

# 具有非单调发生率的随机离散 SIR 传染病模型的稳定性

谭伟,刘茂省

(中北大学 理学院,太原 030051)

**摘要:**研究了一个具有非单调发生率的随机离散 SIR 传染病模型在平衡点上的稳定性.基于具有随机噪声扰动和非单调发生率的连续 SIR 传染病模型,用 Euler-Marryama 方法对其进行离散化,得到了一个随机离散的 SIR 模型.利用 Lyapunov 函数证明了系统在平衡点处稳定的充分条件,提出了非线性差分方程在零解处概率稳定的充分条件,以及线性差分方程在零解处均方稳定的充分条件.然后证明了系统在正平衡点和边界平衡点处的稳定性.最后,对于所得到的结论运用数值仿真进行了验证,并证明了系统中随机扰动的影响.

**关键词:**随机离散;非单调发生率;Euler-Marryama 方法;均方稳定;数值仿真

**中图分类号:**O175.7

**文献标志码:**A

自古以来,人类就饱受各种传染病的困扰.通常,传染病可以通过空气、水、食物、接触、垂直传播(母婴传播)、体液传播等方式在人与人之间或人与动物之间广泛传播.传染病不但会影响人们的正常生活,人们的安全还会遭受严重威胁.因此,传染病的预防和控制已成为研究的热点.

传染病研究的开始,人们普遍认为是 Daniel Bernoulli 在 1760 年对天花疫苗接种的研究,对确定性传染病数学模型的研究早在 20 世纪初就开始了.直到 1927 年,文献[1-2]在研究伦敦流行的黑死病时提出了 SI 舱室模型,然后在 1932 年建立了 SIS 模型,对传染病动力学的研究做出了重要的贡献.之后许多学者对一些传染病模型进行了广泛的研究,例如 SIS 模型和 SIR 模型<sup>[3-6]</sup>.且 SIR 传染病模型是传染病动力学中重要的数学模型之一<sup>[4-6]</sup>.近几十年来,许多学者建立了基于具有随机扰动的确定性模型的随机流行病模型<sup>[6-8]</sup>,并在近年来,越来越多的学者关注到差分方程模型<sup>[9-11]</sup>.然而,大多数的学者都是将随机模型和离散模型分别建模来研究的,如文献[6,11],在流行病学中对差分方程所描述的随机离散模型的稳定性的研究很少.所以在本文中,主要是对随机离散的传染病模型进行研究.

## 1 准备知识

一般的确定性 SIR 传染病模型可以用以下常微分方程来表示<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \alpha - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2022-05-09;修回日期:2022-07-06.

基金项目:国家自然科学基金(12071445;12001501).

作者简介:谭伟(1996-),男,河北张家口人,中北大学硕士研究生,从事传染病动力学方面的研究,E-mail:1848231722@qq.com.

通信作者:刘茂省(1978-),男,山东济宁人,中北大学教授,主要从事传染病动力系统、复杂网络及其在生物数学中的应用研究,E-mail:liumaoxing@nuc.edu.cn.

其中,  $S(t), I(t)$  和  $R(t)$  分别代表  $t$  时刻易感者、染病者和恢复者的数量.  $\alpha$  为种群的招募率,  $\beta$  为疾病的传播率,  $\mu$  为人群的自然死亡率,  $\gamma$  为感染个体的恢复率,  $\alpha, \beta, \mu, \gamma$  均为正参数.

传染率在流行病学中对研究起着至关重要的作用,改进流行病中的传染率更利于刻画传染病的传播机制.现实中的情况是,随着时间的推移,当传染病开始暴发时,政府实施的各种防治策略和个人预防和控制疫情的意识逐渐增强,从而对疫情的发病率有更强的抑制作用.为了使系统(1)具有更好的现实意义,在系统(1)的基础上,文献[12]进一步研究了具有非单调发生率的 SIR 传染病模型.模型能被表示为:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \alpha - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \delta I(t)^2} - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \delta I(t)^2} - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\delta$  是一个参数用来衡量心理或抑制效应,  $\beta I(t)$  是测量疾病的感染力,  $\frac{1}{1 + \delta I(t)^2}$  描述了当存在数量非常庞大的染病个体时,易感个体的行为变化所产生的心理或抑制效应.这一发病率最初是由文献[13]在 2007 年提出的,之后一些学者在他们研究的模型<sup>[14-16]</sup>中也应用了这种发生率.

