几类扩大设计的均匀性模式

田杰中,张诗娴,柏启明,李洪毅

(吉首大学 数学与统计学院,湖南 吉首 416000)

摘　要:大型空间填充设计在计算机试验中有着广泛的应用,其直接构造具有一定的难度,现有的研究中常常利用倍扩方法通过较小规模的空间填充设计构造大型的空间填充设计. 基于可卷型 L_2-偏差,定义了混水平设计的均匀性模式,建立了均匀性模式与字长型模式之间的关系,并给出了利用倍扩方法得到的几类扩大设计的均匀性模式和初始设计的字长型模式之间的解析联系. 最后通过数值例子验证了所获得的理论结果.

关键词:均匀性模式;可卷型 L_2-偏差;扩大设计;字长型模式

中图分类号:O212.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1000-2367(2024)01-0067-07

均匀设计是由我国方开泰教授和王元院士共同提出的一种空间填充设计,它要求试验点均匀地分布在试验区域内,其理论和设计表被广泛应用于国防军事、社会经济等诸多领域,并取得了显著的社会效益和经济效益.偏差作为设计的均匀性度量,已在许多文献中进行讨论,常用的偏差有中心化 L_2-偏差(CD),可卷型 L_2-偏差(WD)和混合偏差(MD). 一个设计经过因子的水平置换后可能具有不同的几何结构和空间填充性质.文献[1]考虑因子的水平置换,基于 CD,建立了平均偏差和字长型模式之间的解析联系,通过遍历所有的水平置换找到最小偏差的设计.文献[2]将这一结果推广到任意水平的对称设计.文献[3]在偏差和最大最小距离准则下讨论部分因析设计的空间填充性质,并给出了三、四和五水平空间填充设计的构造方法,理论结果显示因子的水平置换可改进空间填充性质. 文献[4]基于水平置换的思想构造了在 WD 下非对称均匀设计.

折叠反转是消除因子别名效应的一种有效手段,折叠反转设计因具有良好的几何对称结构和统计性质,在优良设计的构造中得到广泛应用.文献[5]基于水平置换和折叠反转,利用 doubling 方法构造二水平 Double 设计,并表明若初始设计是一个分辨度为 IV 的二水平正规部分因析设计,其 Double 设计的分辨度仍为 IV.文献[6]以水平置换作为折叠反转方式提出用 tripling 方法构造三水平 Triple 设计,构造了一系列具有最小低阶混杂的三水平因析设计.随后,四水平、五水平、二三混水平及二四混水平扩大设计的结构被文献[7-10]给出,并获得了当初始设计是一个均匀设计时,其对应的扩大设计也是一个均匀设计. 由于扩大设计的试验次数和因子数与初始设计相比,都进行了翻倍,而根据效应稀疏原则,低阶效应往往比高阶效应更重要,因此有必要考虑扩大设计的投影均匀性.文献[11] 最早提出了均匀性模式的概念,给出了二水平设计均匀性模式与广义字长型之间的解析关系.文献[12]基于 MD 定义了任意水平对称设计的均匀性模式和最小投影均匀性准则,并给出均匀性模式的一个下界,该下界作为一个基准用于评价设计的投影均匀性.文

收稿日期:2022-09-24;**修回日期:**2022-10-28.

基金项目:国家自然科学基金(12161040;12361053);湖南省自然科学基金(2023JJ30486);湖南省教育厅重点项目(22A0355);吉首大学校级科研项目(Jdy22007).

作者简介(通信作者):李洪毅(1978-),女,湖南沅陵人,吉首大学教授,博士,主要从事试验设计与应用统计研究,E-mail:lhyfeng1224@163.com.

引用本文:田杰中,张诗娴,柏启明,等.几类扩大设计的均匀性模式[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(1):67-73.(Tian Jiezhong, Zhang Shixian, Bai Qiming, et al.Uniformity pattern of several kinds of amplified designs[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(1):67-73.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.09.24.0001.)

献[13]基于 CD 建立了 Triple 设计和初始设计的均匀性模式之间的关系.针对四水平、五水平、二三混水平及二四混水平扩大设计的均匀性模式是一个值得研究的问题.

