文章编号:1000-2367(2023)02-0015-10 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.002

校庆优秀校友专栏:数学

一般随机变量的完全收敛及大数定律

苗雨[1],常萌萌[1,2]

(1.河南师范大学 数学与信息科学学院;大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室,河南 新乡 453007;
2.安阳工学院 数学与信息科学学院,河南 安阳 455000)

摘 要:通过包含并完善一些已有结论,建立了一般随机变量的完全收敛和大数定律.特别对于两两负象限相关的随机变量,得到了其完全收敛和 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律之间的等价结论.

关键词:完全收敛;强大数定律;随机变量

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$,随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$满足$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty$,则称序列$\{X_n, n \geq 1\}$完全收敛到$C$. 依据 Borel-Cantelli 引理,$\{X_n, n \geq 1\}$完全收敛到$C$可以推出$\{X_n, n \geq 1\}$几乎处处收敛到$C$. 文献[1]引入完全收敛的概念并证明独立同分布随机变量的算术平均值序列在方差有限的情况下完全收敛于期望值.文献[2]证明了相反的情况.Hsu-Robbins-Erdös 的结果是概率论中的一个基本定理并在多个方向上得到了推广.特别地,文献[3-4]得到如下结论:设$\{X, X_n, n \geq 1\}$是一列独立同分布的随机变量,$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$表示部分和,假设$\alpha p \geq 1, \alpha > \frac{1}{2}$,那么下列条件等价

(i) $p \geq 1, EX = 0$时有$E|X|^p < \infty$;

(ii)对任意的$\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}) < \infty; \tag{1}$$

(iii)对任意的$\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{k \leq n} |S_k| > \varepsilon n^{\alpha}) < \infty. \tag{2}$$

如果$\alpha p = 1$及$p \geq 1$,容易由(2)式得到 Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律

$$n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{3}$$

对于独立同分布的情形,当$1 \leq p < 2$时,(3)式等价于

$$E|X|^p < \infty. \tag{4}$$

对于相依的情况,(2)式可能强于(1)式.一般来说,证明(2)式的主要工具是极大矩不等式或指数不等式.但是对于两两负象限相依(P. NQD),负正交相依(NOD),扩展负相依(END)和线性负象限相依(LNQD)随机变量(概念和性质可在文献[5-8]中看到),不知道这些不等式是否成立.因此,一些研究人员研究了这些相依

收稿日期:2023-01-06;**修回日期**:2023-01-16.

基金项目:国家自然科学基金(NSFC-11971154).

作者简介(通信作者):苗雨(1979-),男,河南鹤壁人,河南师范大学教授,博士生导师,教育部新世纪优秀人才计划入选者,研究方向为概率论与数理统计,E-mail:yumiao728@gmail.com.

序列关于(2)或(3)式的特殊情况.文献[9]使用了文献[10]的方法并对两两独立同分布的情况给出了如下定理 A.

在陈述文献[9]的结果之前,需要介绍正则变化函数的概念,该概念可以在文献[11]中找到.如果对于 $A>0$ 及每个 $\lambda>0$,实值函数 $R(\cdot)$ 是$[A,\infty)$ 上一个正可测函数且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{R(\lambda x)}{R(x)}=\lambda^{\rho}$,则称该函数 $R(\cdot)$ 是以 ρ 为正则变化指标的正则函数.正则变化指标 $\rho=0$ 的正则函数称为缓慢变化函数.众所周知,函数 $R(\cdot)$ 是以 ρ 为正则变化指标的正则函数当且仅当它可以写成这样的形式 $R(x)=x^{\rho}L(x)$,此处,$L(\cdot)$ 是一个缓慢变化函数(参见文献[11]). BINGHAM 等在文献[12]的引理 1.3.2 中提到如果 $L(x)$ 是$[A,\infty)$ 上的一个缓慢变化函数,那么存在 $B\geq A$ 使得 $L(x)$ 在$[B,\infty)$ 的任意闭子区间$[a,b]$上有界(参见文献[13]).文献[14]证明对于任意的缓慢变化函数 $L(x)$,存在一个可微的定义在$[B,\infty)(B\geq A)$ 上的缓慢变化函数 $L_1(\cdot)$ 使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x)}{L_1(x)}=1 \text{ 且 } \lim_{x\to\infty}\frac{xL'_1(x)}{L_1(x)}=0.$$

因此,如果 $L(\cdot)$是一个正的可微函数并满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xL'(x)}{L(x)}=0, \tag{5}$$

则 $L(\cdot)$ 是一个缓慢变化函数.如果 $L(\cdot)$ 是一个满足(5) 式的可微的缓慢变化函数,那么通过直接计算可以得到(参见文献[15]),对任意的 $p>0$,存在 $B>0$,使得

$$\begin{aligned}&x^{p}L(x)\text{ 在}[B,\infty)\text{ 上严格单调递增,且}\lim_{x\to\infty}x^{p}L(x)\to\infty,\\&x^{-p}L(x)\text{ 在}[B,\infty)\text{ 上严格单调递减,且}\lim_{x\to\infty}x^{-p}L(x)\to 0.\end{aligned} \tag{6}$$

如果没有假设条件 $L(\cdot)$满足(5)式,那么仍然可以得到(参见文献[15]):

$$\lim_{x\to\infty}x^{p}L(x)\to\infty,\text{且}\lim_{x\to\infty}x^{-p}L(x)\to 0. \tag{7}$$

