第 43 卷 第 2 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.43 No.2
2015 年 3 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Mar.2015

文章编号:1000-2367(2015)02-0007-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.02.002

模糊随机固定资产模型解的存在唯一性

张启敏[1,2],申芳芳[1],杨洪福[1]

(1.北方民族大学 数学与信息科学学院,银川 750021;2.宁夏大学 数学与计算机学院,银川 750021)

摘 要:介绍了一类模糊随机固定资产模型,它同时受两种不确定性因素的影响,即随机和模糊因素.漂移系数和扩散系数在初始有界的条件(弱于线性增长条件)和 Lipschitz 条件下,运用 Picard 迭代的方法证明了模糊随机固定资产模型解的存在性和唯一性.并且给出 Picard 迭代近似解误差的估计式.

关键词:存在性;唯一性;模糊随机固定资产模型;Picard 迭代

中图分类号:O211.63 **文献标志码**:A

根据目前的调查,固定资产模型已经越来越受经济学家的欢迎.最重要的原因是,它提供了一个吸引人的分析投资波动框架.张启敏等在文献[1-2]中研究如下随机固定资产模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,t)K(a,t)+f(a,t,K(a,t))+g(a,t,K(a,t))\dfrac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t}, & \text{在 } Q \text{ 中}, \quad (1)\\ K(0,t)=\phi(t)=\gamma(t)A(t)F(L(t),\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a), & t\in[0,T],(2)\\ K(a,0)=K_0(a), & a\in[0,A],(3)\\ N(t)=\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a, & t\in[0,T],(4)\end{cases}$$

其中 $Q=[0,A]\times[0,T]$.$t\in[0,T]$ 表示时间,$a\in[0,A]$,A 表示资本使用的最大年限、最大役龄,$K(a,t)$ 为 t 时刻年龄为 a 的资本密度函数.$N(t)$ 为资本总量,$\mu(a,t)$ 为资本折旧率,$\gamma(t)$ 为资本积累率;$0<\gamma(t)<1$,$A(t)$ 为进步系数,$N(t)=\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a$ 是在 t 时刻资本总数.

然而,在现实生活中,我们研究的模型不仅仅受到随机环境的影响,还会受到模糊不确定性的影响.例如,在经济统计学中,资本的折旧率和累积率等都是通过统计学的方法统计出来的,然而在统计中研究经济问题都是在给定的置信度下,通过数据计算得出置信区间,因此我们的资本密度也是在一个区间上的,换句话说资本密度是模糊的.还有在语言表达上是模糊的,资本的折旧率和累积率为“10% 左右”,描述资本的“大小”或“多少”等等.因此,随机微分方程不可能精确描述带有模糊的现实问题.为了给出模型的合理表达形式,有必要采用模糊随机微分方程来刻画固定资产模型.出于探索经济学中的模糊不确定性问题,我们提出如下与年龄相关的模糊随机固定资产模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,t)K(a,t)+f(a,t,K(a,t))+g(a,t,K(a,t))\dfrac{\mathrm{d}W_t}{dt}, & \text{在 } Q \text{ 中}, \quad (5)\\ K(0,t)=\phi(t)=\gamma(t)A(t)F(L(t),\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a), & t\in[0,T],(6)\\ K(a,0)=K_0(a), & a\in[0,A],(7)\\ N(t)=\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a, & t\in[0,T].(8)\end{cases}$$

尽管模糊随机微分方程已被广泛研究[3-10].然而,模糊随机固定资产模型有它们本身的特征,希望充分

收稿日期:2014-06-20;**修回日期**:2014-11-23.

基金项目:国家自然科学基金(11261043);宁夏回族自治区自然科学基金(NZ13051).

作者简介:张启敏(1964-),女,宁夏银川人,宁夏大学教授,博士生导师,研究方向为应用概率统计与非线性动力系统,E-mail:zhangqimin64@sina.com.

利用这些特征得到相应的准则.本文的主要目的是讨论与年龄相关的模糊随机固定资产模型,系数在初始有界和 Lipschitz 条件下解的存在性和唯一性.