在疾病传播的过程中,白噪声对其有很大的影响,所以相比确定性模型来说,随机模型具有更大的现实意义.文献[17]曾提出,随机模型中的噪声扰动  $\dot{B}$  是布朗运动  $B(t)$  对时间  $t$  的导数,即  $\dot{B} = dB(t)/dt$ .

假设随机扰动强度与状态  $S(t)$  和状态  $I(t)$  在平衡点处的偏差成正比,也就是说当系统状态偏离平衡点的偏差增加时,随机扰动强度也会增加<sup>[18]</sup>.并且这种随机噪声已经被许多学者应用于不同的数学模型<sup>[19-20]</sup>.在上述假设下,将系统(2)加上随机白噪声后的表达式为:

$$\begin{cases} dS(t) = \left( \alpha - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \delta I(t)^2} - \mu S(t) \right) dt + \sigma_1 (S(t) - S^*) dB_1(t), \\ dI(t) = \left( \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \delta I(t)^2} - (\mu + \gamma)I(t) \right) dt + \sigma_2 (I(t) - I^*) dB_2(t), \\ dR(t) = (\gamma I(t) - \mu R(t)) dt, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\sigma_i^2 (i = 1, 2)$  表示白噪声  $B_i(t)$  的强度,  $B_i(t)$  是定义在完备概率空间  $(\Omega, F, P)$  上的布朗运动,且  $\{F_t\} (t \in \mathbf{R}^+)$  满足一般条件<sup>[17]</sup>.

通常用 Euler-Marryama 方法<sup>[21]</sup>对连续模型进行离散化,这种方法在之前就已经被许多学者所应用<sup>[22-23]</sup>.现在对系统(3)用 Euler-Marryama 方法进行离散化,得到:

$$\begin{cases} S(n+1) = S(n) + \left( \alpha - \frac{\beta S(n)I(n)}{1 + \delta I(n)^2} - \mu S(n) \right) h + \sigma_1 \sqrt{h} (S(n) - S^*) \omega_1(n+1), \\ I(n+1) = I(n) + \left( \frac{\beta S(n)I(n)}{1 + \delta I(n)^2} - (\mu + \gamma)I(n) \right) h + \sigma_2 \sqrt{h} (I(n) - I^*) \omega_2(n+1), \\ R(n+1) = R(n) + (\gamma I(n) - \mu R(n)) h, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $h > 0$  是时间步长,且初始条件为  $S(0) = \varphi_1(0), I(0) = \varphi_2(0)$ .并且在完备的概率空间  $(\Omega, F, P)$  中,  $F_n \in F, n \in \mathbf{Z} = (0, 1, 2, \dots)$  是一个  $\sigma$  代数簇.通常由  $E$  来表示数学期望,  $\omega_i(n+1) (i = 1, 2) (n \in \mathbf{Z})$  是一个在  $F$  中相互独立的随机序列且服从标准正态分布,并且对于  $\omega_i(n+1) (i = 1, 2, n \in \mathbf{Z})$ , 满足

$$E\omega_i(n) = 0, E\omega_i^2(n) = 1, E\omega_i(n)E\omega_j(n), (i \neq j). \quad (5)$$

因为系统(4)中有关  $R$  的第 3 个式子并不影响对其动力学行为的研究,所以将其忽略,只对以下系统进行研究:

$$\begin{cases} S(n+1) = S(n) + \left( \alpha - \frac{\beta S(n)I(n)}{1 + \delta I(n)^2} - \mu S(n) \right) h + \sigma_1 \sqrt{h} (S(n) - S^*) \omega_1(n+1), \\ I(n+1) = I(n) + \left( \frac{\beta S(n)I(n)}{1 + \delta I(n)^2} - (\mu + \gamma)I(n) \right) h + \sigma_2 \sqrt{h} (I(n) - I^*) \omega_2(n+1). \end{cases} \quad (6)$$

由系统(6),通过计算求得它的边界平衡点为  $E_0 = (S_0, I_0) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0\right)$ , 并且如果  $1 - \frac{\alpha\beta}{\mu(\mu + \gamma)} < 0$ , 那么正平衡点  $E_e = (S^*, I^*) = \left(\frac{\alpha - (\mu + \gamma)I_e^*}{\mu}, I_e^*\right)$  存在, 且  $I_e^* = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\mu^2\delta\left(1 - \frac{\alpha\beta}{\mu(\mu + \gamma)}\right)}}{2\mu\delta}$ .

