

基于 Gumbel 分布的熵风险度量的参数估计及渐近行为

严钧,晏婉晨

(扬州大学 数学科学学院,江苏 扬州 225000)

摘要:熵风险度量被广泛应用于金融风险领域,并取得了一定成果,但是将 Gumbel 分布与熵风险度量结合起来的相关研究还比较少,考虑基于 Gumbel 分布的熵风险度量估计量的渐近行为,得到了 3 种不同估计量的渐近正态性.还给出相关的随机模拟结果验证了理论结果的正确性.

关键词:熵风险度量;Gumbel 分布;中心极限定理

中图分类号:O212

文献标志码:A

风险度量是基于经济自由化和全球化的背景下提出来的一个衡量金融风险的工具.Morgan 投资银行首次提出了在险价值(Value at Risk, VaR)的概念,并建立了 Risk Metrics 风险控制模型用于计算 VaR;文献[1]全面阐述了 VaR 方法及相关应用.VaR 方法的优点在于它能综合考量各种市场的不确定性因素,将潜在的最大风险量化成具体值.随着研究深入,学者们发现 VaR 存在一定缺点.文献[2]在此基础上提出一致风险度量;文献[3]在一致风险度量的基础上增加了凸性,提出凸风险度量;文献[4-5]提出了条件风险度量(Conditional Value at Risk, CVaR),衡量超出 VaR 的那部分损失的平均值;文献[6]引进谱风险度量,研究有关谱风险度量的投资组合优化的问题.风险度量理论逐渐发展,一种新的关于信息熵的风险度量方法开始引起学者的关注.

关于熵的概念,最早是由德国的物理学家 Clausius 于 1865 年提出,他将热力学系统中熵的变化定义为在一个可逆过程中,输入热量相对于温度的变化率,随后 Boltzmann 将其延拓到统计物理学中,他提出了 Boltzmann 公式,将熵作为系统“混乱程度”的度量,20 世纪中叶,文献[7]将熵的概念引入信道通信的过程中,开创了“信息论”这门学科,Shannon 定义的熵又被称为“信息熵”.信息熵是消除不确定性所需信息的度量,起初被应用于信息的传输问题,后来逐渐被金融风险采纳,用来建立投资组合的优化模型等,随后最大熵、Yager 熵^[8]等概念陆续被提出,奠定了信息熵的理论基础.由于信息熵刻画了系统的不确定性,因此它与风险度量有着紧密的联系.文献[9]提出了熵风险度量(Entropic Risk Measure),研究了它的一致性、凸性、大偏差等.熵风险度量在金融数学中是一个重要的风险度量,它可以为不同个体提供不同的风险值.

在实际的应用中,风险对应的随机变量依赖于风险参数,风险参数未知的情况下我们需要进行参数估计,可以选取不同的估计方法,例如矩估计、最大似然估计、Bayes 估计、非齐次信度估计等.除此之外,研究上述估计的极限性质是非常有意义的.渐近行为是风险度量理论研究的热点,它可以刻画风险度量估计的大偏差原理、中偏差原理、渐近正态性等.

本文研究 Gumbel 分布条件下的熵风险度量估计量的渐近性质.首先,Gumbel 分布是一种常见的极值分布,被广泛应用于海洋、水文、气象、金融中,它可以计算不同时期的极端的高潮或低潮.Gumbel 分布最初是根据极值定理导出的,因此它在涉及极值的计算和研究中有大量的应用.文献[10]利用基因表达程序设计和回归模型对 Gumbel 分布的洪水频率因子进行预测,提出了确定洪水频率因子的几种预测模型;文献[11]通过 Farlie-Gumbel-Morgenstern(FGM)的 Copula 理论研究了经典风险模型中独立索赔额假设的相关结构;

收稿日期:2020-12-08;修回日期:2020-12-30.

基金项目:国家自然科学基金(71971190);扬州大学科创培育基金(2019CXJ005).

作者简介:严钧(1982—),男,江苏淮安人,扬州大学副教授,博士,研究方向为随机分析,E-mail:junyan@yzu.edu.cn.

通信作者:晏婉晨,研究方向为风险度量的统计推断,E-mail:ywc9946@163.com.

文献[12]分析了海洋工程中极大值波高与相应风速的关系,基于 Gumbel 分布研究了它们的联合分布模型;文献[13]采用 Gumbel 和 Weibull 分布方法对科威特领海的实测波浪数据进行了极端分析.

