文章编号:1000－2367(2017)05－0007－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.05.002

# Lorentz 空间形式中类空超曲面的一个空隙定理

张树邦,姬秀

(北京理工大学 数学与统计学院,北京 100081)

**摘 要:** 设 $M^n$ 是 $(n+1)$ 维 Lorentz 空间形式 $M_1^{n+1}(c)$ 中无脐点类空超曲面. 在 $M_1^{n+1}(c)$ 的共形变换群下,$M^n$ 上的 3 个基本的共形不变量分别是:共形 1- 形式 $C$,共形 2- 张量 $\Lambda$,共形度量 $g$. 用 $\kappa$ 表示共形法化数量曲率,$\widetilde{\Lambda}=\Lambda-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(\Lambda)g$ 表示无迹共形 2- 张量,主要证明了一个空隙定理.

**关键词:** 共形度量;共形第二基本形式;共形 2-张量

**中图分类号:** O186.1 **文献标志码:** A

## 1 主要结果

在微分几何里,一个有趣的现象是某些逐点定义的几何不变量的模长存在一些空隙. 例如,球面中紧致极小超曲面的第二基本形式的模长存在空隙,这就是著名的 Chern 猜想. 在 Möbius 几何里,胡泽军教授和李海中教授证明了下面的空隙定理.

**定理 1**[1] 设 $x:M^m\to S^n$ 是 $m(m\geq 3)$ 维 Möbius 形式为零且具有常 Möbius 法化数量曲率 $\kappa(\geq\frac{m-2}{m^2})$ 的紧致子流形. 则有 $\int_M\|\widetilde{A}\|^2[\|\widetilde{A}\|-\sqrt{\frac{m-1}{m}}(\frac{m}{m-2}\kappa-\frac{1}{m})]\mathrm{d}M\geq 0$. 若 $0\leq\|\widetilde{A}\|\leq\sqrt{\frac{m-1}{m}}(\frac{m}{m-2}\kappa-\frac{1}{m})$. 则要么 $\|\widetilde{A}\|\equiv 0$ 且子流形 $x(M)$ 是 Möbius 等价于具有常数量曲率的极小子流形;要么 $\|\widetilde{A}\|=\sqrt{\frac{m-1}{m}}(\frac{m}{m-2}\kappa-\frac{1}{m})$ 且子流形 $x(M)$ 是 Möbius 等价于 $S^{m+1}(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}})$ 中的 $S^1(r)\times S^{m-1}(\sqrt{\frac{1}{1+c^2}-r^2})$,其中常数 $c\geq 0$,$r=\sqrt{\sqrt{\frac{m\kappa}{(m-2)(1+c^2)}}}$.

本文研究 Lorentz 空间形式中类空超曲面的共形不变量的空隙.

设 $\mathbf{R}_s^{n+2}$ 是按以下方式定义内积的 Lorentz 空间:$\langle X,Y\rangle_s=-\sum_{i-1}^{s}x_iy_i+\sum_{j-s+1}^{n+2}x_jy_j$.

对 $a>0$,定义标准球 $\mathscr{S}^{n+1}(a)$,双曲空间 $\mathscr{H}^{n+1}(-a)$,de sitter 空间 $\mathscr{S}_1^{n+1}(a)$ 和 anti-desitter 空间 $\mathscr{H}_1^{n+1}(-a)$ 分别为:

$$\mathscr{S}^{n+1}(a)=\{x\in\mathbf{R}^{n+2}\mid x\cdot x=a^2\},\mathscr{H}^{n+1}(-a)=\{x\in\mathbf{R}_1^{n+2}\mid\langle x,x\rangle_1=-a^2\},$$
$$\mathscr{S}_1^{n+1}(a)=\{x\in\mathbf{R}_1^{n+2}\mid\langle x,x\rangle_1=a^2\},\mathscr{H}_1^{n+1}(-a)=\{x\in\mathbf{R}_2^{n+2}\mid\langle x,x\rangle_2=-a^2\}.$$

设 $M_1^{n+1}(c)$ 是 Lorentz 空间形式. 当 $c=0$ 时,$M_1^{n+1}(c)=\mathbf{R}_1^{n+1}$;$c=1$ 时,$M_1^{n+1}(c)=\mathscr{S}_1^{n+1}(1)$;$c=-1$ 时,$M_1^{n+1}(c)=\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)$.

