文章编号:1000-2367(2015)04-0001-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.04.001

一类多乘积优化问题求解的新方法

张永红,陈永强,毋晓迪

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:利用所考虑问题的结构特点,提出一种新的线性化方法.该方法利用函数的二阶导数信息,线性化过程更为直接.为改善算法收敛速度,提出一个新的区域缩减准则.理论上证明了算法的收敛性,数值算例表明算法是有效可行的.

关键词:全局优化;分支定界;线性松弛;多乘积约束;区域缩减

中图分类号:O221.2 **文献标志码**:A

本文考虑如下多乘积约束优化问题:

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}\min \prod_{i=1}^{k}(c_{i0}^{\mathrm{T}}x+d_{i0})\\ \text{s. t. } Ax\leq b,\\ \qquad \prod_{i=1}^{k}(c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij})\leq\beta_j,\ j=1,2,\cdots,p,\\ \qquad X^0=\{x\in\mathbf{R}^n \mid l^0\leq x\leq u^0\},\end{cases}
$$

其中 $k\geq 2$, $b\in\mathbf{R}^m$, $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $c_{ij}\in\mathbf{R}^n$, $d_{ij}\in\mathbf{R}$, $\beta_j\in\mathbf{R}$, $\beta_j>0$,且对于所有 $x\in X^0$,有 $c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij}\geq 0$, $i=1,2,\cdots,k$, $j=0,1,\cdots,p$.

由于在微观经济、金融优化等领域,线性多乘积问题有广泛应用,所以针对多乘积问题的求解,人们已经提出很多算法[1-6].但对于本文所考虑问题(P),求解方法 并不多.当问题(P)中目标函数是线性函数,且 $k=2$ 时,文献[7]提出了一种算法.文献[8]提出一种分支定界方法,该方法需要引进新变量.文献[9]给出一种区域删除准则与分支定界技巧相结合的方法.本文充分考虑问题的结构特点,利用函数的二阶导数信息,给出一种新的线性松弛化方法.在此基础上,构造了求解问题(P)的分支定界方法.与文献[7-9]方法相比,本文不需要引进新的变量,推广了他们所考虑问题的模型,并提出了一个新的区域缩减准则.理论上证明了算法的收敛性.数值算例也表明算法是有效可行的.

1 线性化技巧

利用对数函数性质知问题(P)等价于如下问题:

$$
(\mathrm{EP})\begin{cases}\min h_0(x)=\sum_{i=1}^{k}\ln(c_{i0}^{\mathrm{T}}x+d_{i0})\\ \text{s. t. } Ax\leq b,\\ \qquad h_j(x)=\sum_{i=1}^{k}\ln(c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij})\geq\ln\beta_j,\ j=1,\cdots,p,\\ \qquad X^0=\{x\in\mathbf{R}^n \mid l^0\leq x\leq u^0\}.\end{cases}
$$

收稿日期:2014-09-10;**修回日期**:2015-03-21.

基金项目:国家自然科学基金(U1404105;11171094);河南省科技攻关研究计划项目(142102210058);国家级科研项目培育基金(2013PL02);河南师范大学博士科研启动课题项目(qd12103);河南师范大学校级骨干教师培养项目;河南师范大学青年科学基金项目(2013qk02).

作者简介(通信作者):张永红(1977-),女,河南开封人,河南师范大学讲师,主要从事最优化理论方法及应用的研究,E-mail:zhangyonghong09@126.com.

显然问题(P) 与(EP) 具有相同的最优解，因此为求解问题(P)，可转化为求其等价问题(EP). 故以下仅考虑问题(EP) 的求解.

假定 $X=[\underline{x},\bar{x}]$ 表示初始盒子或由算法产生的子盒子. 为表述方便，引入以下记号：

$$x_{\mathrm{mid}}=\frac{1}{2}(\underline{x}+\bar{x}),\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n\end{pmatrix},C_j=\begin{pmatrix}c_{1j1} & c_{1j2} & \cdots & c_{1jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{kj1} & c_{kj2} & \cdots & c_{kjn}\end{pmatrix}.$$

为求解问题(EP)，本文提出一个分支定界算法. 该方法的关键是要为(EP) 在 X 上构造一线性松弛规划问题，其最优值可为(EP) 在 X 上的最优值提供下界. 为此我们提出一个新的线性松弛技巧，具体过程如下.

