第 43 卷　第 5 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 43　No. 5
2015 年 9 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Sept. 2015

文章编号:1000－2367(2015)05－0001－07　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.05.001

一类半空间上分数阶 Laplace 方程的 Liouville 定理

赵帅欣,李　静

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:首先研究了半空间上一类满足 Dirichlet 边值问题的分数阶 Laplace 方程与其对应的积分方程解的等价性;然后,基于两个方程解的等价性,运用积分形式的移动平面法证明了积分方程在全局可积条件下的正解的不存在性以及其在局部有界的条件下的 Liouville 型定理.

关键词: 格林函数;积分方程的移动平面法;不存在性;Liouville 型定理

中图分类号:O175.5　　**文献标志码**:A

分数阶微分方程是随着分数阶微积分理论的广泛应用逐步在国内外引起了广泛关注,成为很多数学研究者研究的热点.在实际中有着广泛的应用,一些从事微分方程有关理论的专家学者近来也开始转向微分方程基础理论研究.其中文献[1－2]都对分数阶微分方程的理论和方法做了系统的总结.现如今微分方程在量子力学、流体力学、弹性力学、磁流体力学以及反流体力学方面均有着广泛的应用[3－6].

分数阶拉普拉斯算子是定义在全空间的非局部算子,其定义形式为

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u(x)=C_{n,\alpha}P.V.\int_{\mathbf{R}^n}\frac{u(x)-u(z)}{|x-z|^{n+\alpha}}\mathrm{d}z, \tag{1}$$

其中$0<\alpha<2$,$P.V.$代表柯西主值.从形式上看分数阶拉普拉斯算子与拉普拉斯算子的区别,即当$\alpha=2$时,对于全空间中,拉普拉斯方程可以看成分数阶拉普拉斯方程的一个特例.本文的研究就是从以下研究中得到启发,对于积分方程

$$u(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{u(y)^{\frac{n+\alpha}{n-\alpha}}}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y,u(x)>0,\ x\in\mathbf{R}^n. \tag{2}$$

在文献[3]运用移动平面法解决了在临界情况 $p=\dfrac{n+\alpha}{n-\alpha}$ 下,关于此方程组解的分类问题,同时他们还证明了积分方程(2)与以下的半线性偏微分方程(3)等价.

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)=u(x)^p. \tag{3}$$

关于方程(2)在临界情况下解的性质,文献[7]运用一种不同于传统微分形式的积分形式的移动平面法予以解决.进一步的,关于方程(3)的解的性质在文献[8]中也有阐述.

受以上研究的启发,在本文中,我们来研究半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 中的一类满足 Dirichlet 边值问题的椭圆型方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2}u(x)=|x|^{\gamma}u^p(x),x\in\mathbf{R}_+^n,\\ u(x)\geq 0,\qquad x\in\mathbf{R}_+^n,\\ u(x)=0,\qquad x\in\mathbf{R}^n\backslash\mathbf{R}_+^n,\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\mathbf{R}_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid x_n>0\}$,$0<\alpha<2,\gamma>0$;与积分方程

$$u(x)=\int_{\mathbf{R}_+^n}G_\infty(x,y)\,|y|^{\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y, \tag{5}$$

收稿日期:2014-12-09;**修回日期**:2015-06-21.

基金项目:国家自然科学基金(11271111).

第 1 作者简介:赵帅欣(1991－),女,河南濮阳人,河南师范大学硕士研究生,主要从事几何分析的研究,E-mail:609498223@qq.com.

通信作者:李　静(1978－),女,河南安阳人,河南师范大学讲师,主要从事几何分析的研究,E-mail: htulijing@163.com.

其中 $G_{\infty}(x,y)=\frac{A_{n,\alpha}}{s^{\frac{n-\alpha}{2}}}[1-\frac{B_{n,\alpha}}{(s+t)^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{\frac{s}{t}}\frac{(s-tz)^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\alpha/2}(1+z)}\mathrm{d}z],x,y\in\mathbf{R}_+^n,s=|x-y|^2,t=4x_ny_n$.

本文将证明如下定理.

定理 1 假设 u 是(4)的一个局部有界的正解,则 u 也是积分方程(5)的一个正解,反之亦然.

定理 2 若 u 是积分方程 $u(x)=\int_{\mathbf{R}_+^n}G_{\infty}(x,y)\mid y\mid^{\gamma p}(y)\mathrm{d}y$ 的一个非负解,其中 $p>\frac{n}{n-\alpha}$, $|x|^{\gamma}u^{p-1}\in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n)$,那么 $u(x)\equiv 0$.