对 Lorentz 空间形式 $M_1^{n+1}(c)$,存在共形紧致化空间 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$. 利用 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$,研究 $M_1{}^{n+1}(c)$ 中类空超曲面的共形

收稿日期:2017-03-07;修回日期:2017-06-08.

基金项目:国家自然科学基金(11571037;11471021)

作者简介(通信作者):姬秀(1979－),女,河南信阳人,北京理工大学博士研究生,研究方向为微分几何,E-mail:jixiu1106@163.com.

几何.在类空超曲面上定义共形度量 $g$,共形第二基本形式 $B$,共形形式 $C$ 和共形 2- 张量 $A$.记 $\widetilde{A}=A-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)g$,用 $\kappa$ 表示共形法化数量曲率.本文主要结果见定理 2.

**定理 2** 设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是 $n(n\geq 3)$ 维共形形式为零的无脐类空超曲面,它的法化数量曲率满足 $\kappa\geq\frac{2-n}{n^2}$.若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|\leq n\kappa+\frac{n-2}{n}$,则 $\kappa$ 为常数且 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|=n\kappa+\frac{n-2}{n}$.

并且 $M^n$ 共形等价于下列类空超曲面之一:

(1) $\mathscr{S}^1(\sqrt{a^2+1})\times\mathscr{H}^{n-1}(-a)\subset\mathscr{S}_1^{n+1}(1),a>0$;

(2) $\mathscr{H}^1(-a)\times\mathscr{H}^{n-1}(-\sqrt{1-a^2})\subset\mathscr{H}_1^{n+1}(-1),0<a<1$;

(3) $\mathscr{H}^1(-a)\times\mathbf{R}^{n-1}\subset\mathbf{R}_1^{n+1},a>0$;

(4) $\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

**注** 定理 2 中的法化数量曲率不需要是常数的条件.

## 2 类空超曲面的共形几何

本节给出类空超曲面的共形不变量及结构方程,更详细的内容可参考文献[3].

用 $C^{n+2}$ 表示 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 中的光锥,$\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 表示 $\mathbf{R}P^{n+2}$ 中去顶光锥的共形紧致化空间,

$$C^{n+2}=\{X\in\mathbf{R}_2^{n+3}\mid\langle X,X\rangle_2=0,X\neq 0\},$$

$$\mathscr{Q}_1^{n+1}=\{[X]\in\mathbf{R}P^{n+2}\mid\langle X,X\rangle_2=0\}.$$

设 $O(n+3,2)$ 是 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 的保持 Lorentz 内积$\langle X,Y\rangle_2$ 不变的 Lorentz 群.则 $O(n+3,2)$ 是 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 上的一个变换群,其作用如下,

$$T([X])=[XT],X\in C^{n+2},T\in O(n+3,2).$$

拓扑上 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 等同于配有标准 Lorentz 度量 $h=g_{S^n}\oplus(-g_{S^1})$ 的紧致空间 $S^n\times S^1/S^0$,其中 $g_{S^k}$ 表示 $k$- 维球 $S^k$ 上的标准度量.则 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 有共形度量

$$[h]=\{e^\tau h\mid\tau\in C^\infty(\mathscr{Q}_1^{n+1})\}$$

且 $[O(n+3,2)]$ 是 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 的共形变换群(见文献[2]).

记 $P=\{[X]\in\mathscr{Q}_1^{n+1}\mid x_1=x_{n+2}\},P_-=\{[X]\in\mathscr{Q}_1^{n+1}\mid x_{n+2}=0\},P_+=\{[X]\in\mathscr{Q}_1^{n+1}\mid x_1=0\}$,定义如下共形微分同胚,

$$\sigma_0:\mathbf{R}_1^{n+1}\to\mathscr{Q}_1^{n+1}\backslash P,u\mapsto\left[\left(\frac{\langle u,u\rangle_1+1}{2},u,\frac{\langle u,u\rangle_1-1}{2}\right)\right],$$

$$\sigma_1:\mathscr{S}_1^{n+1}(1)\to\mathscr{Q}_1^{n+1}\backslash P_+,u\mapsto[(1,u)],$$

$$\sigma_{-1}:\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)\to\mathscr{Q}_1^{n+1}\backslash P_-,u\mapsto[(u,1)].$$

称 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 为 $\mathbf{R}_1^{n+1},\mathscr{S}_1^{n+1}(1),\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)$ 的共形紧致化空间.