考虑约束函数 $h_j(x)=\sum_{i=1}^{k}\ln(c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij})$ $(j=0,1,\cdots,p)$. 利用对数函数性质，可得 $h_j(x)$ 的梯度及海森阵为

$$\nabla h_j(x)=\begin{pmatrix}\frac{c_{1j1}}{c_{1j}^{\mathrm{T}}x+d_{1j}}+\frac{c_{2j1}}{c_{2j}^{\mathrm{T}}x+d_{2j}}+\cdots+\frac{c_{kj1}}{c_{kj}^{\mathrm{T}}x+d_{kj}}\\ \vdots\\ \frac{c_{1jn}}{c_{1j}^{\mathrm{T}}x+d_{1j}}+\frac{c_{2jn}}{c_{2j}^{\mathrm{T}}x+d_{2j}}+\cdots+\frac{c_{kjn}}{c_{kj}^{\mathrm{T}}x+d_{kj}}\end{pmatrix}=(\frac{1}{c_{1j}^{\mathrm{T}}x+d_{1j}},\cdots,\frac{1}{c_{kj}^{\mathrm{T}}x+d_{kj}})C_j,$$

$$\nabla^2 h_j(x)=C_j^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\frac{-1}{(c_{1j}^{\mathrm{T}}x+d_{1j})^2},\cdots,\frac{-1}{(c_{kj}^{\mathrm{T}}x+d_{kj})^2})C_j.$$

由此可知，

$$\|\nabla^2 h_j(x)\|=\|C_j^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\frac{-1}{(c_{1j}^{\mathrm{T}}x+d_{1j})^2},\cdots,\frac{-1}{(c_{kj}^{\mathrm{T}}x+d_{kj})^2})C_j\|\leq\|C_j\|^2\max_{1\leq i\leq k}\frac{1}{(c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij})^2}.$$

记 $E_{ij}(x)=c_{ij}^{\mathrm{T}}x+d_{ij}=\sum_{t=1}^{n}c_{ijt}x_t+d_{ij},i=1,2,\cdots,k,\ j=0,1,\cdots,p.$

令$\underline{E}_{ij}$ 表示 $E_{ij}(x)$ 在 X 上的下界，则有$\underline{E}_{ij}=\sum_{t=1}^{n}\min\{c_{ijt}\underline{x}_t,c_{ijt}\bar{x}_t\}+d_{ij}$. 令 $\bar{\lambda}_j=\|C_j\|^2\max_{1\leq i\leq k}\frac{1}{\underline{E}_{ij}^2}+0.1$，则对所有 $x\in X$，有 $\|\nabla^2 h_j(x)\|<\bar{\lambda}_j$, $j=0,1,\cdots,p$. 由此可知，$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|x\|^2+h_j(x)$ 是一凸函数，于是 $h_j(x)$ 可表示为两个凸函数之差，即

$$h_j(x)=\phi_j(x)-\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|x\|^2,\tag{1}$$

其中 $\phi_j(x)=\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|x\|^2+h_j(x)$. 对于(1) 中的函数 $\phi_j(x)$，利用凸函数的性质，有

$$\phi_j(x)\geq\phi_j(x_{\mathrm{mid}})+\nabla\phi_j(x_{\mathrm{mid}})^{\mathrm{T}}(x-x_{\mathrm{mid}})=\phi_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}}).\tag{2}$$

另外，对于 $\forall x_t\in[\bar{x}_t,\bar{x}_t]$，易知$(\underline{x}_t+\bar{x}_t)x_t-\underline{x}_t\bar{x}_t\geq x_t^2$. 进而有$\sum_{t=1}^{n}((\underline{x}_t+\bar{x}_t)x_t-\underline{x}_t\bar{x}_t)\geq\|x\|^2$. 又因为 $\bar{\lambda}_j>0$，所以

$$\psi_j^u(x)=\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\sum_{t=1}^{n}((\underline{x}_t+\bar{x}_t)x_t-\underline{x}_t\bar{x}_t)\geq\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|x\|^2\tag{3}$$