Gumbel 分布的概率密度函数为 $f(x) = \exp\{-(x-\mu)/\beta + e^{-(x-\mu)/\beta}\}/\beta$ 其中, μ 是位置参数, β 是尺度参数. 累积分布函数为 $F(x, \mu, \beta) = \exp\{-e^{-(x-\mu)/\beta}\}$ 均值为 $E(X) = \mu + \gamma\beta$, 其中 γ 是欧拉常数 $\gamma \approx 0.577 22$, 方差为 $\text{Var}(X) = \pi^2\beta^2/6$. Gumbel 分布一般采用的参数估计方法为矩法、极大似然法等. 若随机变量 X 服从 Gumbel 分布, 则参数 μ 和 β 的矩估计为 $\hat{\beta}_M = \sqrt{6}S/\pi$, $\hat{\mu}_M = \bar{X} - \gamma\hat{\beta}_M$, 其中 \bar{X} 为样本均值, S 为样本标准差. 还可以考虑极大似然法, 关于参数 μ 和 β 的极大似然估计, 可以得到关系式 $(\sum x_i \exp(-x_i/\beta))/(\sum \exp(-x_i/\beta)) + \beta = \bar{x}$, 借助数值方法, 以逼近的方式解出 β , 再代入似然方程, 可解出 μ , 记参数 μ 和 β 的极大似然估计为 $\hat{\mu}_{ML}$ 和 $\hat{\beta}_{ML}$ 但是它们没有具体的表达式.

本文主要研究对象为熵风险度量, 它的概念由 Föllmer 等人提出, 定义如下.

定义 1 随机变量 X 的水平为 $\alpha > 0$ 的熵风险度量定义为^[3]:

$$ENT_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \ln E(e^{-\alpha X}), \quad (1)$$

熵风险度量的稳健的表达形式为 $ENT_\alpha(X) = \sup_{Q \in M} \{E_Q(-X) - \frac{1}{\alpha} I(Q, P)\}$, M 为概率测度的集合, E_Q 为关于 Q 的数学期望, $I(Q, P)$ 是相对熵, 它的定义为:

$$I(Q, P) = \begin{cases} E\left(\frac{\partial Q}{\partial P} \ln \frac{dQ}{dP}\right), & Q \ll P, \\ +\infty, & \text{其他.} \end{cases}$$

关于熵风险度量, 前人做了大量研究, 他们选取具有代表性的密度函数或者损失函数, 对函数中的参数进行估计, 并讨论估计是否具有渐近最优性. 文献[14]根据风险度量的可接受集, 对它们的表示形式进行了研究, 并给出了凸风险度量与一致风险度量的对偶表达形式, 同时给出了条件熵风险度量以及它的对偶表达; 文献[15]提出了期望效用—熵风险度量的模型, 借此来分析一类决策者的财富水平变化对他们风险态度的影响, 并解释了相应的决策行为; 文献[9]提出了熵风险度量和一致熵风险度量, 对它们的性质和应用进行了全面的阐述, 同时给出了关于随机变量的加和形式和一致熵风险度量的两个极限性质; 文献[16]将熵风险度量的理论引进股票投资, 提出一种与中国股票市场相适应的风险度量方法; 文献[17]给出了熵风险度量的性质和应用, 通过 Log-Sobolev 不等式等方法给出一致熵风险度量的偏差估计和渐近行为结果; 文献[18]提出了一种新的一致风险度量, 即熵条件风险 (Entropic Conditional Value-at-Risk, ECVaR), 展示了如何将一致风险度量应用于实际的投资组合选择问题; 文献[19]研究了 2 种熵风险度量, 即一致熵风险度量 (Coherent Entropic Risk Measure) 和凸熵风险度量, 给出了最优投资组合的决策理论分析. 虽然学者们将各种模型与熵风险度量联系在一起, 做了大量研究, 但是基于 Gumbel 分布的熵风险度量的研究相对较少.