设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面.利用 $\sigma_c$,可以得到 $\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 中的超曲面 $\sigma_c\circ x:M^n\to\mathscr{Q}_1^{n+1}$.由文献[2]可得定理 3.

**定理 3** $x,\bar{x}:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T\in O(n+3,2)$ 使得

$$\sigma_c\circ x=T(\sigma_c\circ\bar{x}):M^n\to\mathscr{Q}_1^{n+1}.$$

设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面,则$(\sigma_c\circ x)_*(TM^n)$ 是 $T\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 的正定子丛.任给标准投射 $\pi:C^{n+2}\to\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 的局部提升 $Z$,存在 $\sigma_c\circ x:M\to\mathscr{Q}_1^{n+1}$ 的局部提升 $y=Z\circ\sigma_c\circ x:U\to C^{n+1}$.因此$\langle\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\rangle_2=\rho^2\langle\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_s$ 是局部度量,其中 $\rho\in C^\infty(U)$.用 $\Delta$ 和 $\kappa$ 分别表示相应于局部度量$\langle\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\rangle$ 的拉普拉斯和法化数量曲率.类似于文献[3]中定理 1.2 的证明,可得定理 4.

**定理 4** 设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面,则 $g=-(\langle\Delta y,\Delta y\rangle_2-n^2\kappa)\langle\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\rangle_2$ 是一个整体定义的共形不变量,且 $g$ 在非脐点处是正定的.

称 $g$ 为类空超曲面 $M^n$ 的共形度量.存在唯一的提升

$$Y: M \to C^{n+2}$$

使得 $g = \langle \mathrm{d}Y, \mathrm{d}Y \rangle_2$. 称 $Y$ 是类空超曲面 $M^n$ 的共形位置向量. 由定理 4 得定理 5.

**定理 5**　两个超曲面 $x, \tilde{x}: M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T \in O(n+3, 2)$ 使得 $\bar{Y} = YT$，其中 $Y$，$\tilde{Y}$ 分别是 $x$，$\bar{x}$，的共形位置向量.

设 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是 $M^n$ 上相应于 $g$ 的局部正交基，其对偶为$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. 记 $Y_i = E_i(Y)$ 且定义

$$N = -\frac{1}{n}\Delta Y - \frac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle_2 Y,$$

其中 $\Delta$ 是相应于 $g$ 的拉普拉斯，则有

$$\langle N, Y \rangle_2 = 1, \langle N, N \rangle_2 = 0, \langle N, Y_k \rangle_2 = 0, \langle Y_i, Y_j \rangle_2 = \delta_{ij}, 1 \leq i, j, k \leq n.$$

则 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 有如下分解

$$\mathbf{R}_2^{n+3} = \mathrm{span}\{Y, N\} \oplus \mathrm{span}\{Y_1, \cdots, Y_n\} \oplus \mathscr{V},$$

其中 $\mathscr{V} \perp \mathrm{span}\{Y, N, Y_1, \cdots, Y_n\}$. 称 $\mathscr{V}$ 为 $x$ 的共形法丛. 设 $\xi$ 是 $\mathscr{V}$ 的局部截面且 $\langle \xi, \xi \rangle_2 = -1$，则 $\{Y, N, Y_1, \cdots, Y_n, \xi\}$ 是 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 中定义在 $M^n$ 上的活动标架. 结构方程如下，

$$\mathrm{d}Y = \sum_i \omega_i Y_i, \mathrm{d}N = \sum_{ij} A_{ij}\omega_j Y_i + \sum_i C_i \omega_i \xi,$$

$$\mathrm{d}Y_i = -\sum_j A_{ij}\omega_j Y - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} Y_j + \sum_j B_{ij}\omega_j \xi,$$