1 基本概念和符号

记 $\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$ 为一类具有 n 次试验,s_1 个 q_1 水平和 s_2 个 q_2 水平因子的 U- 型设计的集合,其中 q_f 个水平来自集合$\{0,\cdots,q_f-1\}$,每个因子中每个水平出现的次数均为 nq_f^{-1},$f=1,2$.对任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$,若任意 t 个因子的所有水平组合出现次数相同,则称设计 G 是强度为 t 的正交表,记为 $OA(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2},t)$.

对任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$,记 $d_H^G(a,b)$ 为设计 G 中第 a 行和第 b 行的 Hamming 距离,即 a 与 b 之间对应位置取不同元素的位置数,δ_{ab}^G 为设计 G 中第 a 行和第 b 行之间的相遇数,即第 a 行和第 b 行对应位置取相同元素的位置数. 根据 Hamming 距离和相遇数之间的关系可知 $d_H^G(a,b)=s_1+s_2-\delta_{ab}^G$.当 $k_1=0,\cdots,s_1$,$k_2=0,\cdots,s_2$时, 定义其距离分布

$$H_{k_1k_2}(G)=\frac{1}{n}\mid\{(a,b):d_H^G(a_1,b_1)=k_1,d_H^G(a_2,b_2)=k_2,\ a=(a_1,a_2)\in G,b=(b_1,b_2)\in G\}\mid,$$

距离分布 $H_{k_1k_2}(G)$ 通过 MacWilliams 变换为

$$R_{v_1v_2}(G)=\frac{1}{n}\sum_{k_1=0}^{s_1}\sum_{k_2=0}^{s_2}P_{v_1}(k_1;s_1,q_1)P_{v_2}(k_2;s_2,q_2)H_{k_1k_2}(G),v_j=0,\cdots,s_j,j=1,2,\tag{1}$$

其中 $P_{v_j}(k_j;s_j,q_j)=\sum_{r=0}^{v_j}(-1)^r(q_j-1)^{v_j-r}\binom{k_j}{r}\binom{s_j-k_j}{v_j-r}$ 为 Krawtchouk 多项式.$\binom{k_j}{r}=\frac{k_j!}{r!\ (k_j-r)!}$,$\binom{k_j}{0}=1$, 当 $k_j<r$ 时,$\binom{k_j}{r}=0$.文献[14]定义了设计 G 的广义字长型模式为$(R_1(G),\cdots,R_{s_1+s_2}(G))$,其中

$$R_v(G)=\sum_{v_1+v_2=v}R_{v_1v_2}(G),v=1,\cdots,s_1+s_2.\tag{2}$$

广义最小低阶混杂(GMA)准则要求序贯最小化向量 $(R_1(G),\cdots,R_{s_1+s_2}(G))$.

根据 Krawtchouk 多项式的正交性可得

$$H_{k_1k_2}(G)=\frac{n}{q_1^{s_1}q_2^{s_2}}\sum_{v_1=0}^{s_1}\sum_{v_2=0}^{s_2}P_{k_1}(v_1;s_1,q_1)P_{k_2}(v_2;s_2,q_2)R_{v_1v_2}(G).\tag{3}$$

本文选取 WD 来衡量设计的均匀性.对于设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$, 其 WD 值的平方可通过下列公式计算,

$$[WD(G)]^2=-(\frac{4}{3})^{s_1+s_2}+\frac{1}{n^2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\prod_{f=1}^{2}\prod_{l=1}^{s_f}[\frac{3}{2}-\mid u_{al}^f-u_{bl}^f\mid(1-\mid u_{al}^f-u_{bl}^f\mid)],$$

其中 $u_{al}^f=\frac{2x_{al}^f+1}{2q_f}$,$x_{al}^f\in\{0,\cdots,q_f-1\}$.考虑设计 G 中的所有因子的水平置换, 共有$(q_1!\ )^{s_1}(q_2!\ )^{s_2}$ 个同构设计 G',用 $\mathscr{A}(G)$ 表示这些同构设计的集合,记$\overline{[WD(G)]^2}$ 为 $\mathscr{A}(G)$ 中所有设计的平均 WD, 即

$$\overline{[WD(G)]^2}=\frac{1}{(q_1!\ )^{s_1}(q_2!\ )^{s_2}}\sum_{G'\in\mathscr{A}(G)}[WD(G')]^2.\tag{4}$$

当 $q_1=q_2$ 时,非对称设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$ 退化为对称设计 $G\in\mathscr{U}(n;q^s)$.