假设 $L(\cdot)$是一个缓慢变化函数,BINGHAM 等在文献[12]的定理 1.5.13 中证明存在一个缓慢变化函数 $\widetilde{L}(\cdot)$满足

$$\lim_{x\to\infty}L(x)\widetilde{L}(xL(x))=1 \text{ 且}\lim_{x\to\infty}\widetilde{L}(x)L(x\widetilde{L}(x))=1. \tag{8}$$

函数 $\widetilde{L}$ 称作 L 的 de Bruijin 共轭,$(L,\widetilde{L})$ 被称为(缓慢变化的) 共轭对.如果$(L,\widetilde{L})$ 是一个共轭对,则对于 $a,b,\alpha>0$,每个$(L(ax),\widetilde{L}(bx))$,$(aL(x),a^{-1}\widetilde{L}(x))$,$((L(x^{\alpha}))^{1/\alpha},(\widetilde{L}(x^{\alpha}))^{1/\alpha})$ 都是一个共轭对(参看文献[12]).文献[16] 证明对于一些 $\lambda_0>1$,如果 $L(\cdot)$ 是一个缓变函数并满足对任意的 $\alpha\in\mathbf{R}$,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(xL^{\alpha}(x))}{L(x)}=1. \tag{9}$$

因此,可以选择 $\widetilde{L}(x)=1/L(x)$.对于 $\alpha,\beta>0$,$f(x)=x^{\beta/\alpha}L^{1/\alpha}(x^{\beta})$,$g(x)=x^{\alpha/\beta}\widetilde{L}^{\beta}(x^{\alpha})$ 的情况,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(g(x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{g(f(x))}{x}=1. \tag{10}$$

在这里及之后,对于一个缓慢变化函数 $L(\cdot)$,用 $\widetilde{L}(\cdot)$ 表示 $L(\cdot)$ 的 de Bruijin 共轭.在不失一般性的前提下,假定 $L(x)$ 和 $\widetilde{L}(x)$ 都在$[0,\infty)$ 上有定义,并且对于某些 $A>0$,$L(x)$ 和 $\widetilde{L}(x)$ 在$[A,\infty)$ 上可微.

定理 A[9] 假设 $1\leq p<2$,$\{X,X_n,n\geq 1\}$ 是一个两两独立的随机变量序列,$L(\cdot)$ 是一个定义在$[0,\infty)$ 上的缓慢变化函数.当 $p=1$ 时,进一步假设 $L(x)\geq 1$,且 $L(\cdot)$ 在$[0,\infty)$ 上单调递增. 则如下结论等价.

(i)随机变量 X 满足

$$EX=0,E(|X|^{p}L^{p}(|X|))<\infty.$$

(ii)对于所有的 $\alpha\geq 1/p$ 及任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}P(\max_{k\leq n}|S_k|>\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha}))<\infty. \tag{11}$$

(iii)Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律成立:

$$\frac{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\xrightarrow{\text{a. s.}}0.$$

文献[17]将文献[9]中的结果从两两独立同分布随机变量扩展到相依随机序列.在本文中，想要研究具有正则变化常数的更一般的相依随机变量，并建立完全收敛性（见(11)式）.本文第 2 部分，在弱控制条件下（这个控制条件弱于文献[17]中的随机控制条件），给出了一般序列的完全收敛性，它可以推导出某些相依随机变量的完全收敛性.作为进一步的讨论，得到如同定理 A 形式的关于两两负象限相依随机变量的等价定理.本文第 2 部分给出相关引理并在第 3 部分给出了所有结果的证明.全文中，符号 C 表示一个每次出现时不一定是相同的正常数.

1　主要结论

在给出主要结论之前，需要先介绍一些控制条件.首先，如果对所有的 $x>0$ 和 $n\geq 1$，存在一个随机变量 X，使得

$$P(|X_n|>x)\leq P(|X|>x). \tag{12}$$

则称随机变量 $\{X_n,n\geq 1\}$ 被一个随机变量 X 一致控制.这种控制意味着弱控制（WD），弱是指控制是分布上的控制这一事实.文献[18]证明控制条件(12)等价于对所有的 $x>0$，$n\geq 1$ 以及一些常数 $C>0$，有

$$P(|X_n|>x)\leq CP(|X|>x). \tag{13}$$

在文献[19]中，介绍了弱均值控制（WMD）条件的概念.对所有的 $x>0$，$n\geq 1$ 以及一些常数 $C>0$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>x)\leq CP(|X|>x), \tag{14}$$

称随机变量 $\{X_n,n\geq 1\}$ 被随机变量 X 弱均值控制，此处 X 可以定义在另一个不同的空间上. 文献[20]证明(14)式等价于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>x)\leq P(|X|>x). \tag{15}$$

显然，如果 X 在 WD 意义上控制序列 $\{X_n,n\geq 1\}$，那么它在 WMD 意义上也控制序列 $\{X_n,n\geq 1\}$.此外，文献[19]给出了下面的例子来表明条件(14)比条件(12)弱.

例 1　假设对于 $k=1,2,\cdots,n-1$，序列 $\{X_{n,k},n\geq 1,k\geq 1\}$ 满足 $P(X_{n,k}=1)=P(X_{n,k}=-1)=\frac{1}{2}$，$P(X_{n,n}=\sqrt{n})=P(X_{n,n}=-\sqrt{n})=\frac{1}{2}$ 以及对于 $k>n$，$P(X_{n,k}=0)=1$，那么，对于序列 $\{X_{n,k}\}$，很明显没有一致控制的随机变量，而均值控制是可能的，因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(|X_{n,k}|>x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & 1\leq x<\sqrt{n}\text{ 时},\\ 0, & x\geq\sqrt{n}\text{ 时},\end{cases} \tag{16}$$

即如果均值控制随机变量 X 满足当 $k\geq 2$ 时，$P(|X|\geq\sqrt{k})=\frac{2}{k}$，则满足 WMD 条件.