$$\mathrm{d}\xi = \sum_i C_i \omega_i Y + \sum_{ij} B_{ij}\omega_j Y_i,$$

其中 $\omega_{ij}(=-\omega_{ij})$ 是 $M^n$ 上相应于$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 的联络. 显然 $A = \sum_{ij} A_{ij}\omega_j \otimes \omega_i, B = \sum_{ij} B_{ij}\omega_j \otimes \omega_i, C = \sum_i C_i \omega_i$ 是整体定义的共形不变量. 称 $A$，$B$ 和 $C$ 分别是共形 2-张量，共形第二基本形式，共形 1-形式. 这些张量的共变导数定义为

$$\sum_j C_{i,j}\omega_j = dC_i + \sum_k C_k \omega_{kj}, \sum_k A_{ij,k}\omega_k = dA_{ij} + \sum_k A_{ik}\omega_{kj} + \sum_k A_{kj}\omega_{ki},$$

$$\sum_k B_{ij,k}\omega_k = dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki},$$

对结构方程求外微分得

$$\begin{aligned} &A_{ij} = A_{ji}, B_{ij} = B_{ji}, \\ &A_{ij,k} - A_{ik,j} = B_{ij}C_k - B_{ik}C_j, \\ &B_{ij,k} - B_{ik,j} = \delta_{ij}C_k - \delta_{ik}C_j, \\ &C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik}A_{kj} - B_{jk}A_{ki}), \end{aligned} \tag{1}$$

$$R_{ijkl} = B_{il}B_{jk} - B_{ik}B_{jl} + A_{ik}\delta_{jl} + A_{jl}\delta_{ik} - A_{il}\delta_{jk} - A_{jk}\delta_{il}. \tag{2}$$

且有

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2n}(n^2\kappa - 1), R_{ij} = \mathrm{tr}(A)\delta_{ij} + (n-2)A_{ij} + \sum_k B_{ik}B_{kj}, \tag{3}$$

$$(1-n)C_i = \sum_j B_{ij,j}, \sum_{ij} B_{ij}^2 = \frac{n-1}{n}, \tag{4}$$

其中 $\kappa$ 是 $g$ 的法化数量曲率. 由(3)、(4)式可知当 $n \geq 3$ 时，结构方程中的系数由共形度量 $g$ 和共形第二基本形式 $B$ 确定，因此有定理 6.

**定理 6**　两个超曲面 $x, \tilde{x}: M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是它们有相同的共形度量 $g$ 和共形第二基本形式 $B$.

定义 $B_{ij}$ 的二阶共变导数为

$$\sum_m B_{ij,km}\omega_m = dB_{ij,k} + \sum_m B_{mj,k}\omega_{mi} + \sum_m B_{im,k}\omega_{mj} + \sum_m B_{ij,m}\omega_{mk}. \tag{5}$$

有 Ricci 恒等式

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m B_{mj}R_{mikl} + \sum_m B_{im}R_{mjkl}. \tag{6}$$

下面给出 $M_1^{n+1}(c)$ 中类空超曲面的共形不变量和等距不变量之间的关系.

先考虑类空超曲面 $x:M^n\to \mathbf{R}_1^{n+1}$. 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是相应于诱导度量 $\mathrm{I}=\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1$ 的局部正交基,其对偶为$\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$. 设 $e_{n+1}$ 是 $x$ 的法向量场,且$\langle e_{n+1},e_{n+1}\rangle_1=-1$. $\mathrm{II}=\sum_{ij}h_{ij}\theta_i\otimes\theta_j$ 和 $H=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ 分别表示第二基本形式和平均曲率. 用 $\Delta_M$ 和$\kappa_M$ 分别表示相应于 $I$ 的拉普拉斯和法化数量曲率. 由 $x:M^n\to\mathbf{R}_1^{n+1}$ 的结构方程可得

$$\Delta_M x=nHe_{n+1}. \tag{7}$$

$x$ 的局部提升

$$y:M^n\to C^{n+2},y=(\frac{\langle x,x\rangle_1+1}{2},x,\frac{\langle x,x\rangle_1-1}{2}).$$

由(7)式得

$$\langle\Delta y,\Delta y\rangle_2-n^2\kappa_M=\frac{n}{n-1}(-|\mathrm{II}|^2+n|H|^2)=-\mathrm{e}^{2\tau}.$$