1 预备知识

$V = H^1([0,A]) \equiv \{\varphi \mid \varphi \in L^2([0,A]), \frac{\partial \varphi}{\partial a} L^2([0,A])$,其中$\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ {是广义偏导数}. V 是 Sobolev 空间. $H = L^2([0,A])$,满足 $V \cup H \equiv H' \cup V'$. $V' = H^{-1}([0,A])$ 是 V 的对偶空间. 定义 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 V, V' 上的范数;$\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 V 与 V' 空间的内积,$(\cdot,\cdot)$ 是 H 空间上的数量积. S 是完备的 Hilbert 空间.

W_t 是定义在完备的概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上且取值在可分的 Hilbert 空间 S 上的 Wiener 过程,具有增量协方差算子 G. $B \in \mathscr{L}(S,H)$ 是所有从 S 到 H 的有界线性算子空间,$\|B\|_2$ 表示 Hilbert-Schmidt 范数[11],即 $\|B\|_2^2 = \mathrm{tr}(BGB^{\mathrm{T}})$.

设 $\mathscr{H}(V) = \{u: V \to [0,1] \mid u$ 满足以下性质(i)-(iv)$\}$(见文献[12]):
(i)u 是正规的,即存在 $x_0 \in V$,使得 $u(x_0) = 1$;(ii)u 模糊凸的,即对任意 $x,y \in V, r \in [0,1], u(rx + (1-r)y) \geq \min(u(x),u(y))$;(iii)$u$ 是上半连续的;(iv)$[u]^0 = \overline{\{x \in V \mid u(x) > 0\}}$ 是紧的.

容易知道,模糊数的任意水平集为闭区间,$[u]^r = [u^-(r), u^+(r)]$,称 $u^-(r), u^+(r)$ 为 u 的支撑函数.

引理 1(模糊数表示定理) 设 u 为模糊数,那么

(i)$u^-(r)$ 关于 r 是$(0,1]$ 上左连续增函数;(ii)$u^+(r)$ 关于 r 是$(0,1]$ 上左连续减函数;(iii)$u^-(1) \leq u^+(1)$;(iv)$u^-(r), u^+(r)$ 在 $r=0$ 右连续.

反之,对任何满足上述条件的 $a(r), b(r)$,必然存在模糊数 u 使得$[u]^r = [a(r), b(r)], r \in [0,1]$.

根据 Zadeh 的扩张原理定义模糊数的函数,对于 $u,v \in \mathscr{H}(V), \lambda \in \mathbf{R}$,线性运算的 r 水平集满足区间运算式$[u+v]^r = [u]^r + [v]^r, [\lambda u]^r = \lambda[u]^r$,由于 $u - u = u + (-1) \neq 0$,$\mathscr{H}(V)$ 不构成线性空间. 称函数对$[w^-(r), w^+(r)]$ 为 u 与 v 的广义 H- 差,如果 $w^-(r) = u^-(r) - v^-(r), w^+(r) = u^+(r) - v^+(r)$,记为 $w = u \ominus v$. 进一步,如果$[w^-(r), w^+(r)]$ 满足引理 1 的条件,则构成一个模糊数,成为 H- 差.

设 $\mathscr{K}(V)$ 是 V 中的非空、紧的凸子集. 如果 $A \in \mathscr{K}(V)$,I_A 是 $\mathscr{K}(V)$ 的特征函数,那么 $I_A \in \mathscr{H}(V)$. 设 $u, v \in \mathscr{H}(V)$,则 $\mathrm{d}_\infty(u,v) := \sup\limits_{r \in [0,1]} \mathrm{d}_V([u]^r, [v]^r)$,其中$[u]^r = \{a \in V \mid u(a) > r, 0 < r \leq 1\}$ 是 u 的 r 水平集,d_V 是定义在 $\mathscr{K}(V)$ 上的 Hausdorff 距离,即 $\mathrm{d}_V(A,B) := \max \leq \{\sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} \|a - b\|, \sup\limits_{b \in B} \inf\limits_{a \in A} \|a - b\|\}$,其中 $\forall A, B \in \mathscr{K}(V)$,用 $\|\cdot\|$ 表示 V 中的范数,且$(\mathscr{K}(V), \mathrm{d}_V)$ 是一个完备的,可分的距离空间. 由此知$(\mathscr{H}(V), \mathrm{d}_\infty)$ 为一个距离空间.