对系统(6)的正平衡点  $E_e$  进行平移变换,  $u(n) = S(n) - S^*, v(n) = I(n) - I^*$ . 然后可以得到以下系统:

$$\begin{cases} u(n+1) = u(n) + \left( \alpha - \frac{\beta(v(n) + I^*)(u(n) + S^*)}{1 + \delta(v(n) + I^*)^2} - u(u(n) + S^*) \right) h + \sigma_1 \sqrt{h} u(n) \omega_1(n+1), \\ v(n+1) = v(n) + \left( \frac{\beta(v(n) + I^*)(u(n) + S^*)}{1 + \delta(v(n) + I^*)^2} - (\mu + \gamma)(v(n) + I^*) \right) h + \sigma_2 \sqrt{h} v(n) \omega_2(n+1). \end{cases} \quad (7)$$

系统(7)的零解与系统(6)的正解  $E_e = (S^*, I^*)$  是等价的.

将正平衡点进行平移变换到原点后, 然后在点  $u(n) = 0, v(n) = 0$  处对系统(7)进行线性化. 就可以用以下形式来表示系统(6)在平衡点  $E_e = (S^*, I^*)$  下的线性近似系统:

$$\begin{cases} x(n+1) = \left( 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right) x(n) + \frac{\beta S^* (\delta I^{*2} - 1) h}{(1 + \delta I^{*2})^2} y(n) + \sigma_1 \sqrt{h} x(n) \omega_1(n+1), \\ y(n+1) = \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} x(n) + \left( 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2}) h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma) h \right) y(n) + \sigma_2 \sqrt{h} y(n) \omega_2(n+1). \end{cases} \quad (8)$$

类似地, 对系统(6)的边界平衡点  $E_0$  进行平移变换, 令  $u(n) = S(n) - \frac{\alpha}{\mu}, v(n) = I(n)$ , 可以得到

$$\begin{cases} u(n+1) = u(n) + \left( -\frac{\beta v(n) \left( u(n) + \frac{\alpha}{\mu} \right)}{1 + \delta v(n)^2} - \mu u(n) \right) h + \sigma_1 \sqrt{h} u(n) \omega_1(n+1), \\ v(n+1) = v(n) + \left( \frac{\beta v(n) \left( u(n) + \frac{\alpha}{\mu} \right)}{1 + \delta v(n)^2} - (\mu + \gamma) v(n) \right) h + \sigma_2 \sqrt{h} v(n) \omega_2(n+1). \end{cases} \quad (9)$$

系统(9)的零解与系统(6)的边界平衡点  $E_0 = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0\right)$  是等价的, 系统(6)在边界平衡点处的线性近似系统为:

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu h) x(n) - \frac{\alpha \beta h}{\mu} y(n) + \sigma_1 \sqrt{h} x(n) \omega_1(n+1), \\ y(n+1) = \left( 1 + \frac{\alpha \beta h}{\mu} - (\mu + \gamma) h \right) y(n) + \sigma_2 \sqrt{h} y(n) \omega_2(n+1). \end{cases} \quad (10)$$

令  $\phi(n) = (u(n), v(n))^T, z(n) = (x(n), y(n))^T, \varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n))^T$ , T 代表转置.

为了更好地研究系统的动力学行为, 将引入文献[24]中的一些重要的定义和定理.

**定义 1**(文献[24]定义 7.1) 系统(7)或(9)是依概率稳定的, 如果对任意的  $\epsilon_1 > 0$  和  $\epsilon_2 > 0$  存在一个  $\delta > 0$  使得系统(7)或(9)的解  $\phi(n) = \phi(n, \varphi)$  满足不等式  $P\{\sup_{n \in \mathbf{Z}} |\phi(n)| > \epsilon_1\} < \epsilon_2$  对任意初始函数  $S(0) = \varphi_1(0), I(0) = \varphi_2(0)$  使得  $P\{|\varphi| < \delta\} = 1$ .

**定义 2**(文献[24]定义 1.2) 如果对每个  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta(\epsilon) > 0$ , 使得  $E|z(n)|^2 < \epsilon, n \in \mathbf{Z}$ , 并且  $E|\varphi(n)|^2 < \delta$  对任意初始条件都被满足, 则线性系统(8)或(10)的零解被称为均方稳定的; 如果系统(8)或(10)在均方稳定的前提下它们的解又满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} E|z(n)|^2 = 0$ , 则其又是渐近均方稳定的.