因此 $x$ 的共形度量 $g$,共形位置向量 $Y$ 及$\xi$ 可表示为

$$g=\frac{n}{n-1}(|\mathrm{II}|^2-n|H|^2)\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1:=\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{I},Y=\mathrm{e}^{\tau}y,$$

$$\xi=-Hy+(\langle x,e_{n+1}\rangle_1,e_{n+1},\langle x,e_{n+1}\rangle_1).$$

直接计算可得

$$A_{ij}=\mathrm{e}^{-2\tau}[\tau_i\tau_j-h_{ij}H-\tau_{i,j}+\frac{1}{2}(-|\nabla\tau|^2+|H|^2)\delta_{ij}], \tag{8}$$

$$B_{ij}=\mathrm{e}^{-\tau}(h_{ij}-H\delta_{ij}),C_i=\mathrm{e}^{-2\tau}(H\tau_i-H_i-\sum_j h_{ij}\tau_j), \tag{9}$$

其中 $\tau_i=e_i(\tau)$, $|\nabla\tau|^2=\sum_i\tau_i^2$,$\tau_{i,j}$ 是$\tau$ 相应于 I 的 Hessian, $H_i=e_i(H)$.

对类空超曲面 $x:M^n\to\mathscr{S}_1^{n+1}(1)$,共形度量 $g$,共形位置向量 $Y$ 及$\xi$ 可表示为

$$g=\frac{n}{n-1}(|\mathrm{II}|^2-n|H|^2)\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1:=\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{I},$$

$$Y=\mathrm{e}^{\tau}(1,x)=\mathrm{e}^{\tau}y,\xi=-Hy+(0,e_{n+1}).$$

对类空超曲面 $x:M^n\to\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)$,共形度量 $g$,共形位置向量 $Y$ 及$\xi$ 可表示为

$$g=\frac{n}{n-1}(|\mathrm{II}|^2-n|H|^2)\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_2:=\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{I},$$

$$Y=\mathrm{e}^{\tau}(x,1)=\mathrm{e}^{\tau}y,\xi=-Hy+(e_{n+1},0).$$

经计算可得

$$A_{ij}=\mathrm{e}^{-2\tau}[\tau_i\tau_j-\tau_{i,j}-h_{ij}H+\frac{1}{2}(-|\nabla\tau|^2+|H|^2+c)\delta_{ij}], \tag{10}$$

$$B_{ij}=\mathrm{e}^{-\tau}(h_{ij}-H\delta_{ij}),C_i=\mathrm{e}^{-2\tau}(H\tau_i-H_i-\sum_j h_{ij}\tau_j), \tag{11}$$

其中 $c=1$ 相应于 $x:M^n\to S_1^{n+1}(1)$,$c=-1$ 相应于 $x:M^n\to H_1^{n+1}(-1)$.

## 3 典型的例子

本节,给出 $M_1^{n+1}(c)$ 中的所有类空等参超曲面,见文献[4-6].

**例 1** $x:\mathscr{H}^k(-a)\times\mathbf{R}^{n-k}\to\mathbf{R}_1^{n+1},a>0,1\le k\le n-1$.

设 $x_1:\mathscr{H}^k(-a)\to\mathbf{R}_1^{k+1}$ 是标准嵌入,$y:\mathbf{R}^{n-k}\to\mathbf{R}^{n-k}$ 是恒同映射,则

$$x=(x_1,y):\mathscr{H}^k(-a)\times\mathbf{R}^{n-k}\to\mathbf{R}_1^{n+1}.$$

$\xi=(\frac{1}{a}x_1,\vec{0})$ 是 $x$ 的单位法向量场,且

$$\mathrm{I}=\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1=\mathrm{I}_{\mathscr{H}^k(-a)}+\mathrm{I}_{\mathbf{R}^{n-k}},\mathrm{II}=-\langle \mathrm{d}x,\mathrm{d}\xi\rangle_1=\frac{-1}{a}\mathrm{I}_{\mathscr{H}^k(-a)}.$$