设 $\mathscr{A}_\rho$ 为 $\mathscr{H}(V)$ 上由距离 d_∞ 生成的 σ 域,可测映射 $K: (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathscr{H}(V), \mathscr{A}_\rho)$ 称为模糊随机变量. 如果 $\mathrm{P}(K_1 = K_2) = 1$,则称 K_1 与 K_2 随机等价. 若模糊随机变量 K_1 满足 $E\mathrm{d}_\infty^2(K_1, \langle 0 \rangle) < \infty$,则称模糊随机变量 K 为二阶的,二阶模糊随机变量的全体记为$\mathscr{L}^2$,且$\mathscr{L}^2$ 是完备的. 若模糊随机变量组$\{K_n\}$ 与 K 都是二阶的,$E\mathrm{d}_\infty^2(K_n, K) \to 0$.

为了证明本文的主要结论,我们给出以下假设条件:

(c0)$\mu(t,x)$ 非负可测,$\gamma(t)$ 和 $A(t)$ 非负连续,并且

$$\begin{cases} 0 \leq \mu(a,t) \leq \mu_0 < \infty, & \text{在 } Q \text{ 中}, \\ \gamma(t)A(t) \leq \eta, \eta \geq 0, & \text{在}[0,T] \text{ 中}. \end{cases} \tag{9}$$

$$(\mathrm{c1}) \begin{cases} F(L,N) \geq 0 & (F(L,0) = 0), \\ 0 < \dfrac{\partial F}{\partial L} < F_1, & \text{其中 } F_1 \text{ 是大于 0 的常数}. \end{cases} \tag{10}$$

令 $f: Q \times \Omega \times \mathscr{H}(V) \to \mathscr{H}(V)$ 是模糊随机过程;$g: Q \times \Omega \times \mathscr{H}(V) \to \mathscr{L}(S,H)$ 是一族几乎处处有定义的非线性算子. $\forall (a,t) \times Q, u, v \in \mathscr{H}(V)$,则 $f(a,t,K)$ 和 $g(a,t,K)$ 满足:

(c2)(Lipschitz 条件)存在一个常数 $L > 0$,对 $\forall u, v \in \mathscr{H}(V)$,使得

$$\mathrm{d}_\infty^2(f(a,t,\omega,u), f(a,t,\omega,v)) \vee \|g(a,t,\omega,u) - g(a,t,\omega,v)\|_2^2 \leq L\mathrm{d}_\infty^2(u,v). \tag{11}$$

(c3) 存在一个常数 $C>0$，对 $\forall u,v\in\mathscr{H}(V)$，使得

$$\mathrm{d}_\infty^2(f(a,t,\omega,\langle 0\rangle)\langle 0\rangle),\ \vee\ \| g(a,t,\omega,\langle 0\rangle)\|_2^2\le C. \tag{12}$$

(c4) 存在一个常数 $C>0$，对 $\forall u,v\in\mathscr{H}(V)$，使得

$$\mathrm{d}_\infty^2(\frac{\partial u}{\partial a},\frac{\partial v}{\partial a})\le\lambda\mathrm{d}_\infty^2(u,v). \tag{13}$$

2　解的存在唯一性

在本节中我们将考虑非线性随机模糊微分方程随机系统，将(1) ～ (4) 写成如下形式：

$$\begin{cases}\mathrm{d}_tK(a,t)+\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial a}\mathrm{d}t\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}-\mu(a,t)K(a,t)\mathrm{d}t+\\ f(a,t,K(a,t))dt+\langle g(a,t,K(a,t))\mathrm{d}W_t\rangle,\text{在 Q 中},\\ K(0,a)\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}K_0(a),\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\mathrm{d}_tK(a,t)$ 是 $K(a,t)$ 相对于 t 的微分，$\mathrm{d}_tK(a,t)=\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial t}\mathrm{d}t$.

定义 1　模糊随机过程 $K_t:Q\times\Omega\to\mathscr{H}(V)$ 被称为方程(14) 的强解，如果满足：

1) K_t 是一个 $\mathscr{F}_t$- 适应的模糊随机变量；2) K_t 是一个 d_∞- 连续的模糊随机变量；3) 满足

$$K_t\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}K_0-\int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}\mathrm{d}s-\int_0^t\mu(a,s)K_s\mathrm{d}s+\int_0^tf(a,s,K_s)\mathrm{d}s+\langle\int_0^tg(a,s,K_s)\mathrm{d}W_s\rangle, \tag{15}$$

其中右边第 2 项到第 4 项为模糊随机积分，$f(a,t)$ 通常是正常函数的模糊扩张，也可含有模糊参数；由于 Wiener 运动不是有限变差的，为了保证积分有意义，最后一项为 Itô 随机积分.