定理 3 若 $u(x)$ 是方程 $u(x)=\int_{\mathbf{R}_+^n}G_{\infty}(x,y)\mid y\mid^{\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y$ 的一个局部有界的非负解,其中 $\gamma>0,\frac{n}{n-\alpha}<p\leq\frac{n+\alpha+\gamma}{n-\alpha}$, $|x|^{\gamma}u^{p-1}\in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n),u\in L_{loc}^p(\mathbf{R}_+^n)$,那么 $u(x)\equiv 0$.

1 主要定义及引理

定义 1(Kelvin 变换) 设 $z^0\in\mathbf{R}^n$,称 $\overline{W}(x)=\frac{1}{|x-z^0|^{2-n}}W\left(\frac{x-z^0}{|x-z^0|^2}+z^0\right)$ 为 $W(x)$ 的 Kelvin 变换.

定义 2 给定 $f\in L_{loc}^1(\mathbf{R}^n),u\in L_{\alpha}$, $L_{\alpha}=\{u\in L_{loc}^1\mid\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+\alpha}}\mathrm{d}x<\infty$. 对于方程 $(-\Delta)^{\alpha/2}u=f(x),x\in\mathbf{R}^n$,当且仅当 $\int_{\mathbf{R}^n}u(-\Delta)^{\alpha/2}\phi\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x,\forall\phi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$,称 u 是方程分布意义下的解.

引理 1(Hölder 不等式) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$f(x)\geq 0,g(x)\geq 0,f(x)\in L^P(\Omega),g(x)\in L^q(\Omega),p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则有:$\int_{\Omega}f(x)g(x)\mathrm{d}\mu<(\int_{\Omega}f(x)^p\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_{\Omega}g(x)^q\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$.

引理 2(推广的 Hölder 不等式) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$f(x)\geq 0,g(x)\geq 0,f(x)\in L^P(\Omega),g(x)\in L^q(\Omega),1<p<r<q,\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$,有 $(\int_{\Omega}(f(x)g(x))^r\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{r}}<(\int_{\Omega}f(x)^p\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_{\Omega}(x)^q\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$.

引理 3(Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的等价形式) 设 $0<\alpha<n,g\in L^{\frac{np}{n+\alpha p}}$,若 $\frac{n}{n-\alpha}<p<\infty$,定义 $Tg(x)=\int_{\mathbf{R}_n}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}g(y)\mathrm{d}y$,那么 $\|Tg\|_{L^p}<C\|g\|_{L^{n\frac{np}{n+\alpha p}}}$.

引理 4[9] 假设 w 是方程的一个非负解,

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2}w(x)=0,x\in\mathbf{R}_+^n,\\ w(x)=0,\qquad x\in\mathbf{R}^n\backslash\mathbf{R}_+^n.\end{cases}$$

且存在一个常数 $c>0$,对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}_+^n$,都有 $\frac{w(y)}{(y_n)^{\alpha/2}}\geq c\frac{w(x)}{(x_n)^{\alpha/2}}$. 因此,可以得到要么 $w(x)\equiv 0,x\in\mathbf{R}^n$,要么存在存在一个常数 $a>0$,满足 $w(x)\geq a(x_n)^{\alpha/2},\forall x\in\mathbf{R}_+^n$.

引理 5[10] 假定 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开区域,f 是 Ω 闭包上的下半连续函数,满足:

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2}f\geq 0,x\in\Omega,\\ f\geq 0,\qquad x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega.\end{cases}$$

可以得到 $f\geq 0,x\in\mathbf{R}^n$;并且,若在 Ω 中存在一点 x,使得 $f(x)=0$,则在 $\mathbf{R}^n$ 中 $f(x)\equiv 0$.

引理 6[10] 在 Ω 中,如果 $u\in L_{\alpha}$ 且 $(-\Delta)^{\alpha/2}u\geq 0$,可以得到 u 是 Ω 上的下半连续函数.