对一个任意的非负函数  $V_i = V(i, z(0), z(1), \dots, z(i)), i \in \mathbf{Z}$ , 定义  $\Delta V_i$  为

$$\Delta V_i = V(i+1, z(0), z(1), \dots, z(i+1)) - V(i, z(0), z(1), \dots, z(i)).$$

**定理 1**(文献[24]定理 1.1) 对于线性系统(8)或(10), 若存在一个非负函数  $V_i = V(i, z(0), z(1), \dots,$

$z(i)$ ) 满足条件  $EV(0, \varphi) \leq c_1 \|\varphi\|^2$  和  $E\Delta V_i \leq -c_2 E|z(i)|^2 (i \in \mathbf{Z})$ , 其中  $c_1$  和  $c_2$  是正常数. 那么系统(8)或(10)的零解是渐近均方稳定的.

现在考虑以下的随机差分系统:

$$\begin{cases} x(n+1) = a_{11}x(n) + a_{12}y(n) + \sigma_1 \sqrt{h}x(n)\omega_1(n+1), \\ y(n+1) = a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + \sigma_2 \sqrt{h}x(n)\omega_2(n+1), \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\sigma_1, \sigma_2$  是常数,  $\omega_i(n+1) (i=1, 2)$  是  $F_n$  自适应随机变量的相互独立的序列且满足条件(5). 可以看出系统(8)和(10)的一般形式就是系统(11), 因此, 为了更加简便地研究系统(11)解的稳定性, 令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{D}$  是对称矩阵. 对于实对称矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  来说, 若  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  是一个正定矩阵, 那么  $\mathbf{P} > \mathbf{Q}$ .

**定理 2**(文献[24]中定理 5.1) 假设存在一个正定矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得一个形式为(12)的半正定矩阵  $\mathbf{D}$  满足矩阵方程  $\mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} - \mathbf{D} = -\mathbf{P}$  的解, 且矩阵  $\mathbf{P}$  满足

$$\mathbf{P} > \begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2 h & 0 \\ 0 & d_{22}\sigma_2^2 h \end{pmatrix}, \quad (13)$$

那么系统(11)的零解是渐近均方稳定的.

**证明** 借助式(12), 可以将系统(11)表示为:

$$z(n+1) = (\mathbf{A} + \theta(\omega(n+1)))z(n),$$

其中

$$z(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}, \theta(\omega(n+1)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{h} \omega_1(n+1) & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{h} \omega_2(n+1) \end{pmatrix}.$$

考虑 Lyapunov 函数  $V(n) = z^T(n) \mathbf{D} z(n)$ , 所以有

$$\Delta V(n) = V(n+1) - V(n) = z^T(n+1) \mathbf{D} z(n+1) - z^T(n) \mathbf{D} z(n).$$

然后计算  $\Delta V$  的期望, 得到:

$$\begin{aligned} E\Delta V(n) &= E(z^T(n+1) \mathbf{D} z(n+1) - z^T(n) \mathbf{D} z(n)) = E z^T(n) [(\mathbf{A} + \theta(\omega(n+1)))^T \mathbf{D} (\mathbf{A} + \\ &\theta(\omega(n+1))) - \mathbf{D}] z(n) = E z^T(n) [\mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} - \mathbf{D} + \theta^T(\omega(n+1)) \mathbf{D} \theta(\omega(n+1))] z(n) = \\ &E z^T(n) [-\mathbf{P} + \theta^T(\omega(n+1)) \mathbf{D} \theta(\omega(n+1))] z(n). \end{aligned}$$

根据式(5), 可以求得:

$$\begin{aligned} E\theta^T(\omega(n+1)) \mathbf{D} \theta(\omega(n+1)) &= E \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{h} \omega_1(n+1) & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{h} \omega_2(n+1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \times \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{h} \omega_1(n+1) & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{h} \omega_2(n+1) \end{pmatrix} &= E \begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2 h \omega_1^2(n+1) & d_{12}\sigma_1\sigma_2 h \omega_1(n+1)\omega_2(n+1) \\ d_{12}\sigma_1\sigma_2 h \omega_1(n+1)\omega_2(n+1) & d_{22}\sigma_2^2 h \omega_2^2(n+1) \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2 h & 0 \\ 0 & d_{22}\sigma_2^2 h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

然后根据式(13), 可以得到:

$$E\Delta V(n) = E \left[ z^T(n) \left( -\mathbf{P} + \begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2 h & 0 \\ 0 & d_{22}\sigma_2^2 h \end{pmatrix} \right) \times z(n) \right] \leq -c E|z(n)|^2,$$

其中  $c$  是正数, 所以凭借定理 1, 可以得出系统(11)的零解是渐近均方稳定的. 证明完成.