由(1)、(2) 和(3) 可得

$$h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})=\phi_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})-\psi_j^u(x)\leq h_j(x).\tag{4}$$

另一方面，因为 $\|x\|^2$ 是一凸函数，所以有

$$\|x\|^2\leq 2x^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{mid}}-\|x_{\mathrm{mid}}\|^2=\psi^j l(x,X,x_{\mathrm{mid}}).\tag{5}$$

由(1) 和(5) 式及 $\bar{\lambda}_j>0$ 知

$$h_j(x)\leq\phi_j(x)-\frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\psi_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})=h_j^u(x,X,x_{\mathrm{mid}}).$$

综上有

$$h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}}) \le h_j(x) \le h_j^u(x,X,x_{\mathrm{mid}}).$$

由此可得问题(EP) 在 X 上的线性松弛规划问题

$$(\mathrm{LRP})\begin{cases}\min & h_0^l(x,X,x_{\mathrm{mid}}),\\ \mathrm{s.t.} & Ax \le b,\\ & h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}}) \le \ln \beta_j,\ j=1,2,\cdots,p,\\ & x\in X.\end{cases}$$

定理 1　对所有 $x\in X$，考虑函数 $h_j(x)$, $h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})$ 及 $h_j^u(x,X,x_{\mathrm{mid}})$, $j=0,1,\cdots,p$. 则有如下结论成立：

$$\lim_{\|\bar{x}-\underline{x}\|\to 0}\max_{x\in X}\Delta_j^1(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = \lim_{\|\bar{x}-\underline{x}\|\to 0}\max_{x\in X}\Delta_j^2(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = 0,$$

其中 $\Delta_j^1(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = h_j(x) - h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})$, $\Delta_j^2(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = h_j^u(x,X,x_{\mathrm{mid}}) - h_j(x)$.

证明　因为

$$\Delta_j^1(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = h_j(x) - h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}}) \le (\nabla h_j(\xi) - \nabla_j(x_{\mathrm{mid}}))^{\mathrm{T}}(x-x_{\mathrm{mid}}) + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\|\bar{x}-\underline{x}\|^2 \le$$

$$2\bar{\lambda}_j\|\xi - x_{\mathrm{mid}}\|\,\|x-x_{\mathrm{mid}}\| + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|\bar{x}-\underline{x}\|^2 \le \frac{5}{2}\bar{\lambda}_j\|\bar{x}-\underline{x}\|^2,$$

其中 ξ 是满足 $h_j(x) - h_j(x_{\mathrm{mid}}) = \nabla h_j(\xi)^{\mathrm{T}}(x-x_{\mathrm{mid}})$ 的常向量，所以有 $\lim\limits_{\|\bar{x}-\underline{x}\|\to 0}\max\limits_{x\in X}\Delta_j^1(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = 0$.

另一方面，因为

$$\Delta_j^2(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_j(\|x\|^2 - 2x^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{mid}} + \|x_{\mathrm{mid}}\|^2) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|x-x_{\mathrm{mid}}\|^2 \le \frac{1}{2}\bar{\lambda}_j\|\bar{x}-\underline{x}\|^2,$$

所以 $\lim\limits_{\|\bar{x}-\underline{x}\|}\max\limits_{x\in X}\Delta_j^2(x,X,x_{\mathrm{mid}}) = 0$，即证.

定理 1 说明随着盒子无限减小，$h_j^l(x,X,x_{\mathrm{mid}})$ 和 $h_j^u(x,X,x_{\mathrm{mid}})$ 可以无限逼近 $h_j(x)$.

为提高算法的收敛速度，本文提出一个区域缩减技巧，通过使用该技巧，可以删除一些不可能包含全局最优解的区域.

