量化、错序等^[1-2],这将会导致系统性能严重退化,甚至造成系统崩溃.在网络化控制系统中,数据的采样、处理和传输通常采用时间触发的通信机制.这种时间触发通信模式意味着网络在每一固定的通信时刻都要传输、接受并处理数据,这将会严重浪费网络带宽资源,也会增加电池等设备的能耗.事实上,网络的带宽是有限的,网络资源的过分使用将会使得数据包在传输过程中出现碰撞,从而导致时滞、丢包和错序等现象.近十多年来,一些学者寻求了基于事件触发的通信机制,其基本思想是设计触发协议保证控制任务按需求执行,从而达到节约网络资源的目的^[3-5].

另一方面,几乎所有实际反馈控制系统都会受到执行器的饱和约束^[6-7].由于物理限制或出于安全考虑,执行器传递的信号大小通常有一定限制.例如,比例阀有最大开度值(100%),这限制了输送到被控制系统的流量;功率转换器和放大器的电流和输出电压总是有限的,以免组件损坏.执行器饱和的存在将会使得控制系统性能恶化,在一些极端情况下会导致闭环系统不稳定.过去几十年内,饱和控制系统的分析、控制及应用一直都是控制理论与控制工程中的研究热点.然而,需要指出的是,文献中的大多结果主要针对执行器幅值饱和和情形.事实上,执行器速率饱和也常出现在许多系统中^[8-10],比如飞行控制系统和风力涡轮机系统^[9-10].

收稿日期: 2023-05-27; **修回日期:** 2023-08-28.

基金项目: 国家自然科学基金(62273132); 河南省科技攻关项目(232102320338).

作者简介: 贾金泽(1991-),男,河南新乡人,河南工学院讲师,博士,研究方向为系统建模、分析与控制、工业工程.

通信作者: 陈永刚(1981-),男,河南西平人,河南科技学院教授,博士,研究方向为控制理论与应用, E-mail: happycygzmd@tom.com

引用本文: 贾金泽, 陈永刚, 白圆圆. 执行器幅值与速率约束下线性系统的事件触发控制[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(3): 106-112. (Jia Jinze, Chen Yonggang, Bai Yuanyuan. Event-triggered control for linear systems under input amplitude and rate constraints[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(3): 106-112. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.05.27.0002.)

通过利用一阶模型来表示具有幅值和速率饱和的执行器,文献[11]研究了连续线性系统的局部反馈镇定问题.针对执行器幅值和速率饱和的离散线性系统,文献[12]给出了动态输出反馈控制设计方案.针对执行器幅值和速率饱和的连续线性系统,文献[13]提出了基于采样数据的控制策略.

许多实际控制系统中,饱和约束和通信网络往往是同时共存的.因此,近十年来,网络化饱和系统的控制综合问题也受到许多学者的关注^[14-15].尤其,为了节约通信网络资源,不少学者研究了基于事件触发协议的网络化饱和系统的控制综合问题.比如,ZHANG等^[16]在静态事件触发协议下研究了具有执行器饱和约束的连续和离散系统的半全局镇定问题.在静态和动态事件触发协议以及自触发协议下,ZHANG等^[17]进一步研究了执行器饱和连续时间系统的半全局镇定问题.利用局部扇区条件,MOREIRA等^[18]基于静态事件触发协议研究了执行器饱和和线性系统的局部状态反馈控制问题,尤其,对于事先给定的稳定域,讨论了降低事件触发率的优化问题.利用饱和相关的事件触发策略,LI等^[19]研究了非对称输入饱和系统的控制综合问题.然而,需要指出的是,文献[16-20]并没有考虑执行器的速率饱和约束.

基于上面的讨论,本文旨在考虑受到执行器幅值与速率饱和约束的连续线性系统的事件触发控制问题.类似于文献[11,13],利用一个一阶模型来表示执行器的幅值和速率限制.然后,利用两个推广的局部扇区条件来处理由饱和引起的死区非线性.接下来,通过进一步利用 Lyapunov 稳定性理论,获得了确保闭环系统区域渐近稳定的充分条件.通过限制稳定域的最小范围,也提出了事件触发率的最优化问题.本文获得的结果用线性矩阵不等式(LMIs)表示,能够方便地利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱进行求解.最后,数值例子验证本文所得结果的有效性.