现在重新考虑例 1，很容易发现对所有的 $l\geq 0$，$n\geq 1$，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=l+1}^{l+n}P(|X_{n,k}|>x)\leq\begin{cases}\frac{1}{n}, & 1\leq x<\sqrt{n}\text{ 时},\\ 0, & x\geq\sqrt{n}\text{ 时},\end{cases} \tag{17}$$

且对任意的 $x\geq 1$，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=l+1}^{l+n}P(|X_{n,k}|>x)\leq P(|X|>x). \tag{18}$$

因此，这个新的控制条件(18)比 WMD 条件强，但仍然比 WD 条件弱.

定理 1　假设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一个随机变量序列.在方差存在的前提下，假设对所有的 $l\geq 0$，$n\geq 1$ 以及所有的非降函数 f_i，$i\geq 1$，存在一个常数 C 使得

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=l+1}^{l+n}f_i(X_i)\Big)\leq C\sum_{i=l+1}^{l+n}\mathrm{Var}(f_i(X_i)). \tag{19}$$

令 $L(\cdot)$ 是一个定义在$[0,\infty)$上的缓慢变化函数.假设存在一个随机变量 X 使得序列$\{X_n,n\geq 1\}$满足条件(18),且对于一些 $1\leq p<2$,有 $E(|X|^p L^p(|X|))<\infty$.则对所有的 $\alpha\geq 1/p,\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=l}^{k}(X_i-EX_i)|>\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha}))<\infty. \tag{20}$$

注 1 有很多满足不等式(19)的相依序列.例如,WU[21]对于两两负象限相依随机变量序列;SHAO[22]对于负相依随机变量序列;UTEV 等[23]对于 ρ^*-混合随机变量序列;ASADIAN 等[24]对于负正交相依随机变量序列;SHEN[25]对于扩展负相依随机变量序列.所以定理 1 对这些随机变量序列都成立.

注 2 文献[17]在弱控制的条件下考虑定理 1,这个条件要比条件(18)强.

推论 1 在定理 1 的条件下,假设对所有 $i\geq 1$,$EX_i=0$.则有

$$\frac{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\xrightarrow{\text{a. s.}} 0. \tag{21}$$

下一个推论是定理 1 的特殊情况,取 $L(x)\equiv 1$.

推论 2 假设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一个满足不等式(19) 的随机变量序列.如果存在一个随机变量 X 使得 $\{X_n,n\geq 1\}$ 满足条件(18),以及对一些 $1\leq p<2$,有 $E|X|^p<\infty$.则对所有的 $\alpha\geq 1/p,\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=l}^{k}(X_i-EX_i)|>\varepsilon n^{\alpha})<\infty.$$

现在考虑由文献[5]引入的两两负象限相依序列.如果两个随机变量 X 和 Y 满足对所有的 $x,y\in\mathbf{R}$,

$$P(X\leq x,Y\leq y)\leq P(X\leq x)P(Y\leq y),$$

则称 X 和 Y 负象限相依.如果一个随机变量序列$\{X_n,n\geq 1\}$ 中的每一对随机变量都是负象限相依的,则这个序列被称作两两负象限相依序列.

推论 3 假设 $1\leq p<2$,$\{X,X_n,n\geq 1\}$ 是一个同分布的两两负象限相依的随机变量序列.假设 $L(\cdot)$ 是定义在$[0,\infty)$上的一个缓慢变化函数.当 $p=1$ 时,进一步假设 $L(x)\geq 1$ 且在$[0,\infty)$上单调递增,则如下结论等价.

(i)随机变量 X 满足 $EX=0$,$E(|X|^p L^p(|X|))<\infty$.

(ii)对所有的 $\alpha\geq 1/p,\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{k\leq n}|S_k|>\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha}))<\infty. \tag{22}$$

(iii)如下 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律成立:$\dfrac{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\xrightarrow{\text{a. s.}} 0$.

注 3 文献[17]考虑了 m-两两负相依随机变量并证明(i)可以推导出(ii),这是在 $m=1$ 且 $L(x)\equiv 1$ 的最优条件下,关于 m-两两负相依随机变量序列完全收敛性的第一个结果.因此,推论 3 是两两负象限相依随机变量完全收敛的第一个等价结果.

特别地,有如下结论.

推论 4 假设 $1\leq p<2$,$\{X,X_n,n\geq 1\}$ 是一个同分布的两两负象限相依的随机变量序列.则如下结论等价.

(i)随机变量 X 满足 $EX=0$,$E|X|^p<\infty$.

(ii)对所有的 $\alpha\geq 1/p,\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{k\leq n}|S_k|>\varepsilon n^{\alpha})<\infty. \tag{23}$$

(iii)如下 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律成立:$n^{-1/p}\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\xrightarrow{\text{a. s.}} 0$.

注 4 WU[21]研究了两两负象限相依序列,得到以下结果:如果 $\alpha p>1,1\leq p<2,E|X|^p<\infty$,$EX=0$,则(23) 式成立. WU[21]并没有考虑 $\alpha p=1$ 的情况,所以推论 3 改进了其结论.