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 $\mathscr{H}^k(-a)$ 上的局部正交切标架场，$\{e_{k+1},\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^{n-k}$ 上的局部正交切标架场，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathscr{H}^k(-a)\times\mathbf{R}^{n-k}$ 上的局部正交切标架场. 在局部标架场 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下，

$$(h_{ij})=\mathrm{diag}(\frac{-1}{a},\cdots,\frac{-1}{a},0,\cdots,0).$$

由(8)、(9)式得，

$$B_{ij}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}\delta_{ij},1\le i,j\le k,B_{pq}=\frac{-1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n,B_{ip}=0.$$

$$A_{ij}=\frac{(n-1)(k-2n)}{2n^2(n-k)}\delta_{ij},1\le i,j\le k,A_{pq}=\frac{(n-1)k}{2n^2(n-k)}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n,A_{ip}=0.$$

$\mathrm{tr}(A)=\dfrac{-(n-1)k}{2n(n-k)},C_i=0,1\le i\le n.$

**例 2**　$x:\mathscr{S}^k(\sqrt{1+a^2})\times\mathscr{H}^{n-k}(-a)\to\mathscr{S}_1^{n+1}(1),a>0,1\le k\le n-1.$

设 $x_1:\mathscr{S}^k(1)\to\mathbf{R}^{k+1}$ 和 $x_2:\mathscr{H}^{n-k}(-1)\to\mathbf{R}_1^{n-k+1}$ 是两个标准嵌入，则

$$x=(\sqrt{1+a^2}x_1,ax_2):\mathscr{S}^k(\sqrt{1+a^2})\times\mathscr{H}^{n-k}(-a)\to\mathscr{S}_1^{n+1}(1)\subset\mathbf{R}_1^{n+2}.$$

$\xi=(ax_1,\sqrt{1+a^2}x_2)$ 是 $x$ 的单位法向量场. 且

$$\mathrm{I}=\langle\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1=(1+a^2)\mathrm{I}_{S^k(1)}+a^2\mathrm{I}_{H^{n-k}(-1)},$$

$$\mathrm{II}=-\langle\mathrm{d}x,\mathrm{d}\xi\rangle_1=-a\sqrt{1+a^2}(\mathrm{I}_{S^k(1)}+\mathrm{I}_{H^{n-k}(-1)}).$$

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 $\mathscr{S}^k(\sqrt{1+a^2})$ 上的局部正交标架场，$\{e_{k+1},\cdots,e_n\}$ 是 $\mathscr{H}^{n-k}(-a)$ 上的局部正交标架场，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathscr{S}^k(\sqrt{1+a^2})\times\mathscr{H}^{n-k}(-a)$ 上的局部正交标架场. 在标架场 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下，

$$(h_{ij})=\mathrm{diag}(\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}},\cdots,\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}},\frac{-\sqrt{1+a^2}}{a},\cdots,\frac{-\sqrt{1+a^2}}{a}).$$

由(10)、(11)式可得，

$$B_{ij}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}\delta_{ij},1\le i,j\le k,B_{pq}=\frac{-1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n,B_{ip}=0.$$

$$A_{ij}=\frac{n-1}{k(n-k)}\frac{(n-k)^2+n^2a^2}{2n^2}\delta_{ij},1\le i,j\le k,A_{pq}=\frac{n-1}{k(n-k)}\frac{k^2-n^2a^2-n^2}{2n^2}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n,$$

$$A_{ip}=0,i\ne p,\mathrm{tr}(A)=\frac{(n-1)[n(2k-n)a^2-(n-k)^2]}{2nk(n-k)},C_i=0,1\le i\le n.$$

**例 3**　$x:\mathscr{H}^k(-a)\times\mathscr{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})\to\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)\subset\mathbf{R}_2^{n+2},0<a<1,1\le k\le n-1.$

设 $x_1:\mathscr{H}^k(-1)\to\mathbf{R}_1^{k+1}$ 和 $x_2:\mathscr{H}^{n-k}(-1)\to\mathbf{R}_1^{n-k+1}$ 是两个标准嵌入，则

$$x=(\sqrt{1-a^2}x_1,ax_2):\mathscr{H}^k(-a)\times\mathscr{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})\to\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)\subset\mathbf{R}_2^{n+2}.$$

$\xi=(-ax_1,\sqrt{1-a^2}x_2)$ 是 $x$ 的单位法向量场. 且

$$\mathrm{I}=\langle\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\rangle_1=(1-a^2)\mathrm{I}_{H^k(-1)}+a^2\mathrm{I}_{H^{n-k}(-1)},$$

$$\mathrm{II}=-\langle\mathrm{d}x,\mathrm{d}\xi\rangle_1=a\sqrt{1-a^2}(\mathrm{I}_{H^k(-1)}-\mathrm{I}_{H^{n-k}(-1)}).$$