接下来, 将应用定理 2 来研究系统(6)的正平衡点和边界平衡点的稳定性.

## 2 正平衡点的稳定性

现在应用定理 2 来分析系统(8), 它是式(11)的一种特殊形式, 在这种情况下, 系统(8)的系数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} & \frac{\beta S^* (\delta I^{*2} - 1)h}{(1 + \delta I^{*2})^2} \\ \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} & 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2})h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma)h \end{pmatrix}, \tag{14}$$

因为  $A^T D A - D = -P$ , 所以可以得到:

$$\begin{aligned} -p_{11} &= (a_{11}^2 - 1)d_{11} + 2a_{11}a_{21}d_{12} + a_{21}^2 d_{22}, \\ -p_{12} &= a_{11}a_{12}d_{11} + (a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} - 1)d_{12} + a_{21}a_{22}d_{22}, \\ -p_{22} &= a_{12}^2 d_{11} + 2a_{12}a_{22}d_{12} + (a_{22}^2 - 1)d_{22}. \end{aligned} \tag{15}$$

将矩阵  $A$  的元素带入式(15)中有

$$\begin{aligned} p_{11} &= - \left[ \left( 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right)^2 - 1 \right] d_{11} - \frac{2\beta I^* h \left( 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right)}{1 + \delta I^{*2}} d_{12} - \left( \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right)^2 d_{22}, \\ p_{12} &= - \left( 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right) \left( \frac{\beta S^* (\delta I^{*2} - 1)h}{(1 + \delta I^{*2})^2} \right) d_{11} - \left( \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \cdot \frac{\beta S^* (\delta I^{*2} - 1)h}{(1 + \delta I^{*2})^2} \right) d_{12} - \\ &\quad \left[ \left( 1 - \mu h - \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \right) \left( 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2})h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma)h \right) \right] d_{12} - \\ &\quad \frac{\beta I^* h}{1 + \delta I^{*2}} \left( 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2})h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma)h \right) d_{22}, \\ p_{22} &= \left( \frac{\beta S^* (\delta I^{*2} - 1)h}{(1 + \delta I^{*2})^2} \right)^2 d_{11} - \frac{2\beta S^* (\delta I^{*2} - 1)h}{(1 + \delta I^{*2})^2} \left( 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2})h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma)h \right) d_{12} - \\ &\quad \left[ \left( 1 + \frac{\beta S^* (1 - \delta I^{*2})h}{(1 + \delta I^{*2})^2} - (\mu + \gamma)h \right)^2 - 1 \right] d_{22}. \end{aligned} \tag{16}$$

根据式(13),可以得到:

$$p_{11} - d_{11}\sigma_1^2 h > 0, p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0, (p_{11} - d_{11}\sigma_1^2 h)(p_{22} - d_{22}\sigma_2^2 h) - p_{12}^2 > 0. \tag{17}$$

然后有以下推论.

**推论 1** 若存在一个正定矩阵  $P$ ,使得条件(17) 对于矩阵方程(16) 的解  $(d_{11}, d_{12}, d_{22})$  被满足,并且矩阵  $D$  是半正定的,那么系统(8) 的零解是渐近均方稳定的.因此,对系统(7) 的零解来说其就是依概率稳定的,这等同于系统(6) 的正平衡点  $E_e$  是依概率稳定的.