在介绍下面引理前首先引入一些记号,设 λ 是大于 0 的实数,移动平面:$T_{\lambda}=\{x\in\mathbf{R}_+^n\mid x_n=\lambda\}$. 用 $\sum_{\lambda}$ 代表位于 $x_n=0$ 与 $x_n=\lambda$ 之间的区域,也就是说 $\sum_{\lambda}=\{x=(x_1,\cdots,x_n-1,x_n)\in\mathbf{R}_+^n\mid 0<x_n<\lambda\}$,同时设 $x^{\lambda}=(x_1,\cdots,x_{n-1},2\lambda-x_n)$ 为 $x=(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n)$ 关于平面 T_{λ} 的对称点. 记 $\sum_{\lambda}^{c}=\mathbf{R}_+^n\backslash\sum_{\lambda}$ 是 $\sum_{\lambda}$ 的补集,同时引入新函数 $u_{\lambda}(x)=u(x^{\lambda}),w_{\lambda}(x)=u_{\lambda}(x)-u(x)$.

引理 7 (i) 对于任意的 $x, y \in \sum_\lambda$，且 $x \neq y$，有：$G_\infty(x^\lambda, y^\lambda) > \max\{G_\infty(x^\lambda, y), G_\infty(x, y^\lambda)\}$ 和 $G_\infty(x^\lambda, y^\lambda) - G_\infty(x, y) > | G_\infty(x^\lambda, y) - G_\infty(x, y^\lambda) |$. (ii) 对于任意的 $x \in \sum_\lambda$，$y \in \sum_\lambda^c$，下式成立：$G_\infty(x^\lambda, y) > G_\infty(x, y)$.

引理 8 对于任意的 $x \in \sum_\lambda$，可以得到：$u(x) - u_\lambda(x) \leq \int_{\sum_\lambda} (G_\infty(x^\lambda, y^\lambda) - G_\infty(x, y^\lambda))(| y |^\lambda u^p(y) - | y^\lambda |^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y$.

2 主要结果

定理 1 假设 u 是(4)的一个局部有界的正解，$u \in L_\alpha$，则 u 也是积分方程(5)的一个正解，反之亦然.

证明 假定 u 是(4)的一个正解，首先表明：$\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y < \infty$. 引进一个函数：$v_R(x) = \int_{B_R(P_R)} G_R(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y$，其中，$G_R(x, y)$ 是球 $B_R(P_R)$ 上的格林函数，$P_R = (0, \cdots, 0, R)$.

从对 u 的假设是局部有界的定义可以得到，对于任意的 $R > 0$，$v_R(x)$ 是连续的且

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2} v_R(x) = | x |^\gamma u^p(x), x \in B_R(P_R), \\ v_R(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \backslash B_R(P_R).\end{cases}$$

$w_R(x) = u(x) - v_R(x)$，即有：

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2} w_R(x) = 0, x \in B_R(P_R), \\ w_R(x) \geq 0, x \in R^n \backslash B_R(P_R).\end{cases}$$

由引理(5)和引理(6)，可以得到 $w_R(x) \geq 0, \forall x \in B_R(P_R)$.

接下来令 $R \to \infty$，得到 $u(x) \geq \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y$.

引入函数 $v(x)$：$v(x) = \int_{R_+^n} G_\infty(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y$，即有：

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2} v(x) = | x |^\gamma u^p(x), x \in \mathbf{R}R\mathbf{R}_+^n, \\ v(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{R}_+^n.\end{cases}$$

$w(x) = u(x) - v(x)$，可以得到

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\alpha/2} w(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^n, \\ w(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}_+^n, \\ w(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{R}_+^n.\end{cases}$$

由引理(4)，可以得到：$w(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}^n$，否则存在一个常数 $a > 0$，满足：$w(x) \geq a(x_n)^{\alpha/2}, \forall x \in R_+^n$. 假设，在这里有 $u(x) = w(x) + v(x) \geq w(x) \geq a(x_n)^{\alpha/2}$.

再次定义一些符号 $x = (x', x_n)$，$y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times (0, +\infty)$，$r^2 = | x' - y' |^2$，$a^2 = | x_n - y_n |^2$，固定 x，当 R 充分大，可以得到：

$$u(x) \geq v(x) = \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y \geq c\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x, y) \mid y_n \mid^\gamma (y_n^{\alpha/2})^p \mathrm{d}y \geq c\int_{\mathbf{R}_+^n \backslash B_R(0)} \frac{y_n^{\frac{\alpha(p+1+2\gamma)}{2}}}{| x - y |^n}\mathrm{d}y \geq$$
$$c\int_R^\infty y_n^{\frac{\alpha(p+1+2\gamma)}{2}} \int_R^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2 + a^2)^{n/2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}y_n = c\int_R^\infty y_n^{\frac{\alpha(p+1+2\gamma)}{2}} \mid x_n - y_n \mid^2 \int_{R\backslash a}^\infty \frac{t^{n-2}}{(t^2 + 1)^{n/2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y_n \geq \int_R^\infty y_n^{\frac{\alpha(p+5+2\gamma)}{2}}\mathrm{d}y_n = \infty. \tag{6}$$