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 $\mathscr{H}^k(-a)$ 上的局部正交标架场，$\{e_{k+1},\cdots,e_n\}$ 是 $\mathscr{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})$ 上的局部正交标架场，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathscr{H}^k(-a)\times\mathscr{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})$ 上的局部正交标架场. 在标架场 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下，

$$(h_{ij})=\mathrm{diag}(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\cdots,\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a},\cdots,\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}).$$

由(10)、(11)式可得，

$$B_{ij}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}\delta_{ij},1\le i,j\le k,B_{pq}=\frac{-1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n,B_{ip}=0.$$

$$A_{ij}=\frac{n-1}{k(n-k)}\frac{(n-k)^2-n^2a^2}{2n^2}\delta_{ij},1\le i,j\le k,A_{pq}=\frac{n-1}{k(n-k)}\frac{n^2a^2-n^2+k^2}{2n^2}\delta_{pq},k+1\le p,q\le n.$$

$$A_{ip}=0,i\neq p,\mathrm{tr}(A)=\frac{n-1}{2n^2}[n-\frac{n^2((2k-n)a^2+n-k)}{k(n-k)}],C_i=0,1\leq i\leq n.$$

为了证明主要结论,如下两个结论读者可以参见文献[7-8].

**定理 7**[7] 设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是具有两个不同主曲率的类空超曲面.若共形形式为零,则 $x$ 局部共形等价于下列超曲面之一:

(1) $\mathscr{S}^k(\sqrt{a^2+1})\times\mathscr{H}^{n-k}(-a)\subset\mathscr{S}_1^{n+1}(1),a>0,1\leq k\leq n-1$;

(2) $\mathscr{H}^k(-a)\times\mathscr{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})\subset\mathscr{H}_1^{n+1}(-1),0<a<1,1\leq k\leq n-1$;

(3) $\mathscr{H}^k(-a)\times\mathbf{R}^{n-k}\subset\mathbf{R}_1^{n+1},a>0,1\leq k\leq n-1$.

为了证明定理 2,需要如下定理 8.

**定理 8**[8] 设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是没有脐点的类空超曲面.若 $x$ 的共形不变量满足

$$(1)C=0,(2)A=\lambda g,$$

则 $x$ 共形等价于 $\mathscr{H}_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

## 4 定理 2 的证明

既然 $C=0$,则 $B_{ij,k}=B_{ik,j}$ .由(4)、(6)、(8)及(9)式可得

$$\frac{1}{2}\Delta(\sum_{ij}B_{ij}^2)=\sum_{ijk}B_{ij,k}^2+\sum_{ijk}B_{ij}B_{ij,kk}=\sum_{ijk}B_{ij,k}^2+\sum_{ijkm}B_{ij}(B_{im}R_{mkjk}+B_{ij}B_{km}R_{mijk})=$$
$$\|\nabla B\|^2+(\frac{n-1}{n})^2+\frac{n-1}{n}\mathrm{tr}(A)+n\sum_{ijk}B_{ij}B_{ik}A_{jk}.$$

由 $\sum_{ij}B_{ij}^2=\frac{n-1}{n}$ 及 $A=\widetilde{A}+\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)g$ ,有如下公式.

**引理 1** 设 $x:M^n\to M_1^{n+1}(c)$ 是没有脐点的类空超曲面.若共形形式 $C=0$ ,则

$$\|\nabla B\|^2+(\frac{n-1}{n})^2+2\frac{n-1}{n}\mathrm{tr}(A)+n\sum_{ijk}B_{ij}B_{ik}\widetilde{A}_{jk}=0.$$

下面的引理是证明定理 2 的关键.读者可以参见文献[9].

**引理 2**[9] 设 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个实数且满足 $\sum_i a_i=\sum_i b_i=0$ .则

$$|\sum_i a_ib_i^2|\leq\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\sum_i a_i^2}\sum_i b_i^2.$$

而且,若 $\sum_i a_i^2\neq0$ 且 $\sum_i b_i^2\neq0$,则等式成立的充要条件是存在 $n-1$ 组数$(a_i,b_i)$ 取相同的值$(a,b)$ .