符号: \mathbf{R}^n 表示 n 维欧几里得空间, $\mathbf{P} > 0$ ($\mathbf{P} \geq 0$) 表示 \mathbf{P} 为对称正定矩阵(对称半正定矩阵), \mathbf{A}^\top 表示矩阵 \mathbf{A} 的转置, “*” 表示对称矩阵中的对称项, \mathbf{I} 为单位矩阵.

1 问题描述

考虑下面的线性控制系统:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示系统的状态, $u(x) \in \mathbf{R}^m$ 表示系统的控制输入, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为具有相容维数的已知实常矩阵.在实际控制系统中,由于物理执行器的限制或者基于安全考虑,执行器往往会受到饱和约束.本文中,同时考虑了执行器的幅值与速率约束.受到文献[11,13]的启发,这里,执行器用下面的一阶系统来表示:

$$\dot{u}_{(l)}(t) = \text{sat}_{r_{(l)}}(-\lambda_{(l)}u_{(l)}(t) + \lambda_{(l)}\text{sat}_{p_{(l)}}(v_{(l)}(t))), l = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

其中 $u_{(l)}(t)$ 表示执行器状态, $v_{(l)}(t)$ 表示执行器输入, $\lambda_{(l)}$ 为一正常数.系统(2)中,幅值饱和函数 $\text{sat}_{p_{(l)}}$ 与速率饱和函数 $\text{sat}_{r_{(l)}}$ 分别定义如下:

$$\text{sat}_{p_{(l)}}(w_{(l)}) = \text{sign}(w_{(l)}) \min\{\bar{u}_{p_{(l)}}, |w_{(l)}|\}, \text{sat}_{r_{(l)}}(w_{(l)}) = \text{sign}(w_{(l)}) \min\{\bar{u}_{r_{(l)}} |w_{(l)}|\},$$

其中 $\bar{u}_{p_{(l)}}$ 与 $\bar{u}_{r_{(l)}}$ 分别表示执行器的幅值饱和水平和速率饱和水平.

注 1 一阶系统(2)是经典的具有速度限制的位置反馈型模型,常用来刻画具有幅值饱和与速率饱和的执行器.由(2)可知,执行器显然满足速率饱和约束.另外,需要指出的是,当常数 $\lambda_{(l)}$ 趋于无穷时,执行器 $u(t)$ 状态总是满足幅值饱和约束的^[8].

本文中,考虑数据通过网络进行传输.尤其,为了节约网络资源,本文采用事件触发策略.对应地,执行器的控制输入具有下面的形式:

$$v(t_k) = \mathbf{K}_x x(t_k) + \mathbf{K}_u u(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3)$$

其中 \mathbf{K}_x 和 \mathbf{K}_u 为控制增益矩阵, t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) 为事件触发时刻且规定 $t_0 = 0$.

本文中,事件触发时刻 t_k ($k = 1, 2, \dots$) 由下面的条件给出^[18]:

$$t_{k+1} = \min\{t \mid t > t_k, \delta^\top(t)\mathbf{\Omega}_\delta\delta(t) - z^\top(t)\mathbf{\Omega}_z z(t) > 0\}, \quad (4)$$

其中 $\delta(t) \triangleq z(t_k) - z(t)$, $\mathbf{\Omega}_\delta$ 和 $\mathbf{\Omega}_z$ 为对称正定矩阵.

定义对角矩阵 $\mathbf{\Lambda} \triangleq \text{diag}\{\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(m)}\}$, 由式(1)~(3)可得如下闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ \dot{u}(t) = \text{sat}_r(-\mathbf{\Lambda}u(t) + \mathbf{\Lambda}\text{sat}_p(\mathbf{K}_x x(t_k) + \mathbf{K}_u u(t_k))). \end{cases} \quad (5)$$

定义增广向量 $z(t) \triangleq [x^T(t) \quad u^T(t)]^T \in \mathbf{R}^n$, 其中 $\bar{n} \triangleq n + m$, 并引入记号

$$\mathbf{A}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 \triangleq [0 \quad -\mathbf{A}], \mathbf{B}_3 \triangleq \mathbf{A}, \mathbf{K} \triangleq [\mathbf{K}_x \quad \mathbf{K}_u].$$