2　相关引理

引理 1[9]　假设 $a,b>1$，$L(\cdot)$ 是一个定义在 $[0,\infty)$ 上可微的缓慢变化函数. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a^{k} L(b^{k}) \leq C a^{n} L(b^{n}).$$

引理 2[9]　假设 $p\geq 1$，$\alpha p\geq 1$，X 是一个随机变量.假设 $L(\cdot)$ 是一个定义在 $[0,\infty)$ 上可微的缓慢变化函数，$b_n=n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha})$，$n\geq 1$.假设对一些 $A>0$，$x^{1/\alpha}L^{1/\alpha}(x)$ 和 $x^{\alpha}\widetilde{L}(x^{\alpha})$ 在 $[A,\infty)$ 上严格单调递增. 则如下结论等价：

$$E(|X|^{p}L^{p}(|X|))<\infty, \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} P(|X|>b_n)<\infty, \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha p} P(b_{2^{n-1}}<|X|\leq b_{2^{n}})<\infty. \tag{26}$$

引理 3　假设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一个满足条件(18)的随机变量序列且被随机变量 X 控制.假设 $r>0$，对于一些 $A>0$，定义 $X'_i=X_i 1_{\{|X_i|\leq A\}}$，$X''_i=X_i 1_{\{|X_i|>A\}}$，$X'=X1_{\{|X|\leq A\}}$，$X''=X1_{\{|X|>A\}}$.则有对所有的 $l\geq 0$，$n\geq 1$，

(i)如果 $E|X|^{p}<\infty$，则 $n^{-1}\sum\limits_{k=l+1}^{l+n} E|X_k|^{p}\leq CE|X|^{p}$.

(ii) $n^{-1}\sum\limits_{k=l+1}^{l+n} E|X'_k|^{p}\leq C(E|X'|^{p}+A^{p}P(|X|>A))$.

(iii) $n^{-1}\sum\limits_{k=l+1}^{l+n} E|X''_k|^{p}\leq CE|X''|^{p}$.

证明　证明的方式与文献[26]中引理 3.1 相似，在此省略证明.

引理 4　对所有的 $\varepsilon>0$，(20)式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p-1)} P\Big(\max_{1\leq k<2^{n}}\Big|\sum_{i=l}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon 2^{n\alpha}\widetilde{L}(2^{n\alpha})\Big)<\infty. \tag{27}$$

证明　不失一般性，可以假设存在一个足够大的正整数 A 使得 $x^{\alpha}\widetilde{L}(x^{\alpha})$ 在 $[A,\infty)$ 上严格单调递增. 所以引理 4 可以通过如下两个不等式得到证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha})\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=2^{j}}^{2^{j+1}-1} n^{\alpha p-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>$$
$$\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha})\Big)\geq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=2^{j}}^{2^{j+1}-1} 2^{j(\alpha p-2)} P\Big(\max_{1\leq k<2^{j}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon (2^{j+1}-1)^{\alpha}\widetilde{L}((2^{j+1}-1)^{\alpha})\Big)\geq$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha p-1)} P\Big(\max_{1\leq k<2^{j}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon 2^{\alpha} 2^{j\alpha}\widetilde{L}(2^{j\alpha})\Big)$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha})\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=2^{j-1}}^{2^{j}-1} n^{\alpha p-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>$$
$$\varepsilon n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha})\Big)\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=2^{j-1}}^{2^{j}-1} 2^{j(\alpha p-1)}\frac{1}{2^{j-1}} P\Big(\max_{1\leq k<2^{j}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon 2^{(j-1)\alpha}\widetilde{L}((2^{j-1})^{\alpha})\Big)\leq$$
$$2\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\alpha p-1)} P\Big(\max_{1\leq k<2^{j}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)\Big|>\varepsilon 2^{-\alpha} 2^{j\alpha}\widetilde{L}(2^{j\alpha})\Big).$$

引理 5[27]　假设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间，$\{A_n,n\geq 1\}$ 是一系列事件.

(i)如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$，则 $P(A_n,i.o.)=0$；

(ii)如果 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$,且当 $k\neq m$ 时,$P(A_k\cap A_m)\leq P(A_k)P(A_m)$,则 $P(A_n,i.o.)=1$.

引理 6[5] 假设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一个两两负象限相关随机变量序列,$\{f_n,n\geq 1\}$ 是一系列单调递增的函数,则 $\{f_n(X_n),n\geq 1\}$ 是一个两两负象限相关随机变量序列.

引理 7[21] 假设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一个期望为 0 的两两负象限相关随机变量序列且 $EX_n^2<\infty$.则对任意的 $j\geq 0$,有 $E(\sum_{i=j+1}^{j+k} X_i)^2\leq C\sum_{i=j+1}^{j+k} EX_i{}^2$.

3 主要结论的证明

定理 1 的证明 根据缓慢变化函数的性质,可以假设存在一个足够大的正整数 A 使得对于 $p>1$,$x^{\alpha}\widetilde{L}(x^{\alpha})$,$x^{\frac{1}{\alpha}}L(x^{\frac{1}{\alpha}})$ 和 $x^{p-1}L^p(x)$ 在 $[A,\infty)$ 上单调递增.因为 $\{X_n{}^+,n\geq 1\}$ 和 $\{X_n{}^-,n\geq 1\}$ 满足定理的假设且 $X_n=X_n^+-X_n^-,n\geq 1$,不失一般性,可以假设对所有的 $n\geq 1$,$X_n\geq 0$.对于每个 $n\geq 1$ 及 $1\leq i\leq n$,定义:

$$b_n=\begin{cases} n^{\alpha}\widetilde{L}(A^{\alpha}),1\leq n<A, \\ n^{\alpha}\widetilde{L}(n^{\alpha}),n\geq A, \end{cases} \tag{28}$$

和 $X_{n,i}=X_iI(X_i\leq b_n)+b_nI(X_i>b_n)$.