方程(14) 的解 $K_{1t}:Q\times\Omega\to\mathscr{H}(V)$ 被称为唯一的，如果其他任意的解 K_{2t} 与 K_{1t} 是无区别的，即 $K_{1t}\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}K_{2t}$.

运用逐次逼近法证明方程(14) 解的存在性，首先，定义一个 Picard 序列 $\{K_t{}^n\}_n=0^\infty$，如下：

$$\begin{cases}K_t^0\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}K_0, & n=0,\\ K^{tn}\overset{\mathrm{QP.1}}{=\!=\!=}K_0-\displaystyle\int_0^t\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}\mathrm{d}s-\int_0^t\mu(a,s)K_s^{n-1}\mathrm{d}s+\\ \displaystyle\int_0^tf(a,s,K_s{}^n-1)\mathrm{d}s+\langle\int_0^tg(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}W_s\rangle,n=1,2,\cdots,\end{cases} \tag{16}$$

其中 $K_t^n\in\mathscr{L}^2$ 是 d_∞- 连续的模糊随机过程.

由(16) 定义的 Picard 逼近 $K_t{}^n$ 是模糊随机过程，且 $K_t{}^n$ 是非预测的和满足 $E\int_0^T\mathrm{d}_\infty^2(K_t{}^n,\langle 0\rangle)\mathrm{d}t<\infty$.

引理 2　假定方程(14) 满足条件(c0) ～ (c4). 定义一个如式(16) 的数列$\{K_t^n\}_n=1^\infty$，则有

$$E\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{d}_\infty^2(K_t^n,\langle 0\rangle)\le(C_1+C_2TE\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle))\mathrm{e}^{C_2T},n\in\mathbf{N},$$

其中 $C_1=5[E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)+2CT^2+8CT]$ 和 $C_2=5(2LT+8L+\mu_0{}^2T+T\lambda)$.

证明　首先，定义 $x_n(t)=E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2(K_u{}^n,\langle 0\rangle)$ 对于 $n\in\mathbf{N}$ 和 $(a,t)\in Q$，因此，可以得到

$$x_n(t)=E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2\Big(K_0-\int_0^u\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}\mathrm{d}s-\int_0^u\mu(a,s)K_s^{n-1}1\mathrm{d}s+\int_0^uf(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}s+$$

$$\langle\int_0^ug(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}W_s\rangle,\langle 0\rangle\Big)\le 5\Big[E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)+E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}\mathrm{d}s,\langle 0\rangle)+$$

$$E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u(a,s)K_s^{n-1}\mathrm{d}s,\langle 0\rangle)+E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2(\int_0^uf(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}s,\langle 0\rangle)+$$

$$E\sup_{u\in[0,t]}\mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}W_s\rangle,\langle 0\rangle)\Big].$$

利用条件(c0) 和文献[3]，还有初等不等式，可得

$$x_n(t) \le 5[E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle) + tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + \mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s +$$

$$2tE\int_0^t \{\mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,K_s^{n-1}),f(a,s,\langle 0\rangle)) + \mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,\langle 0\rangle),\langle 0\rangle)\}\mathrm{d}s +$$

$$8E\int_0^t \{\mathrm{d}_\infty^2(\langle g(a,s,K_s^{n-1}\rangle,\langle g(a,s,\langle 0\rangle)\rangle)) + \mathrm{d}_\infty^2(\langle g(a,s,\langle 0\rangle)\rangle,\langle 0\rangle)\}\mathrm{d}s].$$

应用假设条件(c2) ~ (c4),得到

$$x_n(t) \le 5[E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle) + t\lambda E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + \mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + 2tLE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s +$$

$$8LE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + 2Ct^2 + 8Ct] \le 5[E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle) + 2CT^2 + 8CT + (2LT +$$

$$8L + \mu_0^2 T + T\lambda t)E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s] \le C_1 + C_2\int_0^t x_{n-1}(s)\mathrm{d}s.$$