闭环系统(5)则可表示为:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}_1 z(t) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_r(\mathbf{B}_2 z(t) + \mathbf{B}_3 \text{sat}_p(\mathbf{K}z(t_k))). \quad (6)$$

为了处理执行器的幅值与速率饱和, 引入下面的死区函数:

$$\begin{cases} \psi_p = \mathbf{K}z(t_k) - \text{sat}_p(\mathbf{K}z(t_k)), \\ \psi_r = (\mathbf{B}_2 z(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{K}z(t_k) + \mathbf{B}_3 \psi_p) - \text{sat}_r(\mathbf{B}_2 z(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{K}z(t_k) + \mathbf{B}_3 \psi_p). \end{cases} \quad (7)$$

注意到 $\delta(t) \triangleq z(t_k) - z(t)$, 闭环系统(5)可重新表示为:

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \mathbf{K})z(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \mathbf{K} \delta(t) - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \psi_p - \mathbf{B}_1 \psi_r. \quad (8)$$

本文的主要目的是设计控制输入(3)和触发条件(4)使得闭环系统(8)区域渐近稳定.

引理 1^[6] 给定两个向量 $u \in \mathbf{R}^m$ 以及 $w \in \mathbf{R}^m$, 并记 $\psi(u) \triangleq u - \text{sat}(u)$. 如果 $|u_{(l)} - w_{(l)}| \leq \bar{u}_{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, m$), 则对任意的 $m \times m$ 正对角矩阵 \mathbf{H} , 下面的扇区条件成立:

$$\psi^T(u) \mathbf{H} [\psi(u) - w] \leq 0.$$

为了处理执行器幅值与速率饱和引入的死区非线性, 定义新变量

$$\begin{aligned} u_1(t) &\triangleq \mathbf{K} \delta(t) + \mathbf{K} z(t), u_2(t) \triangleq (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{K}) z(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{K} \delta(t) - \mathbf{B}_3 \psi_p, \\ w_1(t) &\triangleq (\mathbf{K} - \mathbf{G}_1) z(t) + \mathbf{K} \delta(t), w_2(t) \triangleq (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{K} - \mathbf{G}_2) z(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{K} \delta(t) - \mathbf{B}_3 \psi_p, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{G}_1 和 \mathbf{G}_2 为 $m \times \bar{n}$ 矩阵. 然后, 假设下面的约束条件成立:

$$|u_{1(l)}(t) - w_{1(l)}(t)| \leq \bar{u}_{p(l)}, |u_{2(l)}(t) - w_{2(l)}(t)| \leq \bar{u}_{r(l)}, l=1, 2, \dots, m, t \geq 0. \quad (9)$$

利用引理 1, 则对任意的 $m \times m$ 正对角矩阵 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 , 下面的扇区条件成立:

$$-2\psi_p^T \mathbf{H}_1 [\psi_p - (\mathbf{K} - \mathbf{G}_1) z(t) - \mathbf{K} \delta(t)] \geq 0, \quad (10)$$

$$-2\psi_r^T \mathbf{H}_2 [\psi_r - (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{K} - \mathbf{G}_1) z(t) - \mathbf{B}_3 \mathbf{K} \delta(t) + \mathbf{B}_3 \psi_p] \geq 0. \quad (11)$$

2 主要结果

为了分析闭环系统(8)的渐近稳定性, 选取下面的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = z^T(t) \mathbf{P} z(t), \mathbf{P} > 0. \quad (12)$$

定理 1 假定存在 $\bar{n} \times \bar{n}$ 的对称正定矩阵 \mathbf{X} , $\bar{\mathbf{\Omega}}_z$ 和 $\bar{\mathbf{\Omega}}_\delta$, $m \times m$ 的正对角矩阵 $\bar{\mathbf{H}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{H}}_2$, $m \times \bar{n}$ 的任意矩阵 $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{G}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{G}}_2$, 使得下面的 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \bar{\mathbf{K}} & \bar{\Gamma}_2 & \bar{\Gamma}_3 & \mathbf{X} \\ * & -\bar{\mathbf{\Omega}}_\delta & \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}_3^T & 0 \\ * & * & -\bar{\mathbf{H}}_1^T - \bar{\mathbf{H}}_1 & -\bar{\mathbf{H}}_1 \mathbf{B}_3^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{H}}_2^T - \bar{\mathbf{H}}_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\mathbf{\Omega}}_z \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{p(l)}^2 & \bar{\mathbf{G}}_1 \\ * & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \bar{u}_{r(l)}^2 & \bar{\mathbf{G}}_2 \\ * & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} > 0, l=1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