很显然 $\{b_n,n\geq 1\}$ 在 $[0,\infty)$ 上单调递增.对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$P(\max_{1\leq k<2^n}|\sum_{i=1}^{k}(X_i-EX_i)|>\varepsilon b_{2^n})\leq P(\max_{1\leq k<2^n}X_k>b_{2^n})+$$
$$P(\max_{1\leq k<2^n}|\sum_{i=1}^{k}(X_{2^n,i}-EX_{2^n,i})|>\varepsilon b_{2^n}-\sum_{i=1}^{2^n}|EX_{2^n,i}-EX_i|). \tag{29}$$

因为 $\widetilde{L}(\cdot)$ 是一个缓变函数,则存在 $n_0\geq A$,对于 $n\geq n_0$,有

$$(\frac{3}{2})^{\alpha}b_{2^n}<b_{2^{n+1}}\leq 4^{\alpha}b_{2^n}. \tag{30}$$

根据不等式(30)、引理 2 和(18)式,有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}P(\max_{1\leq i<2^n}X_i>b_{2^n})\leq\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1}2^{n(\alpha p-2)}P(\max_{1\leq i<2^n}4^{\alpha}X_i>b_{2^{n+1}})\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1}j^{\alpha p-2}P(\max_{1\leq i\leq j}4^{\alpha}X_i>$$
$$b_j)=2\sum_{j=1}^{\infty}j^{\alpha p-2}P(\max_{1\leq i\leq j}4^{\alpha}X_i>b_j)\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}j^{\alpha p-1}j^{-1}\sum_{i=1}^{j}P(4^{\alpha}X_i>b_j)\leq C\sum_{j=1}^{\infty}j^{\alpha p-1}P(4^{\alpha}|X|>b_j)<\infty. \tag{31}$$

由(8)的第 2 部分、引理 3 以及 $E(|X|^pL^p(|X|))<\infty$,很容易得到

$$\frac{1}{b_{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n}|EX_{2^n,i}-EX_i|\leq\frac{1}{b_{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n}(b_{2^n}P(X_i>b_{2^n})+EX_iI(X_i>b_{2^n}))\leq C\frac{1}{b_{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n}EX_iI(X_i>$$
$$b_{2^n})\leq C\frac{2^n}{b_{2^n}}E|X|I(|X|>b_{2^n})\leq C\frac{2^n}{b_{2^n}}\frac{1}{b_{2^n}^{p-1}L(b_{2^n}^{p})}E|X|^pL^p(|X|)I(|X|>b_{2^n})\leq$$
$$C\frac{2^{n(1-\alpha p)}}{\widetilde{L}^p(2^{n\alpha})L^p(2^{n\alpha}\widetilde{L}^p(2^{n\alpha}))}E|X|^pL^p(|X|)I(|X|>b_{2^n})\leq$$
$$CE(|X|^pL^p(|X|))I(|X|>b_{2^n})\to 0. \tag{32}$$

因此,为得到(20)式,由不等式(29)至(32)及引理 4,只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}P(\max_{1\leq k<2^n}|\sum_{i=1}^{k}(X_{2^n,i}-EX_{2^n,i})|>\frac{\varepsilon}{2}b_{2^n})<\infty. \tag{33}$$

对每个 $m\geq 0$,令 $S_{m,0}=0$ 以及 $S_{m,k}=\sum_{i=1}^{k}(X_{2^m,i}-EX_{2^m,i}),k\geq 1$.

对于 $1\leq k<2^n$,$0\leq m\leq n$,假设 $j=[k/2^m]$ 是小于或等于 $k/2^m$ 的最大整数.则 $0\leq j<2^{n-m}$ 且 $j2^m\leq k<(j+1)2^m$.令 $k_m=j2^m$,则对每一个 $1\leq k<2^n$,有

$$S_{n,k}=\sum_{m=1}^{n}(S_{m-1,k_{m-1}}-S_{m-1,k_m})+\sum_{m=1}^{n}(S_{m,k}-S_{m-1,k}-S_{m,k_m}+S_{m-1,k_m}).\tag{34}$$

此处利用事实:$S_{0,k_0}=S_{0,k}$,$S_{n,k_n}=S_{n,0}=0$. 因为

$$|S_{m-1,k_{m-1}}-S_{m-1,k_m}|\leq\left|\sum_{i=k_m+1}^{k_{m-1}}(X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i})\right|\tag{35}$$

和

$$|S_{m,k}-S_{m-1,k}-S_{m,k_m}+S_{m-1,k_m}|\leq\left|\sum_{i=k_m+1}^{k_m+2^m}Y_{m,i}\right|+2\sum_{i=k_m+1}^{k_m+2^m}E|X_{2^m,i}-X_{2^{m-1},i}|,\tag{36}$$