2 非对称设计的均匀性模式

本节将基于 WD 给出任意水平非对称设计的均匀性模式,并建立其与字长型模式之间的解析联系.

对任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$,设 g_1,g_2 是整数,定义 $\Theta=\{(g_1,g_2):0\le g_1\le s_1,0\le g_2\le s_2\}$.记 $J_{g_1g_2}=\{u=(u_1,u_2)\mid u_1\subseteq\{1,\cdots,s_1\},u_2\subseteq\{s_1+1,\cdots,\ s_1+s_2\},\ \mid u_1\mid=g_1,\ \mid u_2\mid=g_2,\ \mid u\mid=\mid u_1\mid+\mid u_2\mid=$

$g_1+g_2\}$，$|u|$ 表示集合 u 中元素的个数.令 $g=g_1+g_2$，定义 $J_g=\bigcup_{(g_1,g_2)\in\Theta}J_{g_1g_2}$，对任意 $u\in J_g$，存在整数对$(g_1,g_2)\in\Theta$，使得 $u=u_1\cup u_2\in J_{g_1g_2}$.用 G_u 表示设计 G 投影在 u 中的 g 维设计，$d_H^{G_u}(a,b)$ 和 $\delta_{a,b}^{G_u}=g_1+g_2-d_H^{G_u}(a,b)$ 分别表示投影设计 G_u 的第 a 行和第 b 行的 Hamming 距离和相遇数.设 $WD_u(G)$ 是设计 G 在 u 上的投影 WD，当考虑投影设计 G_u 的$(q_1!)^{g_1}(q_2!)^{g_2}$ 种组合同构设计，用 $\mathscr{A}(G_u)$ 表示这些设计的集合.类似于式(4)，设计 G 在 u 上的平均投影 WD 可以定义如下：

$$\overline{[WD_u(G)]^2}=\frac{1}{(q_1!)^{g_1}(q_2!)^{g_2}}\sum_{G_u'\in\mathscr{A}(G_u)}[WD_u(G)]^2.$$

根据平均 WD 与 Hamming 距离的关系[4]及 Hamming 距离与距离分布之间的关系，可获得投影设计 G_u 的平均 WD 与距离分布之间的解析联系，

$$\overline{[WD_u(G)]^2}=-\left(\frac{4}{3}\right)^g+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{g_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{g_2}\sum_{k_1=0}^{g_1}\sum_{k_2=0}^{g_2}\left(\frac{8q_1-1}{9q_1}\right)^{k_1}\left(\frac{8q_2-1}{9q_2}\right)^{k_2}H_{k_1k_2}(G_u). \tag{5}$$

当设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$ 是一个强度为 t 的正交表，对于满足 $1\le g(=g_1+g_2)\le t$ 的正整数 g，投影设计 G_u 的任意 g 列的所有 $q_1^{g_1}q_2^{g_2}$ 个水平组合出现的次数相同.对 G_u 的任意一行 $a=(a_1,a_2)$，有 $|\{(a,b):d_H^{G_u}(a_1,b_1)=k_1,d_H^{G_u}(a_2,b_2)=k_2,b=(b_1,b_2)\in G_u\}|=\binom{g_1}{k_1}\binom{g_2}{k_2}nq_1^{-g_1}q_2^{-g_2}(q_1-1)^{k_1}(q_2-1)^{k_2}$，由式(5)可得：

$$\overline{[WD_u(G)]^2}=-\left(\frac{4}{3}\right)^g+\left(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2}\right)^{g_1}\left(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2}\right)^{g_2}. \tag{6}$$

为了比较设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$ 与强度为 t 的正交表 $OA(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2},t)$ 在所有 g 维投影上的平均 WD 值，给出下列定义.