其中

$$\bar{\Gamma}_1 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2) \mathbf{X}^T + \mathbf{X} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2)^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3)^T,$$

$$\bar{\Gamma}_2 = -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 \bar{\mathbf{H}}_1^T + \bar{\mathbf{K}}^T - \bar{\mathbf{G}}_1^T, \bar{\Gamma}_3 = -\mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{H}}_2^T + \mathbf{X} \mathbf{B}_3^T + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}_3^T - \bar{\mathbf{G}}_2^T.$$

那么, 线性系统(1)在控制输入(3)和事件触发条件(4)下可实现区域镇定. 对应地, 集合 $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{z(t) \in \mathbf{R}^n, z^T(t) \mathbf{P} z(t) \leq 1\}$ 为稳定域, 控制器增益矩阵和事件触发条件中的参数可分别由 $\mathbf{K} \triangleq \bar{\mathbf{K}} \mathbf{X}^{-T}$ 和 $\bar{\mathbf{\Omega}}_z \triangleq \bar{\mathbf{\Omega}}_z^{-1}$,

$\bar{\mathbf{\Omega}}_\delta \triangleq \mathbf{X}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}}_\delta \mathbf{X}^{-T}$ 给出.

证明 让 Lyapunov 函数 $V(t)$ 关于时间 t 求导,并利用(8)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2z^T(t)P(A_1 + B_1B_2 + B_1B_3K)z(t) + 2z^T(t)P \times B_1B_3K\delta(t) - \\ & 2z^T(t)PB_1B_3\psi_p - 2z^T(t)PB_1\psi_r. \end{aligned} \quad (15)$$

由事件触发条件(3)可知,当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,下面的不等式成立:

$$z^T(t)\Omega_z z(t) - \delta^T(t)\Omega_\delta \delta(t) \geq 0. \quad (16)$$

将不等式(11)、(12)和(18)的左侧添加到 $\dot{V}(t)$ 中,则可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & 2z^T(t)P(A_1 + B_1B_2 + B_1B_3K)z(t) + 2z^T(t)PB_1B_3K\delta(t) - 2z^T(t)PB_1B_3\psi_p - \\ & 2z^T(t)PB_1\psi_r - 2\psi_p^T H_1[\psi_p - (K - G_1)z(t) - K\delta(t)] - 2\psi_r^T H_2[\psi_r - (B_2 + B_3K - \\ & G_2)z(t) - B_3K\delta(t) + B_3\psi_p] + z^T(t)\Omega_z z(t) - \delta^T(t)\Omega_\delta \delta(t) = \xi^T(t)E\xi(t), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\xi(t) \triangleq [z^T(t) \ \delta^T(t) \ \psi_p^T \ \psi_r^T]^T$, 以及

$$E = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \Omega_z & PB_1 B_3 K & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ * & -\Omega_\delta & K^T H_1^T & K^T B_3^T H_2^T \\ * & * & -H_1 - H_1^T & -B_3^T H_2^T \\ * & * & * & -H_2 - H_2^T \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = P(A_1 + B_1B_2) + (A_1 + B_1B_2)^T P + PB_1B_3K + (B_1B_3K)^T P,$$

$$\Gamma_2 = -PB_1B_3 + K^T H_1^T - G_1^T H_1^T, \Gamma_3 = -PB_1 + B_2^T H_2^T + K^T B_3^T H_2^T - G_2^T H_2^T.$$

假定矩阵不等式 $E < 0$ 成立,则由(17)可得 $\dot{V} < 0$. 与此同时,假设

$$(1/\bar{u}_{p(l)}^2)G_{1(l)}^T G_{1(l)} \leq P, (1/\bar{u}_{r(l)}^2)G_{2(l)}^T G_{2(l)} \leq P, l = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