由最后一个不等式我们有$\max\limits_{1\le n\le k} x_n(t) \le C_1 + C_2\int_0^t \max\limits_{1\le n\le k} x_{n-1}(s)\mathrm{d}s$ 对于 $k \in \mathbf{N}$. 因此$\max\limits_{1\le n\le k} x_{n-1}(t) \le x_0(t) + \max\limits_{1\le n\le k} x_n(t) = E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle) + \max\limits_{1\le n\le k} x_n(t)$,由 $k \in \mathbf{N}$ 可以进一步得到$\max\limits_{1\le n\le k} x_n(t) \le C_1 + C_2 TE\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle) + C_2\int_0^t \max\limits_{1\le n\le k} x_n(s)\mathrm{d}s, t \in [0,T]$.

利用 Gronwall 不等式,得$\max\limits_{1\le n\le k} x_n(t) \le [C_1 + C_2 TE\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)\mathrm{e}^{C_2 t}, t \in [0,T]$. 因此 $x_n(T) \le [C_1 + C_2 TE\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)\mathrm{e}^{C_2 T}$.

下面我们给出解的存在唯一性定理.

定理 1 假设前面的假设条件都成立,那么方程(14) 存在唯一的强解 K_t.

证明 首先,定义 $y_n(t) = E\sup\limits_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^n, K_u^{n-1})$,对于 $n \in \mathbf{N}$ 和$(a,t) \in Q$ 对于 $t \in [0,T]$,有

$$y_1(t) = E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^1,K_0) = E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(K_0 - \int_0^u \frac{\partial K_0}{\partial a}\mathrm{d}s - \int_0^u \mu(a,s)K_0\mathrm{d}s + \int_0^u f(a,s,K_0)\mathrm{d}s +$$

$$\langle\int_0^u g(a,s,K_0)\mathrm{d}W_s\rangle, K_0) = E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(-\int_0^u \frac{\partial K_0}{\partial a}\mathrm{d}s - \int_0^u \mu(a,s)K_0\mathrm{d}s + \int_0^u f(a,s,K_0)\mathrm{d}s +$$

$$\langle\int_0^u g(a,s,K_0)\mathrm{d}W_s\rangle,\langle 0\rangle) \le 4[E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u \frac{\partial K_0}{\partial a}\mathrm{d}s,\langle 0\rangle) + E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u \mu(a,s)K_0\mathrm{d}s,\langle 0\rangle) +$$

$$E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(\int_0^u f(a,s,K_0)\mathrm{d}s,\langle 0\rangle) + E\sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(\langle\int_0^u g(a,s,K_0)\mathrm{d}W_s\rangle,\langle 0\rangle)].$$

利用条件(c0) 和文献[3],可得

$$y_1(t) \le 4[tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(\frac{\partial K_0}{\partial a},\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + \mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(y_0,\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + 2tE\int_0^t \{\mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,K_0),f(a,s,\langle 0\rangle)) +$$

$$\mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,\langle 0\rangle),\langle 0\rangle)\}\mathrm{d}s + 8E\int_0^t \{\mathrm{d}_\infty^2(\langle g(a,s,K_0)\rangle,\langle g(a,s,\langle 0\rangle)\rangle) +$$

$$\mathrm{d}_\infty^2(\langle g(a,s,\langle 0\rangle)\rangle,\langle 0\rangle)\rangle\}\mathrm{d}s].$$

应用(c2) ~ (c4),得到

$$y_1(t) \le 4[t\lambda E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + \mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)\mathrm{d}s + 2Ct^2 +$$

$$8Ct + 2L(t+4)E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)\mathrm{d}s] \le 4[2CT + 8C +$$

$$(2L(T+4) + \mu_0^2 T + \lambda T)E\mathrm{d}_\infty^2(K_0,\langle 0\rangle)]t.$$

因此 $y_1(t) \le M_1 t, \forall t \in [0,T]$,其中 $M_1 = 4[2CT + 8C + (2L(T+4) + \mu_0^2 T + \lambda T)] < \infty$.