定义 1　对于任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$，$u\in J_g$，$g=1,\cdots,s(=s_1+s_2)$，定义

$$\overline{T_g(G)}=\sum_{|u|=g}\overline{[WD_u(G)]^2}-\sum_{g_1+g_2=g}\left[-\left(\frac{4}{3}\right)^g+\left(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2}\right)^{g_1}\left(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2}\right)^{g_2}\right], \tag{7}$$

称向量$(\overline{T_1(G)},\cdots,\overline{T_s(G)})$为设计 G 的均匀性模式.

从式(6)和定义 1 可知设计 G 的均匀性模式$\overline{T_g(G)}$和强度为 t 的正交表 $OA(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2},t)$ 之间有如下关系.

定理 1　对任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$，当且仅当$\overline{T_g(G)}=0(g=1,2,\cdots,t)$，且$\overline{T_{t+1}(G)}>0$ 时，设计 G 是强度为 t 的正交表.

定理 1 表明设计 G 的均匀性模式$\overline{T_t(G)}$值越小，设计 G 在 t 维上的投影设计越接近强度为 t 的正交表，从正交性的角度来看，希望相同维数的投影设计具有较小的偏差值，下面将给出设计 G 的最小低阶投影均匀性(MPU)准则的定义.

定义 2　对于任意两个设计 $G_1,G_2\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$，存在最小的正整数 r 使得$\overline{T_r(G_1)}\neq\overline{T_r(G_2)}$，$\overline{T_i(G_1)}=\overline{T_i(G_2)}$，$i=1,2,\cdots,r-1$.若$\overline{T_r(G_1)}<\overline{T_r(G_2)}$，则称设计 G_1 比设计 G_2 有更小的低阶投影均匀性，如果没有其他设计比 G_1 有更小的投影均匀性，则称设计 G_1 为最小低阶投影设计.设计 G 的 MPU 准则要求序贯最小化$(\overline{T_1(G)},\cdots,\overline{T_s(G)}$.

下面的定理建立了非对称设计 G 的均匀性模式$\overline{T_g(G)}$与字长型模式 $R_v(G)$ 之间的解析联系，从投影均匀性的角度为广义最小低阶混杂准则提供了一种统计评价.

定理 2　对于任意设计 $G\in\mathscr{U}(n;q_1^{s_1}q_2^{s_2})$，$u\in J_g$.则

$$\overline{T_g(G)}=\sum_{g_1=0}^{g}\left(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2}\right)^{g_1}\left(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2}\right)^{g_2}\sum_{(v_1,v_2)\in N}\left(\frac{q_1+1}{8q_1^2+1}\right)^{v_1}\left(\frac{q_2+1}{8q_2^2+1}\right)^{v_2}\times$$
$$\binom{s_1-v_1}{s_1-g_1}\binom{s_2-v_2}{s_2-g_2}R_{v_1v_2}(G), \tag{8}$$

其中 $N=\{(v_1,v_2):v_1=0,\cdots,g_1,v_2=0,\cdots,g_2,(v_1,v_2)\neq(0,0)\},g_2=g-g_1$.

证明 根据式(3)、(5)和(7),

$$\overline{T_g(G)}=\sum_{g_1=0}^{g}\sum_{u\in J_{g_1g_2}}[-(\frac{4}{3})^g+\frac{1}{n}(\frac{3}{2})^{g_1}(\frac{3}{2})^{g_2}\sum_{k_1=0}^{g_1}\sum_{k_2=0}^{g_2}(\frac{8q_1-1}{9q_1})^{k_1}(\frac{8q_2-1}{9q_2})^{k_2}\times H_{k_1k_2}(G_u)]-\sum_{g_1+g_2=g}[-(\frac{4}{3})^g+(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2})^{g_1}(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2})^{g_2}]=$$

$$\sum_{g_1=0}^{g}\sum_{u\in J_{g_1g_2}}[(\frac{3}{2q_1})^{g_1}(\frac{3}{2q_2})^{g_2}\sum_{v_1=0}^{g_1}\sum_{v_2=0}^{g_2}\sum_{k_1=0}^{g_1}\sum_{k_2=0}^{g_2}(\frac{8q_1-1}{9q_1})^{k_1}(\frac{8q_2-1}{9q_2})^{k_2}\times P_{k_1}(v_1;g_1,q_1)P_{k_2}(v_2;g_2,q_2)R_{v_1v_2}(G_u)-(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2})^{g_1}(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2})^{g_2}],$$