注意到 $\dot{V}(t) < 0$, 并利用式(18),则可进一步得到如下不等式:

$$|u_{1(l)} - w_{1(l)}| = z^T(t)G_{1(l)}^T G_{1(l)} z(t) \leq \bar{u}_{p(l)}^2 V(t) \leq \bar{u}_{p(l)}^2 V(0), l = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

$$|u_{2(l)} - w_{2(l)}| = z^T(t)G_{2(l)}^T G_{2(l)} z(t) \leq \bar{u}_{r(l)}^2 V(t) \leq \bar{u}_{r(l)}^2 V(0), l = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

对任意始于集合 $\epsilon(P) \triangleq \{z(t) \in \mathbf{R}^n, z^T P z(t) \leq 1\}$ 的初始条件 $z(0)$, 由式(19)和(20)可以看出,系统的状态轨迹满足约束条件(9). 进一步地,由 $\dot{V}(t) < 0$ 可知,闭环系统(8)是区域渐近稳定的,且 $\epsilon(P) \triangleq \{z(t) \in \mathbf{R}^n, z^T(t)Pz(t) \leq 1\}$ 为系统的稳定域.

接下来,将证明矩阵不等式 $E < 0$ 以及式(18)中不等式成立.定义如下变量:

$$\begin{cases} P \triangleq X^{-1}, K \triangleq \bar{K}X^{-T}, G_1 \triangleq \bar{G}_1 X^{-T}, G_2 \triangleq \bar{G}_2 X^{-T}, \\ H_1 \triangleq \bar{H}_1^{-1}, H_2 \triangleq \bar{H}_2^{-1}, \Omega_z \triangleq \bar{\Omega}_z^{-1}, \Omega_\delta \triangleq X^{-1} \bar{\Omega}_\delta X^{-T}. \end{cases} \quad (21)$$

对 LMI(14)左端乘以 $\text{diag}\{X^{-1}, X^{-1}, \bar{H}_1^{-1}, \bar{H}_2^{-1}, I\}$, 右端乘以其转置,并利用式(21)和 Schur 补,则可得 $E < 0$. 同理,对式(14)中的 LMIs 左端乘以 $\text{diag}\{I, X^{-1}\}$, 右端乘以其转置,再次利用(21)和 Schur 补,则可容易得到(18)中矩阵不等式.证毕.

在保证闭环系统(8)渐近稳定的同时,考虑尽可能降低事件触发次数以达到节约网络资源的目的.如文献[18]在设计事件触发策略时让 Ω_δ 选取的尽可能“小”, Ω_z 尽可能地“大”. 为了获得对应的优化问题,引入下面的矩阵不等式:

$$\Omega_\delta = X^{-1} \bar{\Omega}_\delta X^{-T} \leq \hat{\Omega}_\delta (\hat{\Omega}_\delta > 0). \quad (22)$$

注意到 $X^T \bar{\Omega}_\delta^{-1} X \geq \hat{\Omega}_\delta^{-1}$ 和 $(X - \alpha \bar{\Omega}_\delta)^T \bar{\Omega}_\delta^{-1} (X - \alpha \bar{\Omega}_\delta) \geq 0$, 其中 α 为一常数,容易证明上面的矩阵不等式可由下面的 LMI 确保:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Omega}_\delta & I \\ * & \alpha(X + X^T) - \alpha^2 \bar{\Omega}_\delta \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

为了优化事件触发次数,选取集合 $\epsilon(P_0) = \{z(t) \in \mathbf{R}^n; z^T(t)P_0 z(t) \leq 1, P_0 > 0\}$ 使得 $\epsilon(P_0) \subset \epsilon(X^{-1})$. 注意到 $\epsilon(P_0) \subset \epsilon(X^{-1})$ 可由 $X > P_0^{-1}$ 确保,则可得下面的优化问题:

$$\text{问题 1} \quad \min_{X, \Omega_z, \Omega_\delta, H_1, H_2, G_1, G_2, K, \Omega_\delta} \text{trace}(\bar{\Omega}_z + \hat{\Omega}_\delta), \text{ s.t., LMIs(13) } \sim \text{(14) 和(23) 成立, } X - P_0^{-1} > 0.$$

注 2 在对事件触发率进行优化时,需要规定最小容许的稳定域 $\varepsilon(\mathbf{P}_0)$, 否则的话,将会得到非常小的稳定域.事实上,在事件触发机制下对执行器饱和约束系统进行控制设计时,不仅要关注事件触发率,还需要同时考虑系统的稳定域.