若 X 服从位置参数为 μ , 尺度参数为 β 的 Gumbel 分布, 则

$$E(e^{-\alpha X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{\frac{x-\mu}{\beta}} e^{\frac{x-\mu}{\beta}} dx / \beta = e^{-\alpha\mu} \Gamma(1 + \beta\alpha),$$

则 $g(\mu, \beta) \triangleq \frac{1}{\alpha} \ln E(e^{-\alpha X}) = \frac{1}{\alpha} \ln \Gamma(1 + \beta\alpha) - \mu$, 其中, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 为 Gamma 函数. 即随机变量 X 在 Gumbel 分布下的熵风险度量为:

$$g(\mu, \beta) = \frac{1}{\alpha} \ln E(e^{-\alpha X}) = \frac{1}{\alpha} \ln \Gamma(1 + \beta\alpha) - \mu.$$

由于参数 μ 和 β 的极大似然估计没有显性表达式, 因此考虑用矩估计来估计 Gumbel 分布的参数. 容易求出参数 μ 和 β 的矩估计为 $\hat{\beta} = \sqrt{6}S/\pi$, $\hat{\mu} = \bar{X} - \gamma\hat{\beta}$, 其中, \bar{X} 为样本均值, S 为样本标准差, $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 可看作熵风险度量 $g(\mu, \beta)$ 的一个估计.

本文的主要内容是研究熵风险度量的估计量 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 的渐近行为, 给出该估计量的中心极限定理结果, 针对估计量中 Gamma 函数不好计算的问题, 提出两种解决方法, 一个是对数 Gamma 的展开式, 一个是

Stirling 公式,并研究在这两种方法下得到的估计量的渐近性质,最后通过随机模拟验证理论结果的正确性.

1 Gumbel 分布下熵风险度量的参数估计的中心极限定理

定理 1 已知 X 服从位置参数为 μ , 尺度参数为 β 的 Gumbel 分布, (X_1, \dots, X_n) 为样本, 则 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 具有渐近正态性, $\sqrt{n}(g(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta)) \xrightarrow{L} N(0, \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C})$ 其中:

$$\mathbf{C}^T = \left(-1, \frac{\int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha\beta} e^{-t} \ln t dt}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha\beta} e^{-t} dt} \right), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = \phi_{11}^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\phi_{11}\phi_{12}(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{12}^2(\alpha_4 - \alpha_2^2),$$

$$B_{12} = B_{21} = \phi_{11}\phi_{21}(\alpha_2 - \alpha_1^2) + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{12}\phi_{22}(\alpha_4 - \alpha_2^2),$$

$$B_{22} = \phi_{21}^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\phi_{21}\phi_{22}(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{22}^2(\alpha_4 - \alpha_2^2),$$

$$\phi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{6} \gamma \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / \pi & -\sqrt{6} \gamma (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / 2\pi \\ -\sqrt{6} \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / \pi & \sqrt{6} (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / 2\pi \end{pmatrix},$$

ϕ_{ij} 为 $\phi_{\alpha_1, \alpha_2}$ 的第 i 行, 第 j 列元素, $\alpha_k = E(X^k), k = 1, 2, 3, 4$.

证明 根据文献[20]的结论, 有

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{X}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1^2 & \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & \alpha_4 - \alpha_2^2 \end{pmatrix} \right), \tag{2}$$

参数估计量 $(\hat{\mu}, \hat{\beta}) = (\bar{X} - \gamma\sqrt{6}S/\pi, \sqrt{6}S/\pi)$, 定义映射:

$$\phi(x, y) = (x - \sqrt{6} \gamma (y - x^2)^{1/2} / \pi, \sqrt{6} (y - x^2)^{1/2} / \pi),$$

则 $(\hat{\mu}, \hat{\beta}) = \phi(\bar{X}, \bar{X}^2) = (\bar{X} - \sqrt{6} \gamma (\bar{X}^2 - \bar{X}^2)^{1/2} / \pi, \sqrt{6} (\bar{X}^2 - \bar{X}^2)^{1/2} / \pi)$, 有

$$(\mu, \beta) = \phi(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - \sqrt{6} \gamma (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{1/2} / \pi, \sqrt{6} (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{1/2} / \pi), \tag{3}$$

(2)式给出 $\sqrt{n}(\bar{X} - \alpha_1, \bar{X}^2 - \alpha_2)$ 的极限分布, 且(3)式在 (α_1, α_2) 处可微, 有

$$\phi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{6} \gamma \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / \pi & -\sqrt{6} \gamma (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / 2\pi \\ -\sqrt{6} \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / \pi & \sqrt{6} (\alpha_2 - \alpha_1^2)^{-1/2} / 2\pi \end{pmatrix}, \tag{4}$$