根据 $\sum_{k_f=0}^{g_f}P_{k_f}(v_f;g_f,q_f)y_f^{k_f}=[1+(q_f-1)y_f]^{g_f-v_f}(1-y_f)^{v_f},f=1,2$ 可得,

$$\overline{T_g(G)}=\sum_{g_1=0}^{g}\sum_{u\in J_{g_1g_2}}[(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2})^{g_1}(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2})^{g_2}\sum_{v_1=0}^{g_1}\sum_{v_2=0}^{g_2}(\frac{q_1+1}{8q_1^2+1})^{v_1}(\frac{q_2+1}{8q_2^2+1})^{v_2}R_{v_1v_2}(G_u)-(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2})^{g_1}(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2})^{g_2}]=\sum_{g_1=0}^{g}(\frac{8q_1^2+1}{6q_1^2})^{g_1}(\frac{8q_2^2+1}{6q_2^2})^{g_2}\sum_{(v_1,v_2)\in N}(\frac{q_1+1}{8q_1^2+1})^{v_1}(\frac{q_2+1}{8q_2^2+1})^{v_2}\sum_{u\in J_{g_1g_2}}R_{v_1v_2}(G_u),$$

基于 $\sum_{u\in J_{g_1g_2}}R_{v_1v_2}(G_u)=\binom{s_1-v_1}{s_1-g_1}\binom{s_2-v_2}{s_2-g_2}R_{v_1v_2}(G)$ 可得式(8)成立,定理 2 得证.

定理 2 建立了非对称设计 G 的均匀性模式 $\overline{T_g(G)}$ 与字长型模式 $R_{v_1v_2}(G)$ 的解析联系,由式(8)可知,字长型模式 $R_{v_1v_2}(G)$ 的系数为非负数,序贯最小化 $\overline{T_g(G)}$ 等价于序贯最小化 $R_v(G)$,表明 MPU 准则和 GMA 准则几乎是等价的.下面的推论给出了对称设计 G 的均匀性模式与字长型模式之间的解析联系.

推论 1 对于任意对称设计 $G\in\mathscr{U}(n;q^s)$,$u\in J_g$ 并且 $1\leq g\leq s$,

$$\overline{T_g(G)}=(\frac{8q^2+1}{6q^2})^g\sum_{v=1}^{g}(\frac{q+1}{8q^2+1})^v\binom{s-v}{s-g}R_v(G).\tag{9}$$

3 几类扩大设计的均匀性模式与初始设计的字长型模式之间的关系

本节中主要给出二三混水平扩大设计 $\mathscr{K}(G_{23})$[9]、二四混水平扩大设计 $\mathscr{K}(G_{24})$[10]、四水平扩大设计 $\mathscr{Q}(G_4)$[7] 及五水平扩大设计 $\mathscr{W}(G_5)$[8] 的均匀性模式与其对应的初始设计的字长型模式之间的解析联系.

定理 3 对任意二三混水平设计 $G_{23}\in\mathscr{U}(n;2^{s_1}3^{s_2})$,其扩大设计为 $\mathscr{K}(G_{23})\in\mathscr{U}(3n;2^{4s_1}3^{3s_2})$.当 $1\leq g(=g_1+g_2)\leq s_1+s_2$,有

$$\overline{T_g(\mathscr{K}(G_{23}))}=\sum_{g_1=0}^{g}(\frac{11}{8})^{g_1}(\frac{73}{54})^{g_2}\sum_{(v_1,v_2)\in N}(\frac{1}{11})^{v_1}(\frac{4}{73})^{v_2}\binom{4s_1-v_1}{g_1-v_1}\binom{3s_2-v_2}{g_2-v_2}\times[\frac{1}{2^{s_1}+3^{s_2+1}}\sum_{i_1=0}^{s_1}\sum_{i_2=0}^{s_2}\sum_{v_1=0}^{s_1}\sum_{v_2=0}^{s_2}P_{j_1}(4i_1;4s_1,2)P_{j_2}(4i_2;3s_2,3)P_{i_1}(v_1;s_1,2)\times P_{i_2}(v_2;s_2,3)R_{v_1v_2}(G_{23})+\frac{2}{3}P_{j_1}(2s_1;4s_1,2)P_{j_2}(2s_2;3s_2,3)].\tag{10}$$

证明 结合式(8)和文献[9]中的定理 3 即可得到定理 3.