此处 $Y_{m,i}=(X_{2^m,i}-X_{2^{m-1},i})-E(X_{2^m,i}-X_{2^{m-1},i})$,$m\geq1$,$i\geq1$. 由(34)~(36)式有

$$\max_{1\leq k<2^n}|S_{n,k}|\leq\sum_{m=1}^{n}\max_{0\leq j<2^{n-m}}\left|\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+(k_{m-1}-k_m)}(X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i})\right|+\sum_{m=1}^{n}\max_{0\leq j<2^{n-m}}\left|\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}Y_{i,m}\right|+$$
$$2\sum_{m=1}^{n}\max_{0\leq j<2^{n-m}}\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}E|X_{2^m,i}-X_{2^{m-1},i}|=:I_1+I_2+I_3.\tag{37}$$

根据引理 3,对于足够大的 m,可以得到

$$\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}E|X_{2^m,i}-X_{2^{m-1},i}|\leq\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}E(X_i+2b_{2^m})I(X_i>b_{2^{m-1}})\leq\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}E(X_i+2\cdot4^{\alpha}b_{2^{m-1}})I(X_i>$$
$$b_{2^{m-1}})\leq C\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^m}EX_iI(X_i>b_{2^{m-1}})\leq C2^mE|X|I(|X|>b_{2^{m-1}}).\tag{38}$$

同时,根据(32)式可以得到 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{2^mE|X|I(|X|>b_{2^{m-1}})}{b_{2^m}}\to0$,且可以由 Toeplitz's 引理得到结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}2^mE|X|I(|X|>b_{2^{m-1}})}{b_{2^n}}=0.\tag{39}$$

根据(38)和(39)式,得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_3}{b_{2^n}}=0$. 现在对任意的 $n\geq1$,$0\leq m\leq n$,假设 $r_{n,m}=2^{an}2^{bm}\widetilde{L}(2^{n\alpha})$,此处 a 和 b 是正常数且满足 $a+b=\alpha$ 和 $\dfrac{\alpha p}{2}<a<\alpha$,则有 $\sum\limits_{m=1}^{n}r_{n,m}=\sum\limits_{m=1}^{n}2^{an}2^{bm}\widetilde{L}(2^{n\alpha})\leq2^{an}\widetilde{L}(2^{n\alpha})2^{bn}\dfrac{2^b}{2^b-1}\leq C2^{\alpha n}\widetilde{L}(2^{n\alpha})=Cb_{2^n}$.

由 k_m 的定义,有 $k_{m-1}=k_m$ 或者 $k_{m-1}=k_m+2^{m-1}$.因此对于 I_1,由条件 $2a>\alpha p$ 和引理 3,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}P(I_1>\frac{\varepsilon}{4}b_{2^n})\leq\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}P(\max_{0\leq j<2^{n-m}}\left|\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+(k_{m-1}-k_m)}(X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i})\right|>Cr_{n,m})\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}E(\max_{0\leq j<2^{n-m}}\left|\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+(k_{m-1}-k_m)}(X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i})\right|^2)\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}E\left|\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+(k_{m-1}-k_m)}(X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i})\right|^2\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^{m-1}}E|X_{2^{m-1},i}-EX_{2^{m-1},i}|^2\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^{m-1}}E(X_{2^{m-1},i}{}^2)\leq C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^m+1}^{j2^m+2^{m-1}}(EX_i^2I(X_i\leq$$
$$b_{2^{m-1}})+b_{2^{m-1}}^2P(X_i>b_{2^{m-1}}))\leq C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}2^{m-1}(EX^2I(|X|\leq$$

$$b_{2^{m-1}})+b_{2^{m-1}}^{2}P(|X|>b_{2^{m-1}}))\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{m=1}^{n}2^{-2bm}(EX^{2}I(|X|\le b_{2^{m-1}})+b_{2^{m-1}}^{2}P(|X|>b_{2^{m-1}})).$$

另外,根据引理1和引理2,得到如下不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{m=1}^{n}2^{-2bm}EX^{2}I(|X|\le b_{2^{m-1}})\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{m=1}^{n}2^{-2bm}\sum_{k=1}^{m-1}EX^{2}I(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{k=1}^{n-1}2^{-2bk}b_{2^{k}}^{2}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2bk}b_{2^{k}}^{2}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\sum_{n=k+1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2bk}b_{2^{k}}^{2}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})2^{k(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{k\alpha})\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{\alpha pk}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})<\infty.$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{m=1}^{n}2^{-2bm}b_{2^{m-1}}^{2}\sum_{k=m}^{\infty}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{m=1}^{n}2^{-2bm}b_{2^{m-1}}^{2}(\sum_{k=m}^{n}+\sum_{k=n+1}^{\infty})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}2^{2(\alpha-b)m}\widetilde{L}^{2}(2^{m\alpha})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})+C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}2^{2(\alpha-b)m}\widetilde{L}^{2}(2^{m\alpha})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\le$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{k=1}^{n}2^{2(\alpha-b)k}\widetilde{L}^{2}(2^{k\alpha})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})+$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})\sum_{k=n}^{\infty}2^{2(\alpha-b)n}\widetilde{L}^{2}(2^{n\alpha})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}2^{2(\alpha-b)k}\widetilde{L}^{2}(2^{k\alpha})P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\sum_{n=k}^{\infty}2^{n(\alpha p-2\alpha)}\widetilde{L}^{-2}(2^{n\alpha})+$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})\sum_{n=1}^{k}2^{n\alpha p}\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{\alpha pk}P(b_{2^{k-1}}<|X|\le b_{2^{k}})<\infty,$$

这意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}P(I_{1}>\frac{\varepsilon}{4}b_{2^{n}})<\infty$.