(4)式是(3)式在 (α_1, α_2) 处的偏导数, 因此, $\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu, \hat{\beta} - \beta)$ 是渐近正态的, 并且均值为 0, 协方差为

$$\phi_{(\alpha_1, \alpha_2)} \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1^2 & \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & \alpha_4 - \alpha_2^2 \end{pmatrix} \phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}^T = \mathbf{B}, \text{ 即:}$$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \right). \tag{5}$$

经过计算, 得 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中: $B_{11} = \phi_{11}^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\phi_{11}\phi_{12}(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{12}^2(\alpha_4 - \alpha_2^2)$,

$$B_{12} = B_{21} = \phi_{11}\phi_{21}(\alpha_2 - \alpha_1^2) + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{12}\phi_{22}(\alpha_4 - \alpha_2^2),$$

$$B_{22} = \phi_{21}^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\phi_{21}\phi_{22}(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + \phi_{22}^2(\alpha_4 - \alpha_2^2),$$

ϕ_{ij} 为 $\phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}$ 的第 i 行, 第 j 列元素. 已知 $\Gamma(x)$ 是可导函数, 且导函数为 $d\Gamma(x)/dx = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$, 所以

$$\frac{\partial g(\mu, \beta)}{\partial \mu} = -1, \frac{\partial g(\mu, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha\beta} e^{-t} \ln t dt}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha\beta} e^{-t} dt}, \text{ 因此, } \left(\frac{\partial g}{\partial \mu}, \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) = \left(-1, \frac{\int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha\beta} e^{-t} \ln t dt}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha\beta} e^{-t} dt} \right) = \mathbf{C}^T, \text{ 即}$$

g 在 (μ, β) 处可微, 根据 Delta 方法, $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\beta}$ 的极限分布可以推出 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 的极限分布, 即 $\sqrt{n}(g(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta))$

$\beta)) \xrightarrow{L} N(0, \mathbf{C}^T \mathbf{BC})$. 定理1得证.

由定理1可以看出, $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 作为熵风险度量的一个估计, 有较好的极限性质, 它渐近服从于正态分布, 同时可得 $\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}^T \mathbf{BC}}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$.

由于 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 中包含 Gamma 函数, 计算不方便, 由文献[21]的结论, 有 $\ln \Gamma(x) = -\gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} [x/k - \ln(1 + x/k)]$, 定义如下的估计量

$$g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta}) \triangleq \frac{1}{\alpha} \left\{ -\gamma(1 + \alpha\hat{\beta}) + \sum_{k=1}^m \left[\frac{1 + \alpha\hat{\beta}}{k} - \ln \left(1 + \frac{1 + \alpha\hat{\beta}}{k} \right) \right] \right\} - \hat{\mu},$$

其中, m 为常数, 当 m 充分大时, $g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 可作为熵风险度量 $g(\mu, \beta)$ 的一个估计, 有如下结果.

定理2 已知 X 服从位置参数为 μ , 尺度参数为 β 的 Gumbel 分布, (X_1, \dots, X_n) 为样本, 则 $g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 具有渐近正态性, $\sqrt{n}(g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g_m(\mu, \beta)) \xrightarrow{L} N(0, \mathbf{C}_1^T \mathbf{BC}_1)$, 其中, $\mathbf{C}_1^T = (-1, -\gamma + \sum_{k=1}^m (1/k - 1/(k+1 + \alpha\beta)))$.

证明 定理2的证明和定理1的证明类似.

由定理2可以看出, $g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 作为熵风险度量的另一个估计, 有较好的极限性质, 它渐近服从于正态分布, 同时可得 $\frac{\sqrt{n}(g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g_m(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}_1^T \mathbf{BC}_1}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$.

针对 Gamma 函数不方便计算的问题, 也可以使用 Stirling 公式来处理. 由 Stirling 公式, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \Gamma(1+z)/\sqrt{2\pi z} (z/e)^z = 1$, 定义 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) \triangleq \frac{1}{\alpha} \ln [\sqrt{2\pi\alpha\hat{\beta}} (\alpha\hat{\beta}/e)^{\alpha\hat{\beta}}] - \hat{\mu}$, 当 $\alpha\hat{\beta}$ 取值较大时, $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 也可作为熵风险度量 $g(\mu, \beta)$ 的一个估计, 有如下结果.