注 3 在文献[18]中,作者研究了执行器幅值饱和下的事件触发控制问题.相对于文献[18],本文同时考虑了执行器的幅值饱和与速率饱和.事实上,执行器速率限制经常出现在许多工程系统中,比如飞行控制系统和风力涡轮机系统等.此外,经济系统控制中,经济政策的调整也不可能变化太快.因此,本文结果是现有结果的重要补充.

注 4 在文献[18]中,作者提出的最优化问题的目标函数为 $\text{trace}(\bar{\mathbf{\Omega}}_z + \bar{\mathbf{\Omega}}_\delta)$.注意到 $\bar{\mathbf{\Omega}}_\delta = \mathbf{X}\mathbf{\Omega}_\delta\mathbf{X}^\top$, 显然, $\text{trace}(\bar{\mathbf{\Omega}}_\delta)$ 的最小化并不能确保 $\text{trace}(\mathbf{\Omega}_\delta)$ 的最小化.因此,文献[18]提出的关于事件触发率的优化问题具有一定的限制.本文中,选取 $\text{trace}(\mathbf{\Omega}_\delta)$ 的上界 $\text{trace}(\hat{\mathbf{\Omega}}_\delta)$ 进行优化,且在式(23)中引入调整参数,这将会增加灵活性.

3 数值例子

例 1 考虑系统(1)和(2),对应参数选取如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_{(l)} = 20, \bar{u}_{r(l)} = \bar{u}_{p(l)} = 5.$$

选取 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ 和 $\alpha = 0.1$, 并求解最优化问题,则可得到下面的参数:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.3486 & -0.1089 & -0.0216 \end{bmatrix}, \mathbf{\Omega}_z = \begin{bmatrix} 0.4940 & -0.0670 & 0.0998 \\ -0.0670 & 0.9250 & 0.0491 \\ 0.0998 & 0.0491 & 1.3340 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Omega}_\delta = \begin{bmatrix} 1.1432 & 0.3573 & 0.0709 \\ 0.3573 & 0.1117 & 0.0222 \\ 0.0709 & 0.0222 & 0.0044 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2078 & 0.0274 & 0.2355 \\ 0.0274 & 0.2297 & 0.0747 \\ 0.2355 & 0.0747 & 0.7728 \end{bmatrix}.$$

数值仿真中,选取初始条件 $z(0) = [-1 \quad -0.3 \quad -0.7]^\top \in \varepsilon(\mathbf{P})$. 利用上面所得设计的参数,分别画出了时间间隔 $[0, 3]$ 内的状态响应,执行器状态和输入以及事件触发时刻,如图 1~3 所示.对于这个例子,容易验证开环系统是不稳定的.由图 1 可知,在本文的控制策略下,闭环系统可以实现镇定.图 2 表明执行器的速率是受到饱和约束的.此外,由图 2 可以看出在时间区间 $[0, 3]$ 内,事件仅触发 12 次,这表明基于事件触发机制的策略能够有效降低数据传输频率,从而达到节约网络通信资源的目的.