明显地可以看出这与 u 的局部有界性矛盾，因此得出 $w \equiv 0$. 即有：

$$u(x) = v(x) = \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x, y) \mid y \mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y.$$

反过来，若 $u(x)$ 是积分方程的一个正解，则对于任意的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$，有

$$< (-\Delta)^{\alpha/2}u,\phi > = < u(x),(-\Delta)^{\alpha/2}\phi > = < \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y) \mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y,(-\Delta)^{\alpha/2}\phi > =$$
$$\int_{\mathbf{R}_+^n}\{\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y) \mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y\}(-\Delta)^{\alpha/2}\phi(x)\mathrm{d}x =$$
$$\int_{\mathbf{R}_+^n}\{\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y)(-\Delta)^{\alpha/2}\phi(x)\mathrm{d}x\} \mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\mathbf{R}_+^n}\{\int_{\mathbf{R}_+^n} (-\Delta)^{\alpha/2}G_\infty(x,y)\phi(x)\mathrm{d}x\} \mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\mathbf{R}_+^n}\{\int_{\mathbf{R}_+^n} \delta(x-y)\phi(x)\mathrm{d}x\} \mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\mathbf{R}_+^n} \mid y\mid^\gamma u^p(y)\phi(y)\mathrm{d}y = <\mid y\mid^\gamma u^p,\phi>. \tag{7}$$

因此，u 也是(4) 的一个正解.

到此完成了微分方程与积分方程解的等价性的证明.

定理 2 若 u 是积分方程 $u(x)=\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y)\mid y\mid^\gamma u^p(y)\mathrm{d}y$ 的一个非负解，其中 $p>\frac{n}{n-\alpha}$，$u\in L_\alpha$，$\mid x\mid^\gamma u^{p-1}\in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n)$，那么 $u(x)\equiv 0$.

证明 由引理 5 可知，不失一般性，假定在 $\mathbf{R}_+^n$ 中，$u(x)>0$. 接下来将用积分形式的移动平面法分两步证明此定理，第一步确定移动的起点，即当 $\lambda>0$ 充分小、$\forall x\in\sum_\lambda$，$w_\lambda\geq o$；第二步在 x_n 的方向上继续移动 T_λ，导出矛盾.

步骤 1 定义 $\sum_\lambda^- = \{x\in\sum_\lambda \mid w_\lambda(x)<0\}$，对于 $\forall x\in\sum_\lambda^-$，

$$0<u(x)-u_\lambda(x)\leq\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)-G_\infty(x,y^\lambda))(\mid y\mid^\gamma u^p(y)-\mid y^\lambda\mid^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\sum_\lambda^-}(G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)-G_\infty(x,y^\lambda))(\mid y\mid^\gamma u^p(y)-\mid y^\lambda\mid^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y +$$
$$\int_{\sum_\lambda\setminus\sum_\lambda^-}(G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)-G_\infty(x,y^\lambda))(\mid y\mid^\gamma u^p(y)-\mid y^\lambda\mid^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y \leq$$
$$\int_{\sum_\lambda^-}(G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)-G_\infty(x,y^\lambda))(\mid y\mid^\gamma u^p(y)-\mid y^\lambda\mid^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y \leq$$
$$\int_{\sum_\lambda^-}G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)(\mid y\mid^\gamma u^p(y)-\mid y^\lambda\mid^\gamma u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y \leq$$
$$\int_{\sum_\lambda^-}G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)\mid y\mid^\gamma(u^p(y)-u_\lambda^p(y))\mathrm{d}y =$$
$$p\int_{\sum_\lambda^-}G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)\mid y\mid^\gamma\psi_\lambda^{p-1}(y)(u(y)-u_\lambda(y))\mathrm{d}y, \tag{8}$$