利用条件(c0) 和文献[3],还有初等不等式,类似可以得到

$$y_{n+1}(t) \le 4[tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(\frac{\partial K_s^n}{\partial a},\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a})\mathrm{d}s + tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,K_s^n),f(a,s,K_s^{n-1})\mathrm{d}s +$$

$$\mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^n,K_s^{n-1})\mathrm{d}s + 4E\int_0^t \mathrm{d}^2(\langle g(a,s,K_s^n)\rangle,\langle g(a,s,K_s^{n-1})\rangle)\mathrm{d}s].$$

由假设条件(c2) ~ (c4)，有

$$y_{n+1}(t) \le 4(t\lambda + \mu_0^2 t + tL + 4L)E\int_0^t d_\infty^2(K_s^n, K_s^{n-1})ds \le 4(T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L)\int_0^t E\sup_{u\in[0,s]} d_\infty^2(K_u^n, K_u^{n-1})ds \le 4(T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L)\int_0^t y_n(s)ds.$$

因此，可以推断

$$y_n(t) \le \frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{(M_2 t)^n}{n!}, t\in[0,T], n\in\mathbf{N}, \tag{17}$$

其中 $M_2 = 4[T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L] < \infty$.

由 Chebyshev 不等式和方程(16) 知

$$P\left(\sup_{u\in[0,T]} d_\infty^2(K_u^n, K_u^{n-1}) > \frac{1}{3^n}\right) \le 3^n y_n(T) \le \frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{(4M_2 t)^n}{n!}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4M_2 t)^n}{n!}$ 是收敛的，由 Borel-Cantelli 引理知，几乎对所有 $\omega\in\Omega$，存在一个正整数 $n_0 = n_0(\omega)$ 使得

$$\sup_{u\in[0,T]} d_\infty(K_u{}^n(\omega), K_u^{n-1}(\omega)) \le \frac{1}{\sqrt{3}^n}, \text{当 } n\ge n_0.$$

其中 $n\ge n_0$，那么在概率 1 的意义下，$\{K_n(\cdot,\omega)\}$ 在 $(a,t)\in Q$ 上一致收敛到 d_∞ - 连续函数 $K_t\equiv K(\cdot,\omega): Q\to\mathscr{H}(V)$，$\forall\omega\in\Omega_c$. 则 K_t 是连续的和 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in n[0,T]}$ - 适应模糊随机过程.

由引理 2 知对于每个 $(a,t)\in Q$，$\{K_n(\cdot,\omega)\}_{n\ge1}$ 是 $\mathscr{L}$ 中的一个 Cauchy 列，所以在 $\mathscr{L}$ 中有 $\forall(a,t)\in Q$，$Ed_\infty^2(K(a,t),\langle 0\rangle) < \infty$，$E\int_0^t d_\infty^2(K(a,t),\langle 0\rangle) \le T\sup_{t\in[0,T]} Ed_\infty^2(K(a,t),\langle 0\rangle) < \infty$.

下面证 K_t 满足方程(14). 对每个 $(a,t)\in Q$

$$Ed_\infty^2\left(K_t, K_0 - \int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}ds - \int_0^t\mu(a,s)K_s ds + \int_0^t f(a,s,K_s)ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s)dW_s\rangle\right) = 0. \tag{18}$$

利用基本不等式，可得

$$\begin{aligned}&Ed_\infty^2\left(K_t, K_0 - \int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}ds - \int_0^t\mu(a,s)K_s ds + \int_0^t f(a,s,K_s)ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s)dW_s\rangle\right) \le 2[Ed_\infty^2(K_t, K_t^n) + \\ &Ed_\infty^2(K_0 - \int_0^t\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}ds - \int_0^t\mu(a,s)K_s^{n-1}ds + \int_0^t f(a,s,K_s^{n-1})ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s^{n-1})dW_s\rangle, K_0 - \\ &\int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}ds - \int_0^t\mu(a,s)K_s ds + \int_0^t f(a,s,K_s)ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s)dW_s\rangle)].\end{aligned} \tag{19}$$

因为 $Ed_\infty^2(K_t, K_t^n)\to 0$，式子(19) 右边第 2 部分也收敛于 0. 对于第 2 部分，根据文献[3] 和假设条件(c2) ~ (c4)，可得