定理3 已知 X 服从位置参数为 μ , 尺度参数为 β 的 Gumbel 分布, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为样本, $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 具有渐近正态性, $\sqrt{n}(J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - J(\mu, \beta)) \xrightarrow{L} N(0, \mathbf{C}_2^T \mathbf{BC}_2)$, 其中, $\mathbf{C}_2^T = (-1, 1/(2\alpha\beta) + \ln \alpha\beta)$.

证明 定理3的证明和定理1的证明类似.

由定理3可以看出, $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 作为熵风险度量的一个估计, 有较好的极限性质, 它渐近服从于正态分布, 同时有 $\frac{\sqrt{n}(J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - J(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}_2^T \mathbf{BC}_2}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$.

注记 每个定理中的方差可以近似计算. 以定理1为例, 用 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 替代 $E(X^k)$ 即用样本矩替换 B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} 中所有的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 可以得到新的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{B}}$, 易知, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)$, 由依概率收敛的连续性, $\sqrt{\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}} \xrightarrow{P} \sqrt{\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}}$, 由 Slutsky 定理, $\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$, 同理可得

$$\frac{\sqrt{n}(g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g_m(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_1}} \xrightarrow{L} N(0, 1), \quad \frac{\sqrt{n}(J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - J(\mu, \beta))}{\sqrt{\mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_2}} \xrightarrow{L} N(0, 1).$$

2 中心极限定理的图像模拟

取位置参数 $\mu = 1$, 尺度参数 $\beta = 2$, 对定理1、定理2和定理3的中心极限定理进行模拟, α 分别取 1.00, 0.35, 0.50, $m = 10\ 000$, 分别取4个数据量, $n = 50, 100, 1\ 000, 2\ 000$, 为方便起见, 令 $X_n = \sqrt{n}(g(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta)) / \sqrt{\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}}$, $Y_n = \sqrt{n}(g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g_m(\mu, \beta)) / \sqrt{\mathbf{C}_1^T \mathbf{B} \mathbf{C}_1}$, $Z_n = \sqrt{n}(J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - J(\mu, \beta)) / \sqrt{\mathbf{C}_2^T \mathbf{B} \mathbf{C}_2}$, $\mathbf{Q}_2 =$

$\sqrt{n}(J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta)) / \sqrt{C_2^T BC_2}$. 模拟结果见图 1 和图 2, 其中直方图代表标准化估计量的值, 虚线代表直方图的核密度估计, 实线代表标准正态分布.