其中因为 $\forall x\in\sum_\lambda^-$，有 $0\leq u_\lambda(y)\leq\psi_\lambda(y)\leq u(y)$. 从格林函数的定义中，很容易得到：$G_\infty(x,y)\leq\frac{A}{\mid x-y\mid^{n-\alpha}}$，那么(8) 可以写成：

$$0<u(x)-u_\lambda(x)\leq\int_{\sum_\lambda^-}\frac{C}{\mid x-y\mid^{n-\alpha}}\mid y\mid^\gamma u^{p-1}(y)(u(y)-u(y))\mathrm{d}y.$$

运用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的等价形式和 Hölder 不等式，可以得出对于 $\forall q>\frac{n}{n-\alpha}$，

$$\| w_\lambda \|_{L^q(\sum_\lambda^-)}\leq C\| \mid y\mid^\gamma u^{p-1}(y)w_\lambda\|_{L^{\frac{nq}{n+\alpha q}}(\sum_\lambda^-)}\leq C\| \mid y\mid^\gamma u^{p-1}(y)\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\sum_\lambda^-)}\| w_\lambda\|_{L^q(\sum_\lambda^-)}, \tag{9}$$

其中 $q=\frac{n(p-1)}{\alpha}$，由于 $p>\frac{n}{n-\alpha}$，可以直接算出 $q>\frac{n}{n-\alpha}$ 和 $w_\lambda\in L^q(\mathbf{R}_+^n)$.

因为 $\mid x\mid^\gamma u^{p-1}\in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n)$，所以当 $\lambda>0$ 充分小的时候，可以得到：

$$C\| \mid y\mid^\gamma u^{p-1}(y)\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\sum_\lambda^-)}\leq\frac{1}{2}. \tag{10}$$

通过(9)和(10)可以得出 $\| w_\lambda \|_{L^q(\sum_\lambda^-)} \equiv 0$，即 $\sum_\lambda^-$ 的测度为 0，当 λ 充分小的时候，$w_\lambda \geq 0$，因此找到了移动的起点.

步骤 2 第一步已经找到了移动的起点，现在可以在保证 $w_\lambda \geq 0$ 成立的前提下，在 x_n 的方向上继续移动平面 T_λ，直至极限位置. 定义：$\lambda_0 = \sup\{\lambda > 0 \mid w_\mu(x) \geq 0, 0 < \mu \leq, \forall x \in \sum_\mu\}$. 下面证 $\lambda = +\infty$.

(反证法) 假定 $\lambda < +\infty$，将证明 $u(x)$ 关于 T_{λ_0} 对称，即有

$$w_{\lambda_0} \equiv v0, \text{a.e. } \forall x \in \sum\nolimits_{\lambda_0}. \tag{11}$$

假定(11)不成立，即存在 $x \in \sum_{\lambda_0}$，使得 $w_{\lambda_0} \geq 0$. 接下了 T_λ 可以继续向右移动，也就是说存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意的 $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$，都可以保证对于 $\forall x \in \sum_\lambda, w_{\lambda_0} \geq 0$ 成立.

要证明这个成立，重复步骤一的证明，只需要保证当 ε 充分小时，对于所有的 $\lambda \in \varepsilon[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$，

$$c\Big[\int_{\sum_\lambda^-} (\,|\, y \,|^{\gamma p-1}(y))^{\frac{n}{\alpha}} \mathrm{d}y\Big]^{\frac{\alpha}{n}} \leq \frac{1}{2}.$$

显然上式是可以保证的，所以得出 $\| w_\lambda \|_{L^q(\sum_\lambda^-)} \equiv 0$. 即证明了(11)，但这与 λ_0 的定义是矛盾的，因此 $u(x)$ 关于 T_{λ_0} 对称的.

由(11)可以得到，当 $x_n = 2\lambda_0$ 时，$u(x) = 0$，这与假设在 $\mathbf{R}_+^n$ 上 $u > 0$ 矛盾. 因此证明了 $\lambda = +\infty$.

到此证明了积分方程的正解沿 x_n 的方向是单调递增的，这与 $|\, x \,|^\gamma u^{p-1} \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n)$ 矛盾，因此正解是不存在的，$u \equiv 0$.

定理 2 证明完毕.

定理 3 若 $u(x)$ 是方程 $u(x) = \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y) \,|\, y \,|^\gamma u^p(y) \mathrm{d}y$ 的一个局部有界的非负解，其中 $\gamma > 0$，$\frac{n}{n-\alpha} < p \leq \frac{n+\alpha+\gamma}{n-\alpha}$，$|\, x \,|^\gamma u^{p-1} \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}_+^n)$，$u \in L_{loc}^p(\mathbf{R}_+^n)$，$p > \frac{n}{n-\alpha}$，那么 $u(x) \equiv 0$.