$$\begin{aligned}&Ed_\infty^2(-\int_0^t\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}ds - \int_0^t\mu(a,s)K_s^{n-1}ds + \int_0^t(a,s,K_s^{n-1})ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s^{n-1})dW_s\rangle, \int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}ds - \\ &\int_0^t\mu(a,s)K_s ds + \int_0^t f(a,s,K_s)ds + \langle\int_0^t g(a,s,K_s)dW_s\rangle) \le 4[Ed_\infty^2(\int_0^t\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}ds, \int_0^t\frac{\partial K_s}{\partial a}ds) + \\ &Ed_\infty^2(\int_0^t\mu(a,s)K_s^{n-1}ds, \int_0^t\mu(a,s)K_s ds) + Ed_\infty^2(\int_0^t(a,s,K_s^{n-1})ds, \int_0^t f(a,s,K_s)ds) + \\ &Ed_\infty^2(\langle\int_0^t g(a,s,K_s^{n-1})dW_s\rangle, \langle\int_0^t g(a,s,K_s)dW_s\rangle))] \le 4[tE\int_0^t d_\infty^2(\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}, \frac{\partial K_s}{\partial a})ds + \\ &\mu_0^2 tE\int_0^t d_\infty^2(K_s^{n-1}, K_s)ds + tE\int_0^t d_\infty^2(f(a,s,K_s^{n-1}), f(a,s,K_s))ds + \\ &4E\int_0^t d_\infty^2(\langle g(a,s,K_s^{n-1})\rangle, \langle g(a,s,K_s)\rangle)ds \le 4(t\lambda + \mu_0^2 t + Lt + 4L)\cdot \\ &E\int_0^t d_\infty^2(K_s^{n-1}, K_s)ds \le 4(T\lambda + \mu_0^2 T + LT + 4L)E\int_0^T d_\infty^2(K_s^{n-1}, K_s)ds,\end{aligned}$$

对于每个 $(a,t)\in Q$，由于考虑的过程是 d_∞ - 连续的，故方程(18) 满足

$$\mathrm{d}_\infty(K_t, K_0 - \int_0^t \frac{\partial K_s}{\partial a}\mathrm{d}s - \int_0^t \mu(a,s)K_s\mathrm{d}s + \int_0^t (a,s,K_s)\mathrm{d}s + \langle \int_0^t g(a,s,K_s)\mathrm{d}W_s \rangle) \xlongequal{\mathrm{QP}.1} 0.$$

因此 K_t 满足方程(14).

下面证明 K_t 是唯一的. 假设 $K_t, X_t : Q \times \Omega \to \mathcal{H}(\mathrm{V})$ 是方程(14) 的强解. 对于每个 $t \in [0,T]$ 定义 $y(t) := E \sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u, X_u)$. 显然对每一个$(a,t) \in Q$,可得

$$y(t) \le 4(t\lambda + \mu_0^2 t + L + 4L)E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s, X_s)\mathrm{d}s \le 4(T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L)\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

应用Gronwall不等式,可得 $y(t) = 0$ 对于 $\forall (a,t) \in Q$. 可得到如下结论 $\sup_{(a,t)\in Q} \mathrm{d}_\infty(K_t, X_t) \xlongequal{\mathrm{QP}.1} 0$,定理得证.

上面的证明中用到 Picard 迭代来逼近方程(14) 的解,下面的定理给出了 Picard 迭代的估计.

定理 2 对于假设条件(c0) ~ (c4) 成立,设 K_t 是方程(14) 的唯一解,$\{K_t^n\}_n = 1^\infty$ 是(16) 式定义的 Picard 迭代,则

$$E \sup_{(a,t)\in Q} \mathrm{d}_\infty^2(K_t^n, K_t) \le \frac{2M_1}{M_2} \cdot \frac{(TM_2)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{2TM_2}, \tag{20}$$

对所有的 $n \ge 1, M_1, M_2$ 为常数与定理 1 中定义的相同.

证明 首先,定义 $r(t) = E \sup_{u\in[0,t]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^n, K_u)\ \forall t \in [0,T]$,由文献[3] 和假设条件(c0),可得

$$r(t) \le 4[tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(\frac{\partial K_s^{n-1}}{\partial a}, \frac{\partial K_s}{\partial a})\mathrm{d}s + \mu_0^2 tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1}, K_s)\mathrm{d}s + tE\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(f(a,s,K_s^{n-1}), f(a,s,K_s)\mathrm{d}s +$$

$$4E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2 t(\langle g(a,s,K_s^{n-1})\rangle, \langle g(a,s,K_s)\rangle)\mathrm{d}s].$$