令 UB 分别表示问题(EP) 已知的当前最好上界，Z^* 表示问题(EP) 的最优值. 令 $X=[\underline{x},\bar{x}]$ 为 X^0 的任意子长方体. 令

$$\beta_t = (\nabla\phi_0(x_{\mathrm{mid}}))_t - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_0(\underline{x}+\bar{x}_t),\ t=1,2,\cdots,n,$$

$$T = \phi_0(x_{\mathrm{mid}}) - \nabla\phi_0(x_{\mathrm{mid}})^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{mid}} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_0\sum_{t=1}^{n}\underline{x}_t,\bar{x}_t.$$

定理 2　对任一矩形 $X=(X_t)_{n\times 1}\subseteq X^0$，其中 $X_t=[\underline{x}_t,\bar{x}_t]$. 令

$$\rho_s = UB - \sum_{t=1,t\ne s}^{n}\min\{\beta_t\underline{x}_t,\beta_t\bar{x}_t\} - T,\ s=1,2,\cdots,n.$$

如果存在某个指标 $s\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $\beta_s>0$ 且 $\rho_s<\beta_s\bar{x}_s$，则问题(EP) 在 X^1 上无全局最优解；如果存在某个指标 $s\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $\beta_s<0$ 且 $\rho_s<\beta_s\underline{x}_s$，则问题(EP) 在 X^2 上无全局最优解，其中

$$X^1 = (X_t^1)_{n\times 1}\subseteq X,\ \text{其中}\ X_t^1 = \begin{cases}X_t, & t\ne s,\\ \left(\dfrac{\rho_s}{\beta_s},\bar{x}_s\right]\cap X_t, & t=s,\end{cases}$$

$$X^2 = (X_t^2)_{n\times 1}\subseteq X,\ \text{其中}\ X_t^2 = \begin{cases}X_t, & t\ne s,\\ \left[\underline{x}_s,\dfrac{\rho_s}{\beta_s}\right)\cap X_t, & t=s.\end{cases}$$

证明　首先，证明对于所有 $x\in X^1$，有 $h_0(x)>UB$. 考虑 x 的第 s 个分量 x_s，显然有

$$\frac{\rho_s}{\beta_s} < x_s \le \bar{x}_s.$$

注意到 $\beta_s>0$，由 ρ_k 的定义及上述不等式可得

$$UB < \sum_{t=1,t\neq s}^{n} \min\{\beta_t \underline{x}_t, \beta_t \overline{x}_t\} + \beta_s x_s + T \leq \sum_{t=1}^{n} \beta_t x_t + \phi_0(x_{\text{mid}}) -$$

$$\nabla \phi_0(x_{\text{mid}})^{\mathrm{T}} x_{\text{mid}} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_0 \sum_{t=1}^{n} \underline{x}_t \overline{x}_t = h_0^l(x, X, x_{\text{mid}}).$$

对所有 $x \in X^1$，因为 $Z^* \leq UB < h_0^l(x, X, x_{\text{mid}}) \leq h_0(x)$，所以在 X^1 上不可能 有问题(EP) 的全局最优解.

对所有 $x \in X^2$，若存在某个 s 使得 $\beta_s < 0$ 且 $\rho_s < \beta_s \underline{x}_s$，类似讨论可知，在 X^2 上不可能有问题(EP) 的全局最优解.

2 算法及数值算例

在前文基础上，本节给出求解问题(EP) 的全局优化算法. 在算法中，假定在第 k 次迭代时，Q_k 表示由活动节点(即可能存在全局解的子长方体) 构成的集合. 对每一个节点 $X \in Q_k$，求解线性规划(LRP) 的最优值 $LB(X)$，令 (EP) 的全局最优值的下界为 $LB_k = \min\{LB(X), \forall X \in Q_k\}$. 对 $\forall X \in Q_k$，若(LRP) 的最优解对(EP) 是可行的，则更新(EP) 的上界(若需要). 选定一具有最大下界的活动节点，将其分成两部分，对每个新的节点求其相应的解，重复这一过程直到满足收敛条件为止.

下面给出算法的具体描述. 假定在第 k 次迭代中，LB_k，UB_k 分别表示(EP) 最优值的下界和上界.

步骤 0 选取 $\epsilon \geq 0$. 令 $Q_0 = \{X^0\}$，$UB_0 = \infty$. 利用区域缩减准则缩减盒子 X^0. 若 $X^0 \neq \phi$，求解问题 LRP(X^0)，设其最优解和最优值分别为 x^0 和 $LB(X^0)$. 令 $LB_0 = LB(X^0)$，若 x^0 是(EP) 的可行解，则算法停止，即 x^0 是原问题(P) 的最优解. 否则，若 $X^0 = \phi$，则算法停止，问题(P) 无解.