**定理 2 的证明** 由 $C=0$ 及(11) 式知,可取标准正交基$\{e_i\}$ 使得$(A_{ij})$ 和$(B_{ij})$ 同时对角化.设

$$B_{ij}=b_i\delta_{ij},A_{ij}=\mu_i\delta_{ij}.$$

显然,$(\widetilde{A}_{ij})=\mathrm{diag}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$,其中 $\tilde{a}_i=a_i-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)$ .因此,由引理 1 及引理 2 可得

$$0=\|\nabla B\|^2+(\frac{n-1}{n})^2+2\frac{n-1}{n}\mathrm{tr}(A)+n\sum_{ijk}B_{ij}B_{ik}\widetilde{A}_{jk}=\|\nabla B\|^2+(\frac{n-1}{n})^2+2\frac{n-1}{n}\mathrm{tr}(A)+$$
$$n\sum_i b_i^2\tilde{a}_i\geq\|\nabla B\|^2+(\frac{n-1}{n})^2+2\frac{n-1}{n}\mathrm{tr}(A)-\frac{n-2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\|\widetilde{A}\|.$$

由 $\mathrm{tr}(A)=\frac{1}{2n}(n^2\kappa-1)$ ,可得

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|-\frac{n-2}{n}-n\kappa\geq0.$$

若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|\leq\frac{n-2}{n}+n\kappa$,则有$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|=\frac{n-2}{n}+n\kappa$.因此需要讨论如下两种情形.

情形 1 若 $\|\widetilde{A}\|=0$,则 $A=\lambda g$.由定理 8 可得,$x$ 共形等价于 $H_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

情形 2　若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\widetilde{A}\|-\frac{n-2}{n}-n\kappa=0$，则有 $\nabla B=0$，且类空超曲面具有两个不同主曲率，其中一个为单重. 由定理 7，完成了定理 2 的证明.

## 参 考 文 献

[1] Hu Z J, Li H Z. Submanifolds with constant Möbius scalar curvature in $S^n$ [J]. Manuscripta Math, 2003, 111: 287-302.

[2] Cahen M, Kerbrat Y. Domaines symmétriques des quadriques projectives[J]. J Math Pure Appl, 1983, 62: 327-348.

[3] Wang C P. Möbius geometry of submanifolds in $\mathscr{S}^n$ [J]. Manuscripta Math, 1998, 96: 517-534.

[4] Li Z Q, Xie X H. Spacelike isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space form[J]. Front Math China, 2006, 1: 130-137.

[5] Nomizu K. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms[J]. Japan J Math, 1981, 7(1): 217-226.

[6] Magid M. Lorentzian isoparametric hypersurface[J]. Pacific J Math, 1985, 118(1): 437-446.

[7] Li T Z, Nie C X. Spacelike Dupin Hypersurfaces in Lorentzian Space Forms[J]. Mathematics, 2015, 28(3): 299-310.

[8] Li T Z, Nie C X. Conformal Geometry of Hypersurfaces in Lorentz Space Forms[J]. Geometry, 2013(2): 549602.

[9] Santo S W. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres[J]. Tohoku Math J, 1994, 46: 403-415.

# A Gap Theorem of Spacelike Hypersurfaces in Lorentzian Space Forms

Zhang Shubang, Ji Xiu

(Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract**: Let $M^n$ be a $n$-dimensional umbilic-free hypersurface in the $(n+1)$-dimensional Lorentzian Space form $M_1^{n+1}(c)$. Three basic invariants of $M^n$ under the conformal transformation group of $M_1^{n+1}(c)$ are a 1-form $C$, called conformal 1-form, a symmetric $(0,2)$ tensor $A$, called conformal 2-tensor, and a positive definite $(0,2)$ tensor $g$, called conformal metric. We denote the conformal normalized scalar curvature by $\kappa$ and the trace-free conformal 2-tensor by $\widetilde{A}=A-\frac{1}{n}tr(A)g$. In this paper, we prove a gap theorem.

**Keywords**: conformal metric; conformal second fundamental form; conformal 2-tensor

［责任编辑　陈留院］