由假设条件(c2) ~ (c4)

$$r(t) \le 4(t\lambda + \mu_0^2 t + tL + 4L)E\int_0^t \mathrm{d}_\infty^2(K_s^{n-1}, K_s)\mathrm{d}s \le 4(T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L) \cdot$$

$$\int_0^t E \sup_{u\in[0,s]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^{n-1}, K_u)\mathrm{d}s \le 8(T\lambda + \mu_0^2 T + TL + 4L)\int_0^t [E \sup_{u\in[0,s]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^{n-1}, K_u^n) +$$

$$E \sup_{u\in[0,s]} \mathrm{d}_\infty^2(K_u^n, K_u)]\mathrm{d}s.$$

应用(16) 式,得到 $r(t) \le 2M_2\int_0^t y_n(s)\mathrm{d}s + 2M_2\int_0^t r(s)\mathrm{d}s \le 2M_1M_2^2 \cdot \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} + 2M_2\int_0^t r(s)\mathrm{d}s$. 再利用 Gronwall 不等式,即可以得到定理中的不等式(20).

在实际应用和计算中,想求得与年龄相关的模糊随机固定资产模型的解析解是比较困难的,而常常求系统的近似解,因而对 Picard 迭代的估计也是我们求解的一个重要方法. 对于一个给定的误差 $\epsilon > 0$,可以确定不等式(20) 左边小于 ϵ 的 n,进而由 Picard 迭代得到 $K_t^0, K_t^1, \cdots, K_t^n$. 由定理 2 得,

$$E \sup_{u\in[0,s]} \mathrm{d}_\infty^2(K_t^n, K_t) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

于是就可以得到与年龄相关的模糊随机固定资产模型的近似解 K_t^n.

致谢:感谢编委和审稿人提出了宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Zhang Q, Rathinasamy A. Convergence of numerical solutions for a class of stochastic age-dependent capital system with random jump magnitudes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(14): 7297-7305.

[2] Zhang Q, Pang W, Leung P. Exponential stability of numerical solutions for a class of stochastic age-dependent capital system with Poisson jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(12): 3369-3377.

[3] Malinowski M T. Strong solutions to stochastic fuzzy differential equations of Itôtype[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 55(3): 918-928.

[4] Malinowski M T. Itôtype stochastic fuzzy differential equations with delay[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(6): 692-701.

[5] Malinowski M T, Michta M. Stochastic fuzzy differential equations with an application[J]. Kybernetika, 2011, 47(1): 123-143.

[6] Colubi A, Dominguez-Menchero J S, Lopez-Diaz M, et al. A $D_E[0,1]$ representation of random apper semicontinuous functions [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2002, 130(11): 3237-3242.

[7] Feng Y. Fuzzy stochastic differential systems[J]. Fuzzy Sets and System,2000,115(3):351-363.

[8] Puri M L, Ralescu D A. Fuzzy random variables[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1986,114(2):409-422.

[9] Kim Y K. Measurability for fuzzy valued functions[J]. Fuzzy Set and System,2002,129(1):105-109.

[10] Fei W. Existence and uniqueness for solutions to fuzzy stochastic differential equations driven by local martingales under the non-Lipschitzian condition[J]. Nonlineaqr Analysis,2013,43(13):276-279.

[11] 石秀明,张启敏,李西宁. 基于 POD 方法具有 Poisson 跳随机种群系统的数值解讨论[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2014,42(5):7-15.

[12] Bica A M, Popescu C. Numerical solutions of the nonlinear fuzzy Hammerstein-Volterra delay integral equations[J]. Information Sciences,2013,223:236-255.

Existence, uniqueness for stochastic fuzzy age-dependent capital system

ZHANG Qimin[1,2], SHEN Fangfang[1], YANG Hongfu[1]

(1. School of Mathematics and Information Science, Beifang University for Nationalities, Yinchuan 750021, China;
2. School Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In this paper, a class of stochastic fuzzy age-dependent capital system is investigated. Where the phenomena is subjected to two kinds of uncertainties: stochastic and fuzziness. Under the initial bounded condition, which is weaker than linear growth condition, and Lipschitz condition with the drift coefficient and the diffusion coefficient, we obtain existence and uniqueness of solution to stochastic fuzzy age-dependent capital system based on the Picard iteration. Finally, an estimation on the error of approximate solution of the Picard iteration is given.

Keywords: existence; uniqueness; stochastic fuzzy age-dependent capital system; Picard iteration