证明 由于在这里没有 $u(x)$ 的全局可积性，以至于没有办法对 $u(x)$ 直接运用移动平面法，为了克服这个困难，需要借助于 Kelvin 变换.

做 $u(x)$ 的 Kelvin 变换，

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{1}{|\, x \,|^{n-\alpha}} u\Big(\frac{x}{|\, x \,|^2}\Big) = \frac{1}{|\, x \,|^{n-\alpha}} \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty\Big(\frac{x}{|\, x \,|^2}, y\Big) \,|\, y \,|^\gamma u^p(y) \mathrm{d}y = \\
&\frac{1}{|\, x \,|^{n-\alpha}} \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty\Big(\frac{x}{|\, x \,|^2}, \frac{y}{|\, y \,|^2}\Big) \,\Big|\, \frac{y}{|\, y \,|^2} \,\Big|^{\gamma-2n} u^p\Big(\frac{y}{|\, y \,|^2}\Big) \mathrm{d}y = \\
&\int_{\mathbf{R}_+^n} \frac{G_\infty\Big(\frac{x}{|\, x \,|^2}, \frac{y}{|\, y \,|^2}\Big)}{|\, x \,|^{n-\alpha} \,|\, y \,|^{n-\alpha} \,|\, y \,|^{n-\alpha}} \,|\, y \,|^{-\gamma} \frac{1}{|\, y \,|^{n-\alpha}} u\Big(\frac{y}{|\, y \,|^2}\Big)\Big)^p \frac{1}{|\, y \,|^{n+\alpha-p(n-\alpha)}} \mathrm{d}y = \\
&\int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y) v^p(y) \frac{1}{|\, y \,|^{n+\alpha-p(n-\alpha)+\gamma}} \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}_+^n} G_\infty(x,y) v^p(y) \frac{1}{|\, y \,|^\beta},
\end{aligned} \tag{12}$$

其中因为 $\frac{n}{n-\alpha} < p \leq \frac{n+\alpha+\gamma}{n-\alpha}$，所以 $\beta = n + \alpha - p(n-\alpha) + \gamma > 0$；因为 $u(x) \in L_{loc}^p$，所以对于任意远离 O 点的区域 Ω，$\int_\Omega v(x)^p \mathrm{d}x < \infty$. 之后的文章中均对 $v(x)$ 运用移动平面法. 下面引入几个后面文章中需用到的记号，设 λ 是一个实数，移动平面 $T_\lambda = \{x \in \mathbf{R}_+^n \mid x_1 = \lambda\}$. 用 $\sum_\lambda$ 代表位于平面 $x_1 = \lambda$ 左侧的区域，也就是说 $\sum_\lambda = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n \mid x_1 < \lambda\}$，同时设 $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于平面 T_λ 的对称点.

同时还要引入一些新的函数：$v_\lambda(x) = v(x^\lambda)$，$w_\lambda(x) = v_\lambda(x) - v(x)$. 通过 $G_\infty(x,y)$ 的表达式，可以很容易得出对于 $x, y \in \sum_\lambda$，$x \neq y$，$G_\infty(x,y) = G_\infty(x^\lambda, y^\lambda)$，$G_\infty(x^\lambda, y) = G_\infty(x, y^\lambda)$，$G_\infty(x^\lambda, y^\lambda) > G_\infty(x, y^\lambda)$.

从积分方程(12)，容易得出：

$$v(x)=\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x,y)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda^C}G_\infty(x,y)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y=$$
$$\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x,y)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x,y^\lambda)\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v^p(y^\lambda)\mathrm{d}y=$$
$$\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x,y)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x^\lambda,y)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y^\lambda)\mathrm{d}y;$$

用 x^λ 替换 x 可得到：$v_\lambda(x)=\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x^\lambda)\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda}G_\infty(x^\lambda,y^\lambda)\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v^p(y^\lambda)\mathrm{d}y.$

由此可以得到：

$$v(x)-v_\lambda(x)=\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x^\lambda,y)-$$
$$G_\infty(x^\lambda,y^\lambda))\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v^p(y^\lambda)\mathrm{d}y=\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))(\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)-\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v^p(y^\lambda))\mathrm{d}y.$$

接下来运用移动平面法来证明定理 3.