定理 4 对任意二四混水平设计 $G_{24}\in\mathscr{U}(n;2^{s_1}4^{s_2})$,其扩大设计为 $\mathscr{K}(G_{24})\in\mathscr{U}(4n;2^{4s_1}4^{4s_2})$.当 $1\leq g(=g_1+g_2)\leq s_1+s_2$,有

$$\overline{T_g(\mathscr{K}(G_{24}))}=\sum_{g_1=0}^{g}(\frac{11}{8})^{g_1}(\frac{43}{32})^{g_2}\sum_{(v_1,v_2)\in N}(\frac{1}{11})^{v_1}(\frac{5}{129})^{v_2}\binom{4s_1-v_1}{g_1-v_1}\binom{4s_2-v_2}{g_2-v_2}\times$$

$$\left[\frac{1}{2^{s_1+2s_2+2}}\sum_{i_1=0}^{s_1}\sum_{i_2=0}^{s_2}\sum_{v_1=0}^{s_1}\sum_{v_2=0}^{s_2}P_{j_1}(4i_1;4s_1,2)P_{j_2}(4i_2;3s_2,4)P_{i_1}(v_1;s_1,2)\times P_{i_2}(v_2;s_2,4)R_{v_1v_2}(G_{24})+\frac{3}{4}P_{j_1}(3s_1;4s_1,2)P_{j_2}(3s_2;3s_2,4)\right]. \tag{11}$$

证明　结合式(8)和文献[10]中的定理 3.1 即可得到定理 4.

定理 5　对任意四水平设计 $G_4\in\mathcal{U}(n;4^s)$,其扩大设计为 $\mathcal{Q}(G_4)\in\mathcal{U}(4n;4^{4s})$.当 $1\le g\le s$,有

$$\overline{T_g(\mathcal{Q}(G_4))}=\left(\frac{43}{32}\right)^g\sum_{v=1}^{g}\left(\frac{5}{129}\right)^v\binom{4s-v}{g-v}\left[\frac{1}{4^{s+1}}\sum_{i=0}^{s}\sum_{v=0}^{s}P_j(4i;4s,4)P_i(v;s,4)\times R_v(G_4)+\frac{3}{4}P_j(3s;4s,4)\right]. \tag{12}$$

证明　结合式(9)和文献[7]中的定理 3 即可得到定理 5.

定理 6　对任意五水平设计 $G_5\in\mathcal{U}(n;5^s)$,其扩大设计 $\mathcal{W}(G_5)\in\mathcal{U}(5n;5^{5s})$.当 $1\le g\le s$,有

$$\overline{T_g(\mathcal{W}(G_5))}=\left(\frac{67}{50}\right)^g\sum_{v=1}^{g}\left(\frac{2}{67}\right)^v\binom{5s-v}{g-v}\left[\frac{1}{5^{s+1}}\sum_{i=0}^{s}\sum_{v=0}^{s}P_j(5i;5s,5)P_i(v;s,5)\times R_v(G_5)+\frac{4}{5}P_j(4s;5s,5)\right]. \tag{13}$$

证明　结合式(9)和文献[15]中的定理 4.7 即可得到定理 6.

定理 3～6 给出了几类扩大设计的均匀性模式与其初始设计的字长型模式之间的解析联系,这些联系表明扩大设计的均匀性模式可通过其初始设计的字长型模式计算得到.

4　数值例子

本节通过数值例子验证本文的理论结果.

例 1　考虑如下初始的二三混水平设计 $G_{23}\in\mathcal{U}(6;2^13^1)$,$\mathcal{K}(G_{23})\in\mathcal{U}(18;2^43^3)$ 是其扩大设计,该初始设计和其扩大设计来自文献[9]中的例 1.

$$G_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&1&2&0&1&2\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

由式(1)可得 $R_{t_1t_2}(G_{23})$ 值,根据式(2) 可获得初始设计 G_{23} 的字长型模式 $R_t(G_{23})$,具体结果见表 1.(注:"—"表示空).