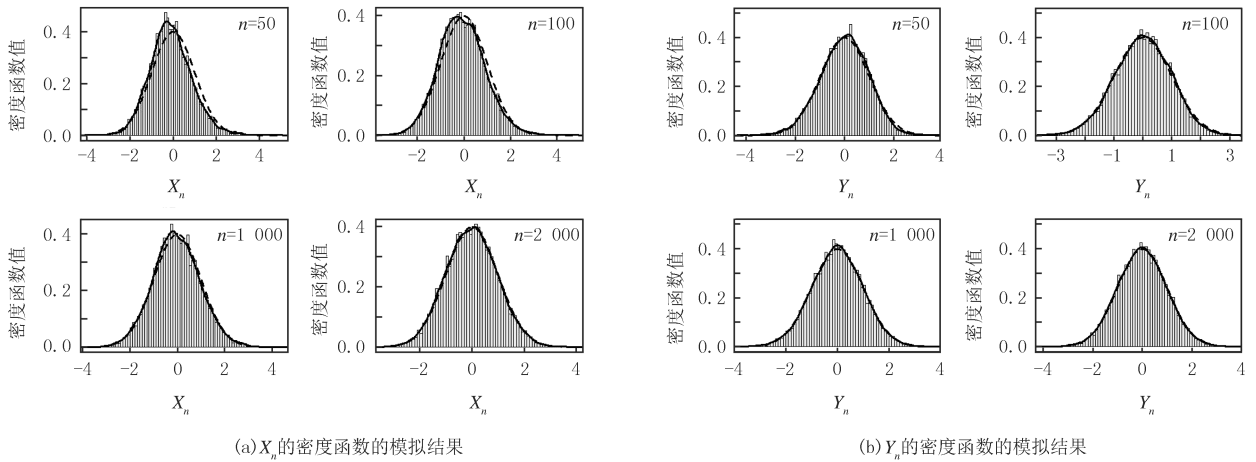


图1 X_n 和 Y_n 的中心极限定理模拟图

Fig.1 Simulation diagram of central limit theorem of X_n and Y_n

从图 1 和图 2(a)可以看出, 3 个熵风险度量估计量, 即 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$, $g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 和 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 的模拟效果都比较理想, 当样本量取 2 000 时, 模拟效果最好, 它们的核密度估计曲线(虚线)与标准正态分布曲线(实线)大致重合. 从图 1(a)和图 2(a)可以看出, 定理 1 和定理 3 的模拟最好, 核密度估计曲线与标准正态分布曲线基本重合, 即相比于 $g_m(\hat{\mu}, \hat{\beta})$, $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 和 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 更渐近服从于正态分布.

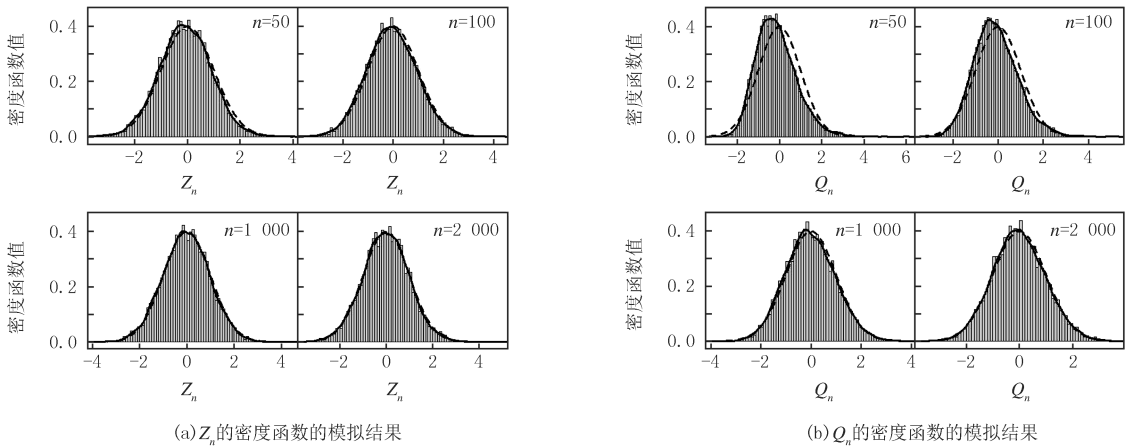


图2 Z_n 和 Q_n 中心极限定理模拟图

Fig.2 Simulation diagram of central limit theorem of Z_n and Q_n

由图 2(b)可以看出, 当样本量取 2 000 时, $J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta)$ 的模拟效果比较理想, 核密度估计曲线与标准正态分布曲线大致重合, 因此可以推测 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta}) - g(\mu, \beta)$ 渐近服从正态分布.

综上所述, 当位置参数 $\mu = 1$, 尺度参数 $\beta = 2$ 时, 定理 1、定理 2 和定理 3 的中心极限定理模拟效果都比较理想, 其中 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 和 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 表现最好. 因此说明当熵风险度量的估计量中涉及的 Gamma 函数不方便计算时, 可以用 Stirling 公式代替 Gamma 函数进行计算, 得到的结果更有实际意义.

3 结 论

本文首先考虑基于 Gumbel 分布的熵风险度量的估计量 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$, 得到了中心极限定理的结果, 同时给出了渐近正态分布的方差. 针对 $g(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 中包含 Gamma 函数, 计算不方便的问题, 提出了两种方法处理 Gamma 函数, 一个是对数 Gamma 的展开式, 一个是 Stirling 公式, 两种情况下均得到了理想的中心极限定理. 用样本矩替代原点矩, 同时得到了渐近正态分布中方差的估计. 最后通过随机模拟验证了主要结果, 并发

现了第 3 个估计量 $J(\hat{\mu}, \hat{\beta})$ 估计 $g(\mu, \beta)$ 的效果比较理想.