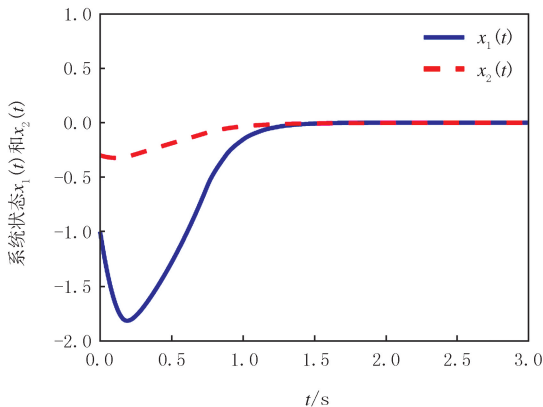


图1 闭环系统状态响应

Fig.1 State response of the closed-loop system

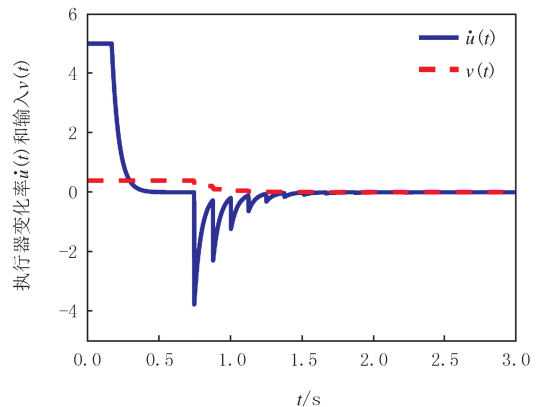


图2 执行器变化率和执行器输入

Fig.2 Actuator rate and actuator input

当执行器不存在饱和约束时,利用上面的设计参数,在图 4 中画出了闭环系统的状态响应.数值仿真中,事件触发次数并没有改变.然而由图 4 可以看出,系统的超调量减小,收敛速度更快.这表明执行器饱和会造

成闭环系统的性能退化.

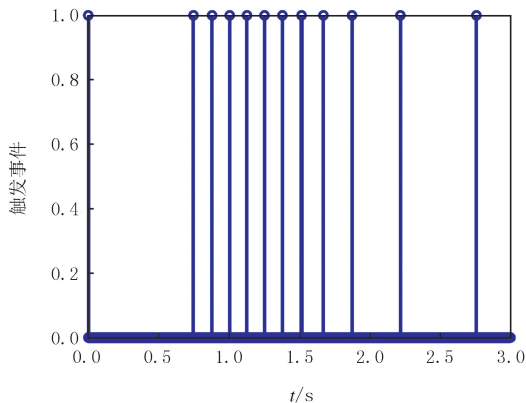


图3 事件触发时刻

Fig. 3 Event-triggered Instants

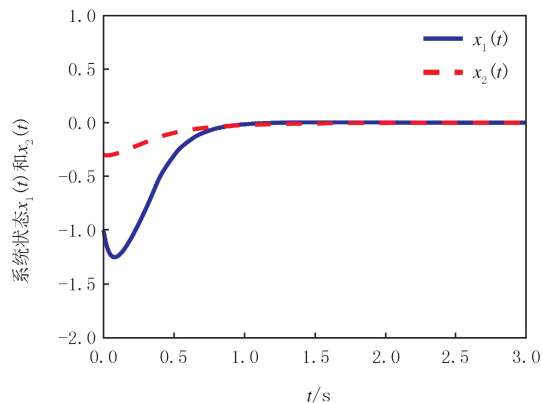


图4 闭环系统状态响应

Fig. 4 State response of the closed-loop system

注 5 在数值计算中,LMI(23)中的调整参数 α 扮演着重要角色.通过选取不同的 α ,会得到不同的事件触发次数和不同的稳定域.比如,当 α 分别选取为 0.50、0.10 和 0.01 时,时间区间 $[0, 3]$ 内的事件触发次数分别为 10 次、12 次和 14 次.然而,需要指出的是 α 为 0.50 时对应的稳定域最小, α 为 0.01 时对应的稳定域最大.

4 结 论

本文研究了受到执行器幅值与速率饱和约束的线性系统的事件触发控制问题.首先,用一阶系统来表示执行器的幅值和速率限制.然后,通过利用推广的局部扇区条件和 Lyapunov 稳定性理论,建立了 LMIs 表示的确保闭环系统区域渐近稳定的充分条件.为了降低事件触发次数,通过限制稳定域的最小范围,提出了事件触发率的最优化问题.最后,数值例子和仿真验证了本文所获得结果的有效性.作为后续的研究,将考虑动态事件触发协议和基于采样的事件触发协议下的控制综合问题.此外,在设计控制输入时,拟考虑系统状态和执行器状态触发时刻不同的情形.