证明主要分为 3 步，在第 1 步中证明当 λ 充分负时，有 $w_\lambda(x)=v_\lambda(x)-v(x)\geq 0,a.e.\ \forall x\in\sum_\lambda$，在第 2 步中推出 T_λ 可以一直向右移动至原点处，并得出 $w_\lambda(x)\equiv 0$. 在第 3 步中回归微分方程(4)，利用方程组正解的对称性，证明方程的 Liouville 型定理.

步骤 1 定义 $\sum_\lambda^-=\{x\in\sum_\lambda^-\backslash B_\varepsilon(O^\lambda)\mid w_\lambda(x)<0\}$，这里 O^λ 代表 O 关于平面 T_λ 的对称点. 我们证明对于充分负的 λ，$\sum_\lambda^-$ 均为零测度集. 事实上，利用微分中值定理，可以得到对于 $\forall x\in\sum_\lambda^-$，

$$0<v(x)-v_\lambda(x)=\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))(\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)-\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v_\lambda^p(y))\mathrm{d}y=$$
$$\int_{\sum_\lambda}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))(\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)-\frac{1}{|y|^\beta}v_\lambda^p(y))\mathrm{d}y+\int_{\sum_\lambda\backslash\sum_\lambda^-}(G_\infty(x,y)-$$
$$G_\infty(x^\lambda,y))(\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)-\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v^p(y))\mathrm{d}y\leq\int_{\sum_\lambda^-}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))(\frac{1}{|y|^\beta}v^p(y)-$$
$$\frac{1}{|y|_\lambda^\beta}v_\lambda^p(y))\mathrm{d}y\leq\int_{\sum_\lambda^-}(G_\infty(x,y)-G_\infty(x^\lambda,y))\frac{1}{|y|^\beta}(v^p(y)-v_\lambda^p(y))\mathrm{d}y\leq$$
$$\int_{\sum_\lambda^-}G_\infty(x,y)\frac{1}{|y|^\beta}(v^p(y)-v_\lambda^p(y))\mathrm{d}y\leq c\int_{\sum_\lambda^-}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\frac{1}{|y|^\beta}\psi^{p-1}(y)(v(y)-$$
$$v_\lambda(y))\mathrm{d}y\leq c\int_{\sum_\lambda^-}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\frac{1}{|y|^\beta}v^{p-1}(y)(v(y)-v_\lambda(y))\mathrm{d}y. \tag{13}$$

在这里，由于 $\psi_\lambda(y)$ 的值介于 $v(y)$ 与 $v_\lambda(y)$ 之间，因此在 $\sum_\lambda^-$ 上，可以得到

$$0<v_\lambda(y)<\psi_t\lambda(y)<v(y).$$

运用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的等价形式和 Hölder 不等式，可以得出对于 $q>\frac{n}{n-\alpha}$，

$$\|w_\lambda\|_{L^q(\sum_\lambda^-}\leq C\left\|\frac{1}{|y|^\beta}v^{p-1}(y)(v(y)-v_\lambda(y))\right\|_{L\frac{nq}{n+\alpha q}(\sum_\lambda^-)}\leq C\|v^{p-1}\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\sum_\lambda^-)}\|w_\lambda\|_{L^q(\sum_\lambda^-)}.$$

又因为当 N 充分大且 $\lambda<-N$ 时，$C\|v^{p-1}\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\sum_\lambda^-)}\leq\frac{1}{2}$. 由此可以得出：$\|w_\lambda\|_{L^q(\sum_\lambda^-)}\equiv 0$，因此 $\sum_\lambda^-$ 的测度为零.

步骤 2 第一步为移动平面 $T_\lambda=\{x\in\mathbf{R}_+^n\mid x_1=\lambda\}$ 提供了起点，现在我们在保证不等式 $w_\lambda\geq 0$ 成立的条件下，从 $x_1=-\infty$ 的邻域开始向右移动平面直至极限位置，定义 $\lambda_0=\sup\{\lambda\leq 0\mid w_\mu(x)\geq 0,\mu\leq\lambda,\forall x\in\sum_\mu\}$. 下面证明 $\lambda_0=0$.

假若 $\lambda_0<0$，将证明 $v(x)$ 均关于平面 T_{λ_0} 对称，也就是说，$w_{\lambda_0}\equiv 0$，a. e. $\forall x\in\sum_{\lambda_0}\backslash B_\varepsilon n(0^{\lambda_0})$.