参 考 文 献

- [1] JORION P. Risk; Measuring the Risk in Value at Risk[J]. *Financial Analysts Journal*, 1996, 52(6): 47-55.
- [2] ARTZNER P, DELBAEN F, EBERJ M, et al. Coherent risk measures[J]. *Mathematical Finance*, 1999, 9(3): 203-228.
- [3] FOLLMER H, SCHIED A. Convex risk measures and trading constraints[J]. *Finance and Stochastics*, 2002, 6(4): 429-447.
- [4] ROCKAFELLER T, URYASEV S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. *Journal of Risk*, 2000, 2(3): 21-42.
- [5] ROCKAFELLER T, URYASEV S. Conditional value-at-risk for general loss distribution[J]. *Journal of Banking and Finance*, 2002, 26(7): 1443-1471.
- [6] ACERBI A, TASCHE D. On the coherence of expected shortfall[J]. *Banking Finance*, 2002, 26: 1487-1503.
- [7] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. *Bell System Technical Journal*, 1948, 27: 379-423.
- [8] YAGER R R. Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators[J]. *Information Sciences*, 1995, 82(3/4): 147-166.
- [9] FOLLMER H, KNISPTEL T. Entropic Risk Measures; Coherence vs. Convexity, Model Ambiguity, and Robust Large Deviations[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2011, 11(2/3): 333-351.
- [10] ONEN F, BAGATUR T. Prediction of Flood Frequency Factor for Gumbel Distribution Using Regression and GEP Model[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2017, 42(9): 3895-3906.
- [11] KEMALOGLU S A, SHAPIRO A F, TANK F, et al. Using fuzzy logic to interpret dependent risks[J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2018, 79: 101-106.
- [12] LIU G L, CHEN B Y, GAO Z K, et al. Calculation of Joint Return Period for Connected Edge Data[J]. *Water*, 2019, 11(2): 1-15.
- [13] AL-MASHAN N, JRADI A, ALDASTHI H, et al. The extreme waves in Kuwaiti territorial waters using measured data[J]. *Ocean Engineering*, 2019, 190: 1-11.
- [14] FOLLMER H, SCHIED A. Coherent and convex risk measures[J]. *Cancer Research*, 2010, 71(8 Supplement): 2075-2075.
- [15] 杨继平, 王中魁. 基于期望效用-熵风险度量的决策者风险态度[J]. *北京航空航天大学学报(社会科学版)*, 2010, 23(5): 53-56.
YANG J P, WANG Z K. Decision Maker's Risk Attitude Based on Expected Utility-Entropy Measure of Risk[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics(Social Science Edition)*, 2010, 23(5): 53-56.
- [16] 袁博, 王建国. 股票熵风险度量方法研究[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2011, 28(3): 401-405.
YUAN B, WANG J G. Study on the Entropy-based Risk Measure Method[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2011, 28(3): 401-405.
- [17] YAN J. Estimations and asymptotic behaviors of coherent entropic risk measure for sums of random variables[J]. *Statistics and Probability Letters*, 2014, 91(8): 171-180.
- [18] CHEN Z P, HU Q H. On Coherent Risk Measures Induced by Convex Risk Measures[J]. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2018, 20(2): 673-698.
- [19] BRANDTNER M, KURSTEN W, RISCHAU R. Entropic risk measures and their comparative statics in portfolio selection: Coherence vs. convexity[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 264(2): 707-716.
- [20] VAN DER VAART A W. *Asymptotic Statistics*[M]. New York: Cambridge University Press, 1998.
- [21] DUTKA J. The Early History of the Factorial Function[J]. *Archive for History of Exact Sciences*, 1991, 43(3): 225-249.

Parameter estimation of entropic risk measure based on the Gumbel distribution and asymptotic behaviors

Yan Jun, Yan Wanchen

(School of Mathematics Science, Yangzhou University, Yangzhou 225000, China)

Abstract: Entropic risk measure is widely applied to the field of financial risk, and some achievements have been made. However, there are few researches on the combination of Gumbel distribution and entropic risk measure. We consider the asymptotic behaviors of entropic risk measure estimator based on Gumbel distribution and obtain the asymptotic normality of three different estimators. In the end, the relevant stochastic simulation results are given to verify the correctness of the theoretical results. The results show that the simulation results of the three estimators are ideal.

Keywords: entropic risk measure; Gumbel distribution; central limit theorem

[责任编辑 陈留院 赵晓华]