参 考 文 献

- [1] HESPANHA J P, NAGHSHTABRIZI P, XU Y G. A survey of recent results in networked control systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 138-162.
- [2] 姚合军, 李钧涛. 一类非线性随机网络系统的均方指数稳定控制[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2019, 47(6): 31-37.
YAO H J, LI J T. Mean square exponential stability control for a class of nonlinear stochastic network systems[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2019, 47(6): 31-37.
- [3] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [4] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1992-1997.
- [5] PENG C, LI F Q. A survey on recent advances in event-triggered communication and control[J]. Information Sciences, 2018, 457/458: 113-125.
- [6] TARBOURIECH S, GARCIA G, GOMES DA SILVA J M, et al. Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators [M]. London: Springer, 2011.
- [7] 林宗利, 李元龙. 饱和约束控制系统的吸引域估计[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 824-834.
LIN Z L, LI Y L. Estimation of domain of attraction for linear systems with actuator saturation[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 824-834.
- [8] STOOBVOGEL A A, SABERI A. Output regulation of linear plants with actuators subject to amplitude and rate constraints[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1999, 9(10): 631-657.
- [9] LIN Z L. Semi-global stabilization of linear systems with position and rate-limited actuators[J]. Systems & Control Letters, 1997, 30(1):

1-11.

- [10] BAIOMY N, KIKUUWE R. An amplitude-and rate-saturated collective pitch controller for wind turbine systems[J]. *Renewable Energy*, 2020, 158: 400-409.
- [11] GOMES DA SILVA J M, TARBOURIECH S, GARCIA G. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 842-847.
- [12] GOMES DA SILVA J M, LIMON D, ALAMO T, et al. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2367-2372.
- [13] PALMEIRA A H K, GOMES DA SILVA J M, TARBOURIECH S, et al. Sampled-data control under magnitude and rate saturating actuators[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(15): 3232-3252.
- [14] YANG H J, XIA Y Q, YUAN H H, et al. Quantized stabilization of networked control systems with actuator saturation[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(16): 3595-3610.
- [15] ZHAO L, XU H, YUAN Y, et al. Stabilization for networked control systems subject to actuator saturation and network-induced delays[J]. *Neurocomputing*, 2017, 267: 354-361.
- [16] ZHANG L Y, CHEN M Z Q. Event-triggered control for semi-global stabilisation of systems with actuator saturation[J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(5): 1047-1064.
- [17] ZHANG K, ZHOU B, JIANG H Y. Parametric Lyapunov equation based event-triggered and self-triggered control of input constrained linear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(16): 6606-6626.
- [18] MOREIRA L G, GROFF L B, GOMES DA SILVA J M. Event-triggered state-feedback control for continuous-time plants subject to input saturation[J]. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2016, 27(5): 473-484.
- [19] LI H C, ZHANG N, ZUO Z Q, et al. A novel saturation-related event-triggered scheme for systems with asymmetric input constraint[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(15): 8600-8613.
- [20] 李钧涛, 梁聪, 汤永. 一类扰动线性方程组的迭代学习控制求解方法[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2022, 50(6): 8-14.
- LI J T, LIANG C, TANG Y. Iterative learning control method for solving a class of perturbed linear algebraic equations[J]. *Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)*, 2022, 50(6): 8-14.

Event-triggered control for linear systems under actuator amplitude and rate constraints

Jia Jinze¹, Chen Yonggang^{2a,b}, Bai Yuanyuan^{2a}

(1. School of Management, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, China; 2. a. School of Mathematical Sciences; b. Henan Engineering and Technology Research Center of Digital Agriculture, Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang 453003, China)

Abstract: In traditional networked control systems, control tasks are usually executed in a periodic way. On the other hand, due to physical constraints or for security considerations, almost all feedback control systems are subject to saturation constraints. The existence of saturations is the main factor of system performance degradation and even instability. This paper investigates the event-triggered control problem for linear systems subject to saturation constraints of actuator amplitude and rate. Firstly, the first-order systems are utilized to represent the actuator amplitude and rate constraints. Then, two generalized sector conditions are introduced to deal with the dead-zone nonlinearities induced by saturations. Next, by utilizing Lyapunov stability theory, a sufficient condition is obtained to ensure the regional asymptotic stability of the closed-loop systems. The optimization problem of event-triggering rate is proposed by restricting the minimum range of the stability region. The result obtained in this paper is expressed by linear matrix inequalities, which can be conveniently solved by using the LMI toolbox in Matlab. Finally, numerical examples and simulations verify the effectiveness of the obtained result.

Keywords: linear systems; event-triggered control; amplitude constraints; rate constraint

[责任编辑 陈留院 赵晓华]