假设对于 λ_0，有 $w_{\lambda_0}(x)\geq 0$，接下来证明平面 T_λ 可以继续向右移动，也就是说 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $\forall\lambda\in[\lambda_0,$

$\lambda_0+\varepsilon)$，方程(12) 的解 $v(x)$ 均可以保证不等式 $w_\lambda(x)=v_\lambda(x)-v(x)\geq 0$，a. e. $\forall x\in\sum_\lambda$，成立.

若存在 $x\in\sum_{\lambda_0}$，$v_{\lambda_0}(x)-v(x)>0$，那么由(13)，可以得出对于 $\sum_{\lambda_0}$ 的内点均有 $w_{\lambda_0}(x)>0$. 此处重复第一步可证得到，这说明平面 T_λ 还可以继续向右移动与 λ_0 的定义矛盾. 所以 $v(x)$ 关于 T_{λ_0} 对称，若 $\lambda_0<0$，由方程(12) 可以看出 $v(x)$ 不可能关于 T_{λ_0} 对称，综上可得 v 关于原点对称.

步骤 3　由方程的平移不变性，可得对于 $\forall z^0\in\partial\mathbf{R}_+^n$，$v(x)$ 关于 z^0 对称，即 $v(x)$ 关于 x_n 轴旋转对称. 此时任取两点 X^1 和 X^2，$X^i=(x^i,x_n)\in\mathbf{R}^{n-1}\times[0,\infty)$，$i=1,2$，设 z^0 是点 $\overline{X}=\dfrac{X^1+X^2}{2}$ 在 ∂R_+^n 上的投影. 令 $Y^i=\dfrac{X^i-z^0}{|X^i-z^0|^2}+z^0$，$i=1,2$，根据之前的论证易得 $v(Y^1)=v(Y^2)$，根据 Klevin 变换的定义可知 $u(X^1)=u(X^2)$，从而得出 $u(x)$ 都只是关于 x_n 的函数.

回到原微分方程(4)，方程可化为 $(-\Delta)^{\alpha/2}u(x_n)=|x|^\gamma u^p(x_n)$，若 $u(x)$ 不是平凡解，那么方程组可进一步写为 $\dfrac{(-\Delta)^{\alpha/2}u(x_n)}{u^p(x_n)}=|x|^\gamma$. 显然方程组左边是只关于 x_n 的函数，但方程组右边却不是只关于 x_n 的函数，导出矛盾. 因此 $u(x)$ 只能是平凡解，即 $u(x)\equiv 0$. 定理 3 得证.

参　考　文　献

[1]　Podlubny I. Fractional Differential Equations[J]. San Diego: Academic Press,1999.

[2]　Miller K,Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation[M]. New York:John Wiley,1993.

[3]　Caffarelli L, Silvestre L. An extension equations related to the fractional[J]. Comm in PDE,2007,32:1245-1260.

[4]　Ma L, Zhao L. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation[J]. Arch. Ration Mech Anal,2010,195:455-467.

[5]　Dancer E N. On the number of positive solutions of weakly nonlinear elliptic equations whena parameter is large[J]. Proc London Mat Soc,1986,53:429-452.

[6]　Li C, Ma L. Uniqueness of positive bound states to Shrödinger systems with critical exponents[J]. SIAM J Appl Anal,2008,40:1049-1057.

[7]　Chen W X, Li C M, Ou B. Classification of solutions for a system of integral equations[J]. Comm Partial Diff Eq,2005,30:59-65.

[8]　Jin C, Li C. Symmetry of solutions to some systems of integral equations[J]. Proc Amer Math Soc,2006,134(6):1661-1670.

[9]　Chen W X, Fang Y Q, Yang R. Liouville theorems involving the fractional Laplacian on a half space[J]. Advances in mathematics,2015,274:167-198.

[10]　Silvestre L. Regularity of the obstacle problem foe a fractional power of the Laplace operator[J]. Comm Pure Appl Math,2007(2):67-112.

Liouville Type Theorem for a Fractional Laplacian in a Half Space

ZHAO Shuaixin, LI Jing

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007,China)

Abstract: This paper investigates the Liouville type theorem of a fractional laplacian in a half space. Firstly,we show the equivalence between the differential equation and the integral equation. Based on the equivalence,we use the moving plane method in integral equation to establish the non-existence of positive solutions under the Global Integrability Assumption and a Liouville type theorem with Weaker Conditions.

Keywords: Green's function; moving plane method in integral equation; non-existence; Liouville type theorem