表 1　例 1 的数值结果

Tab. 1　Numerical results of Example 1

t	$R_{t0}(G_{23})$	$R_{t1}(G_{23})$	$R_t(G_{23})$
0	1	0	—
1	0	0	0
2	—	—	0

由式(10)可得扩大设计 $\mathcal{K}(G_{23})$ 的均匀性模式(0.00,0.01,0.07,0.20,0.28,0.20,0.06).

例 2　考虑如下初始的二四混水平设计 $G_{24}\in\mathcal{U}(4;2^34^3)$,$\mathcal{K}(G_{24})\in\mathcal{U}(16;2^{12}4^{12})$ 是其扩大设计,该初始设计和其扩大设计见文献[10]中的例 5.1.

$$G_{24}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&2\\0&1&0&1&0&3\\1&0&0&2&3&0\\1&1&1&3&2&1\end{pmatrix},$$

由式(1)可得 $R_{t_1t_2}(G_{24})$,根据式(2)可得初始设计 G_{24} 的字长型模式 $R_t(G_{24})$,具体结果见表 2.

表 2　例 2 的数值结果

Tab. 2　Numerical results of Example 2

t	$R_{t0}(G_{24})$	$R_{t1}(G_{24})$	$R_{t2}(G_{24})$	$R_{t3}(G_{24})$	$R_t(G_{24})$
0	1	0	9	6	—
1	0	9	18	21	0
2	0	9	18	21	18
3	1	0	9	6	34
4	—	—	—	—	39
5	—	—	—	—	30
6	—	—	—	—	6

由式(11)可得到扩大设计 $\mathcal{K}(G_{24})$的均匀性模式(0.00,0.33,10.26,1.52×10^2,1.42×10^3,9.51×10^3,4.82×10^4,1.93×10^5,6.22×10^5,1.65×10^6,3.62×10^6,6.65×10^6,1.03×10^7,1.33×10^7,1.45×10^7,$1.32\times$

10^7,1.00×10^7,6.22×10^6,3.12×10^6,1.23×10^6,3.69×10^5,7.87×10^4,1.07×10^4,6.92×10^2).

例 3 考虑初始的四水平设计 $G_4\in\mathscr{U}(8;4^7)$,$\mathscr{Q}(G_4)\in\mathscr{U}(32;4^{28})$是其扩大设计,该初始设计和其扩大设计见文献[7]中的例 2.

由式(2)可得初始设计 G_4 的字长型模式(0.00,0.06,0.40,1.14,1.61,1.13,0.32).根据式(12)可得扩大设计 $\mathscr{K}(G_4)$的均匀性模式(0.00,0.23,8.36,1.48×10^2,1.67×10^3,1.35×10^4,8.42×10^4,4.16×10^5,1.68×10^6,5.65×10^6,1.60×10^7,3.85×10^7,7.94×10^7,1.41×10^8,2.15×10^8,2.83×10^8,3.21×10^8,3.14×10^8,2.62×10^8,1.86×10^8,1.12×10^8,5.56×10^7,2.26×10^7,7.32×10^6,1.81×10^6,3.23×10^5,3.69×10^4,2.03×10^3).

例 4 考虑初始的五水平设计 $G_5\in\mathscr{U}(10;5^5)$,$\mathscr{W}(G_5)\in\mathscr{U}(50;5^{25})$是其扩大设计,该初始设计和其扩大设计见文献[15]中的例 4.3.

由式(2)可得初始设计 G_5 的字长型模式(0.00,0.02,0.10,0.14,0.07).从式(13)可得扩大设计 $\mathscr{K}(G_5)$的均匀性模式(0.00,0.12,3.88,60.06,5.92×10^2,4.17×10^3,2.23×10^4,9.45×10^4,3.24×10^5,9.15×10^5,2.15×10^6,4.26×10^6,7.13×10^6,1.01×10^7,1.21×10^7,1.22×10^7,1.04×10^7,7.39×10^6,4.32×10^6,2.05×10^6,7.65×10^5,2.18×10^5,4.43×10^4,5.73×10^3,3.55×10^2).