对于 I_2,注意到 $E(\sum_{i=l+1}^{l+n}Y_{m,i})^{2}\le C\sum_{i=l+1}^{l+n}E(Y_{m,i}^{2})$,使用和 I_1 相同的证明方法,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}P(I_{2}>\frac{\varepsilon}{4}b_{2^{n}})\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}P(\max_{0\le j<2^{n-m}}|\sum_{i=j2^{m}+1}^{j2^{m}+2^{m}}Y_{m,i}|>Cr_{n,m})\le$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^{m}+1}^{j2^{m}+2^{m}}E(Y_{m,i}^{2})\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^{m}+1}^{j2^{m}+2^{m}}E(X_{2^{m},i}-X_{2^{m-1},i})^{2}\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\alpha p-1)}\sum_{m=1}^{n}r_{n,m}^{-2}\sum_{j=0}^{2^{n-m}-1}\sum_{i=j2^{m}+1}^{j2^{m}+2^{m}}(E(X_{2^{m},i}^{2})+E(X_{2^{m-1},i}^{2}))<\infty.$$

基于以上讨论,定理1的证明结束.

推论1的证明 取 $\alpha=1/p$ 并利用引理4,对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{1\le k<2^{n}}|\sum_{i=1}^{k}X_{i}|>\varepsilon 2^{n/p}\widetilde{L}(2^{n/p}))<\infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理,进一步得到 $\frac{1}{2^{n/p}\widetilde{L}(2^{n/p})}\max_{1\le k<2^{n}}|S_{k}|\xrightarrow{\text{a. s.}}0$. 通过利用 $\max_{2^{j-1}\le n<2^{j}}\frac{\max_{1\le k\le n}|S_{k}|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\le\frac{2^{1/p}\max_{1\le k\le 2^{j}}|S_{k}|}{2^{j/p}\widetilde{L}(2^{j/p})}$,得到 $\frac{1}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\max_{1\le k\le n}|S_{k}|\xrightarrow{\text{a. s.}}0$.

推论 3 的证明　通过引理 6 和引理 7，很容易发现两两负象限相关随机变量满足不等式(19)．则根据定理 1 和推论 1，只需证明(iii)⇒(i)．显然(iii)意味着

$$\frac{\max_{1\le k\le n}|X_k|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\le\frac{\max_{1\le k\le n}|S_k|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}+\frac{\max_{1\le k\le n}|S_{k-1}|}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\to 0\ \text{a. s.}$$

所以根据两两负象限相关的定义和引理 5，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p}))=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p}))<\infty,\tag{40}$$

根据引理 2，这个结论等价于 $E(|X|^pL^p(|X|))<\infty$．由(40)式有 $E|X|<\infty$．因为 $|X-EX|\le|X|+E|X|$ 和 $L(\cdot)$ 是可微的缓慢变化函数，(40)式进一步表明 $E(|X-EX|^pL^p(|X-EX|))<\infty$，由(i)⇒(iii)的证明，这个式子意味着 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}\to 0$ a. s.所以有 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}-\frac{n^{(p-1)/p}EX}{\widetilde{L}(n^{1/p})}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)}{n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p})}=0$ a. s. 和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{(p-1)/p}EX}{\widetilde{L}(n^{1/p})}=0\ \text{a. s.}\tag{41}$$

当 $1<p<2$ 时，根据(7)式，当 $n\to\infty$，有 $\frac{n^{(p-1)/p}}{\widetilde{L}(n^{1/p})}\to\infty$．根据(8)式，当 $p=1$ 时，有 $\frac{n^{(p-1)/p}}{\widetilde{L}(n^{1/p})}=\frac{1}{\widetilde{L}(n)}\sim L(n\widetilde{L}(n))\ge 1$．因此根据(41)式可以得到 $EX=0$．(iii)⇒(i)的证明完成．

参　考　文　献

[1]　HSU P L，ROBBINS H.Complete convergence and the law of large numbers[J].Proc Nat Acad Sci，1947，33：25-31.

[2]　ERDÖS P.On a theorem of Hsu and Robbins[J].Ann Math Statist，1949，20：286-291.

[3]　KATZ M.The probability in the tail of a distribution[J].Ann Math Statist，1963，34：312-318.

[4]　BAUM L E，KATZ M.Convergence rates in the law of large numbers[J].Trans Amer Math Soc，1965，120：108-123.

[5]　LEHMANN E L.Some concepts of dependence[J].Ann Math Statist，1966，37：1137-1153.

[6]　EBRAHIMI N，GHOSH M.Multivariate negative dependence[J].Comm Statist A-Theory Methods.1981，10(4)：307-337.

[7]　LIU L.Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails[J].Statist Probab Lett，2009，79(9)：1290-1298.

[8]　NEWMAN C M.Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables[J].Inequalities in statistics and probability，1984(2)：127-140.

[9]　THÀNH L V.On the Baum-Katz theorem for sequences of pairwise independent random variables with regularly varying normalizing constants[J].C R Math Acad Sci Paris，2020，358(11/12)：1231-1238.

[10]　RIO E.Vitesses de convergence dans la loi forte pour des suites dépendantes[J].C R Acad Sci Paris Sér I Math，1995，320(4)：469-474.

[11]　SENETA E. Regularly varying functions.Lecture Notes in Mathematics[M].New York：Springer-Verlag，1976.