步骤 k $k \geq 1$.

步 $k1$ 置 $UB_k = UB_k - 1$. 沿 $X^k - 1$ 的最长边将其剖分为子矩形 $X^{k,1}$，$X^{k,2} \subseteq \mathbf{R}^n$. 令 $F = F \cup \{X^k - 1\}$.

步骤 $k2$ 对于子矩形 $X^{k,1}$ 和 $X^{k,2}$，利用区域缩减准则对其进行缩减. 确定问题(LRP) 在矩形 $X = X^{k,t}$ 的最优值 $LB(X^{k,t})$ 及最优解 $x^{k,t}$，其中 $t = 1,2$. 如果可能，则修正上界

$$UB_k = \min\{UB_k, h_0(x^{k,t})\},$$

并令 x^k 表示满足 $UB_k = h_0(x^{k,t})$ 的点.

步骤 $k3$ 如果 $UB_k \leq LB(X^{k,t})$，则令

$$F = F \cup \{X^{k,t}\}.$$

步骤 $k4$ 令

$$F = F \cup \{X \in Q_k - 1 \mid UB_k \leq LB(X)\}.$$

步骤 $k5$ 令

$$Q_k = \{X \mid X \in (Q_{k-1} \cup \{X^{k,1}, X^{k,2}\}), X \notin F\}.$$

步骤 $k6$ 置

$$LB_k = \min\{LB(X) \mid X \in Q_k\},$$

并令 $X^k \in Q_k$ 为满足 $LB_k = LB(X^k)$ 的矩形. 如果 $UB_k - LB_k \leq \epsilon$，则算法停止. x^k 是问题(P) 全局 ϵ 最优解. 否则，置 $k = k+1$，并转步骤 k.

下面定理给出了算法的全局收敛性.

定理 3 (a) 如果算法有限步终止，则当算法终止时，x^k 是问题(P) 的全局 ϵ 最优解.

(b) 如果算法无限步终止，则算法将产生一无穷可行解序列 $\{x^k\}$，该序列的任一聚点为问题(P) 的全局最优解.

证明 (a) 如果算法有限步终止，则算法必终止于某一步 $k(k \geq 0)$. 当算法终止时，有

$$UB_k - LB_k \leq \epsilon.$$

由步骤 0 和步骤 $k3(k \geq 1)$ 知，上式意味着

$$UB_k - f(x^k) \leq \epsilon.$$

记 v 为问题(P) 的最优值，则由前文知

$$UB_k \geq v.$$

因为 x^k 是问题(P) 的可行解，所以有

$$f(x^k) \leq v.$$

综上可知，

$$v \leq UB_k \leq f(x^k) + \epsilon \leq v + \epsilon.$$

从而有

$$v - \epsilon \leq f(x^k) \leq v,$$

即证结论(a) 成立.

(b) 当算法无限步终止时，令 $\{x^k\}$ 为算法产生一无穷可行解序列，设 x^* 是它的一个聚点. 由于 $\{x^k\}$ 是有界序列，所以存在子序列 $\{x^{k_q}\}$ 收敛到 x^*. 由算法知，UB_k 是单调减有界序列，LB_k 是单调增有界序列，所以

$$\lim_{k\to\infty} UB_k = \lim_{k_q\to\infty} UB_{k_q}, \lim_{k\to\infty} LB_k = \lim_{k_q\to\infty} LB_{k_q}.$$

不失一般性，假定序列 $\{x^{k_q}\}$ 对应的序列 $\{X^{k_q}\}$ 满足

$$X^{k_q+1} \subseteq X^{k_q},\ q = 1,2,\cdots.$$

由于矩形二分法是穷举的，所以有

$$\lim_{k_q\to\infty} X^{k_q} = x^*.$$

从而，根据定理 1 知，

$$\lim_{k\to\infty} UB_k = \lim_{k_q\to\infty} UB_{k_q} = \lim_{k\to\infty} LB_k = \lim_{k_q\to\infty} LB_{k_q} = h_0(x^*),$$

即 x^* 是问题(EP) 的全局最优解. 再由(EP) 和(P) 的等价性即知 x^* 也是问题(P) 的全局最优解.