5 总 结

本文基于 *WD* 定义了非对称设计的均匀性模式,建立了非对称设计的均匀性模式与字长型模式之间的解析联系,并分别给出了几类扩大设计的均匀性模式与其初始设计的字长型模式之间的解析联系,即扩大设计的均匀性模式可以通过初始设计的字长型模式计算获得,这将大大减小直接计算扩大设计均匀性模式的复杂程度.

参 考 文 献

[1] TANG Y,XU H Q,LIN D K J.Uniform fractional factorial designs[J].The Annals of Statistics,2012,40:891-907.

[2] TANG Y,XU H Q.An effective construction method for multi-level uniform designs[J].Journal of Statistical Planning and Inference,2013,143:1583-1589.

[3] ZHOU Y D,XU H Q.Space-filling fractional factorial designs[J].Journal of the American Statistical Association,2014,109:1134-1144.

[4] 仲文杰,邵飞飞,唐煜.可卷型 L_2-偏差的水平置换方法构造混合水平设计[J].数学学报,2017,60(4):537-546.
ZHONG W J,SHAO F F,TANG Y.Level permutation method for constructing mixed-level uniform designs under the wrap-around L_2-dicrepancy[J].Acta Mathematica Sinica(Chinese Series),2017,60(4):537-546.

[5] CHEN H H,CHENG C S.Doubling and projection:a method of constructing two-level designs of resolution IV[J].The Annals of Statistics,2006,34(1):546-558.

[6] OU Z J,ZHANG M H,QIN H.Tripling of fractional factorial designs[J].Journal of Statistical Planning and Inference,2019,199:151-159.

[7] LI H Y,QIN H.Quadrupling:construction of uniform designs with large run sizes[J].Metrika,2020,83(5):527-544.

[8] 薛慧丽,黄兴友,柏启明,等.大型的五水平空间填充设计的构造[J].河南师范大学学报(自然科学版),2022,50(5):36-41.
XUE H L,HUANG X Y,BAI Q M,et al.Construction of five-level space-filling designs with large sun sizes[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2022,50(5):36-41.

[9] LI H Y,HUANG X Y,XUE H L,et al.A novel method for constructing mixed two-and three-level uniform factorials with large run sizes[J].Statistical Papers,2021,62(6):2907-2921.

[10] 黄兴友,薛慧丽,柏启明,等.大型二四混水平均匀设计的构造及其性质[J].系统科学与数学,2022,42(3):730-741.
HUANG X Y,XUE H L,BAI Q M,et al.Construction and properties of mixed two- and four-level uniform designs with large run sizes[J].Journal of systems science and mathematical sciences,2022,42(3):730-741.

[11] FANG K T,Qin H.Uniformity pattern and related criteria for two-level factorials[J].Science in China Series A:Mathematics,2005,48(1):1-11.

[12] WANG K,OU Z J,LIU J Q,et al.Uniformity pattern of q-level factorials under mixture discrepancy[J].Statistical Papers,2021,62:1777-1793.

[13] LI H Y,QIN H.A new strategy for tripling[J].Journal of the Korean Statistical Society,2021,50(2):565-579.

[14] XU H Q,WU C F J.Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs[J].The Annals of Statistics,2001,29(2):549-560.

[15] 薛慧丽.几类多水平空间填充设计的构造及性质研究[D].吉首:吉首大学,2022.

Uniformity pattern of several kinds of amplified designs

Tian Jiezhong，Zhang Shixian，Bai Qiming，Li Hongyi

（College of Mathematics and Statistics，Jishou University，Jishou 416000，China）

Abstract：Space-filling designs with large run sizes are widely used in computer experiments，it is difficult to construct directly，space-filling designs with large run sizes are often constructed by using the amplified methods in existing studies. Based on the wrap-around L_2-discrepancy，the uniformity pattern of mixed-level designs is defined，the relationship between the uniformity pattern and the wordlength pattern is established，and the analytical relationships are presented between the uniformity pattern of several kinds of amplified designs obtained by the amplified methods and the wordlength pattern of the initial designs. Finally，the theoretical results obtained are verified by numerical examples.

Keywords：uniformity pattern；wrap-around L_2-discrepancy；amplified design；wordlength pattern

［责任编校　陈留院　赵晓华］