[12]　BINGHAM N H，GOLDIE C M，TEUGELS J L.Regular variation[M].Cambridge：Cambridge University Press，1989.

[13]　SENETA E.An interpretation of some aspects of Karamata's theory of regular variation[J].Publ Inst Math，1973，15(29)：111-119.

[14]　GALAMBOS J，SENETA E.Regularly varying sequences[J].Proc Amer Math Soc，1973，41：110-116.

[15]　ANH V T N，HIEN N T T，THÀNH L V，et al.The Marcinkiewicz-Zygmund-type strong law of large numbers with general normalizing sequences[J].J Theoret Probab，2021，34(1)：331-348.

[16]　BOJANIC R，SENETA E.Slowly varying functions and asymptotic relations[J].J Math Anal Appl，1971，34(2)：302-315.

[17]　DZUNG N C，THÀNH L V.On the complete convergence for sequences of dependent random variables via stochastic domination conditions and regularly varying functions theory：10.48550/arXiv：2107.12690[P].2021-07-27.

[18]　ROSALSKY A，THÀNH L V，A note on the stochastic domination condition and uniform integrability with applications to the strong law of large numbers[J].Statist Probab Lett，2021，178：109181.

[19]　GUT A.Complete convergence for arrays[J].Period Math Hungar，1992，25(1)：51-75.

[20]　THÀNH L V.On a new concept of stochastic domination and the laws of large numbers[J/OL].[2022-09-16].https：//doi.org/10.1007/s11749-022-00827-w.

[21]　WU Q Y.Convergence properties of pairwise NQD random sequences[J].Acta Math Sinica(Chin Ser)，2002，45(3)：617-624.

[22] SHAO Q M.A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables[J].J Theoret Probab,2000,13(2):343-356.
[23] UTEV S,PELIGRAD M.Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables[J].J Theoret Probab,2003,16(1):101-115.
[24] ASADIAN N,FAKOOR V,BOZORGNIA A.Rosenthal's type inequalities for negatively orthant dependent random variables[J].J Iran Stat Soc,2006,5(1/2):66-75.
[25] SHEN A T.Probability inequalities for END sequence and their applications[J].J Inequal Appl,2011,2011:12.
[26] MIAO Y,YANG G Y,STOICA G.On the rate of convergence in the strong law of large numbers for martingales[J].Stochastics,2015,87(2):185-198.
[27] MATULA P.A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables[J].Statist Probab Lett,1992,15(3):209-213.

On the complete convergence and the strong law of large numbers for general random variables

Miao Yu[1], Chang Mengmeng[1,2]

(1. College of Mathematics and Information Science; Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Anyang Institute of Technology, Anyang 455000, China)

Abstract: In the paper, the complete convergence and the strong law of large numbers for general dependent random sequence are established, which include and improve some known results. In particular, the equivalence between complete convergence and Marcinkiewicz-Zygmund strong law of large numbers for the pairwise negatively quadrant dependent random variables is obtained.

Keywords: complete convergence; strong law of large numbers; random variables

[责任编校　陈留院　赵晓华]

本期优秀校友介绍

吴付科，华中科技大学教授，博士，博士生导师，博士毕业于华中科技大学数学与统计学院，曾在英国 Strathclyde 大学数学与统计系从事博士后研究，国家优秀青年基金获得者，入选教育部新世纪优秀人才支持计划.1998 年本科毕业于河南师范大学数学系，主要从事随机微分方程以及相关领域的研究，近年来主持 7 项国家自然科学基金.曾获得过美国数学学会交流项目(AMS：Ky and Yu-Fen Fan)和德意志对外交流文化中心支持基金(DAAD)的支持，2015 年获得湖北省自然科学二等奖，2017 年获得英国皇家学会“高级牛顿学者”基金.迄今为止，在 *SIAM* 系列杂志，*JDE*，*SPA* 等期刊发表论文 90 余篇，出版 1 部专著《随机微分方程》和 1 部译著《随机微分方程：导论与应用》，当前为 *IET Control Theory & Applications* 编委.

苗雨，河南师范大学教授，博士，博士生导师，科技处处长，河南省优秀青年科技专家.2001 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，研究领域是概率论与数理统计，主持 3 项国家自然科学基金(青年 1 项，面上 2 项).先后担任数学与信息科学学院院长，河南省应用统计学会理事长，河南省数学会副理事长，河南省统计学类教学指导委员会副主任委员，中国现场统计研究会经济与金融统计分会常务理事，中国商业统计学会常务理事等.入选教育部新世纪优秀人才支持计划，河南省科技创新杰出青年支持计划，河南省高校科技创新人才支持计划.国家一流本科专业建设点、河南省高校科技创新团队、河南省高等学校精品在线课程、河南省重点学科负责人.荣获河南省青年科技奖，河南省青少年科技创新奖，被中共河南省委，中共河南省委高校工委分别授予优秀共产党员称号.

李海刚，北京师范大学教授，博士，博士生导师.2003 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，主要从事材料科学中的偏微分方程理论研究，在复合材料中的 Babuška 问题、流－固模型的悬浮问题等方面取得一系列进展，已在 *Adv Math*，*ARMA*，*JMPA*，*JFA*，*AIHP-NL*，*SIMA*，*TAMS*，*CV&PDEs* 等国际权威数学杂志发表论文 30 余篇. 2016 年获得霍英东青年教师基金，2018 年获得教育部自然科学二等奖.入选 2020 年度教育部长江学者奖励计划青年学者.