为了验证本文方法的可行性，下面给出几个数值算例. 算法终止误差取 $\epsilon = 10^{-3}$，计算结果见表 1.

表 1　数值计算结果

算例	算法	最优解	最优值	迭代次数
例 1	文献 [7]	(2.0,1.0)	−13	3
	文献[9]	(2.0,1.0)	−13	23
	本文	(2.0,1.0)	−13	1
例 2	本文	(2.4998, 4.0002)	−18.9991	26
例 3	本文	(0.1, 0.5)	3.485	9
例 4	本文	(1.0, 1.0)	48	4

例 1[7,9]

$$\begin{aligned} &\min\quad -4x_1 - 5x_2, \\ &\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \geq 0, x_1^2 - x_2^2 \leq 3, x_1x_2 \leq 2, 0.1 \leq x_1 \leq 3.7,\ 0.1 \leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned} &\min\quad -6x_1 - x_2, \\ &\text{s.t.}\quad -2x_1 + x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 8, x_1x_2(x_1 + x_2) \leq 65, x_1x_2(2x_1 - x_2) \leq 10, \\ &\qquad\ 1 \leq x_1 \leq 2.5, 1 \leq x_2 \leq 4.2. \end{aligned}$$

例 3

$$\begin{aligned} &\min\quad (2x_1 + x_2 + 1)(0.5x_1 + 2x_2 + 1), \\ &\text{s.t.}\quad (x_1 + 2x_2 + 1)(2x_1 + 2x_2 + 1) \leq 2.5, \\ &\qquad\ (1.5x_1 + 2x_2 + 1)(2x_1 + 2x_2 + 1) \leq 2.5, \\ &\qquad\ 0.1 \leq x_1 \leq 3,\ 0.5 \leq x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

例 4

$$\begin{aligned} &\min\quad (x_1 + x_2 + 1)(2x_1 + x_2 + 1)(x_1 + 2x_2 + 1), \\ &\text{s.t.}\quad (x_1 + 2x_2 + 1)(2x_1 + 2x_2 + 2)(x_1 + x_2 + 1) \leq 80, \end{aligned}$$

$$1 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 \leq 3.$$

参 考 文 献

[1] Gao Y L, Xu C X, Yang Y J. An outcome-space finitealgorithm for solving linear multiplicative programming[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179: 494-505.

[2] Ryoo H S, Sahinidis N V. Global optimization ofmultiplicative programs[J]. Journal of Global Optimization, 2003, 26: 387-418.

[3] Benson H P, Boger G M. An outcome space, cutting planealgorithm for linear multiplicative programming[J]. Journal ofOptimization Theory and Application, 2000, 104: 301-322.

[4] Benson H P. An outcome space branch and bound-outer approximation algorithm for convexmultiplicative programming[J]. Journal of Global Optimization, 1999, 15: 315-342.

[5] Zhou X G, Wu K. A accelerating method for a class of multiplicative programming withexponent[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223: 975-982.

[6] Benson H P, Boger G M. Multiplicative programming problems: analysis and efficient pointsearch heuristic[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 94(2): 487-510.

[7] Kuno T, Konno H, Irie A. A deterministic approach tolinear programs with several additional multiplicativeConstraints[J]. Computational Optimization and applications, 1999, 14: 347-366.

[8] Benson H P. Decomposition branch and boundbased algorithm for linear programs with additional multiplicativeconstraints[J]. Journal of Theory and Applications, 2005, 126: 41-46.

[9] 申培萍,刘利敏,段运鹏.带多乘积约束的线性规划问题的求解新方法[J].河南师范大学学报:自然科学版,2007,35:209-211.

A New Method for Solving a Class of Multiplicative Programming

ZHANG Yonghong, CHEN Yongqiang, WU Xiaodi

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: By using the characteristics of the problem considered in this paper, a new linearization method is presented. This method utilizes the information of second derivative, which makes it more directly. Convergence of the algorithm is established and numerical results are given to show the feasibility and effectiveness.

Keywords: global optimization; branch and bound; linearrelaxation; multiplicative constraints; region reducing