当  $1 - \frac{\alpha\beta}{\mu(\mu + \gamma)} < 0$  成立,正平衡点  $E_e = (S^*, I^*) = \left( \frac{\alpha - (\mu + \gamma)I_e^*}{\mu}, I_e^* \right)$  存在. 在系统(6)中取以下参数值:

$$\alpha = 4, \mu = 0.06, \gamma = 0.01, \beta = 0.2, \delta = 0.2, h = 0.1. \tag{18}$$

并将易感个体和染病个体的初始值设为

$$S(0) = 80, I(0) = 20. \tag{19}$$

正平衡点  $E_e$  可以通过以上参数值算得  $E_e = (S^*, I^*) = (39.18, 23.56)$ . 通过求解(14)得到:

$$A = \begin{pmatrix} 0.987 & 0.007 \\ 0.007 & 0.993 \end{pmatrix}.$$

对于正定矩阵  $P$ ,取  $p_{11} = p_{22} = 1, p_{12} = 0$ , 所以有

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

且半正定矩阵  $D$  通过求解(16)式得到:

$$D = \begin{pmatrix} 38.471 & -0.233 \\ -0.233 & 71.582 \end{pmatrix}.$$

借助推论 1,可以了解到如果  $\sigma_1, \sigma_2$  满足以下条件:

$$\sigma_1 < \frac{1}{\sqrt{d_{11}h}} = \frac{1}{\sqrt{38.471 \times 0.1}} = 0.509, \sigma_2 < \frac{1}{\sqrt{d_{22}h}} = \frac{1}{\sqrt{71.582 \times 0.1}} = 0.374, \quad (20)$$

那么,系统(8)的零解是渐近均方稳定的.因此,是依概率稳定的对于系统(7)的零解,这等同于是依概率稳定的对于系统(6)的正平衡点  $E_e$ .

接下来,将验证之前的阐述借助数值仿真.在图 1 中展示了噪声扰动强度  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  的情况,图 1(a)和图 1(b)分别表示系统(6)和线性系统(8)的解曲线.

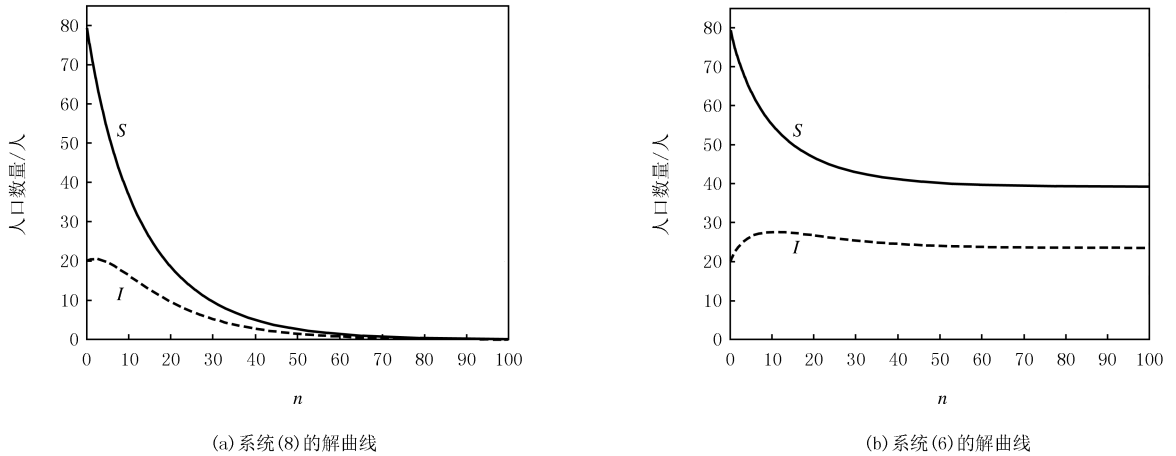


图1 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  时系统(8)和(6)的解曲线

Fig.1 The solution of system (8) and (6) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

如图 1 所示,图 1(a)中线性系统(8)的解曲线最终收敛到 0.图 1(b)中系统(6)的解曲线最终收敛于正平衡点  $E_e = (S^*, I^*) = (39.18, 23.56)$ .

因此,通过观察图像也可以得出系统(8)的零解是渐近均方稳定的,系统(6)的正平衡点  $E_e$  是依概率稳定的.

然后将对加入噪声扰动的系统(6)的解进行模拟.借助式(18)和(19)中已给出的参数值和初始值,并且假设  $\sigma_1, \sigma_2$  的值满足条件式(20),取  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.35$ , 具有噪声扰动的系统(6)的解轨迹就可以被得到.

从图 2 中可以看出,随机噪声并不影响曲线的最终走向,系统(6)的解轨迹最终还是收敛到正平衡点  $E_e$ ,这就表明系统(6)在正平衡点处是依概率稳定的.

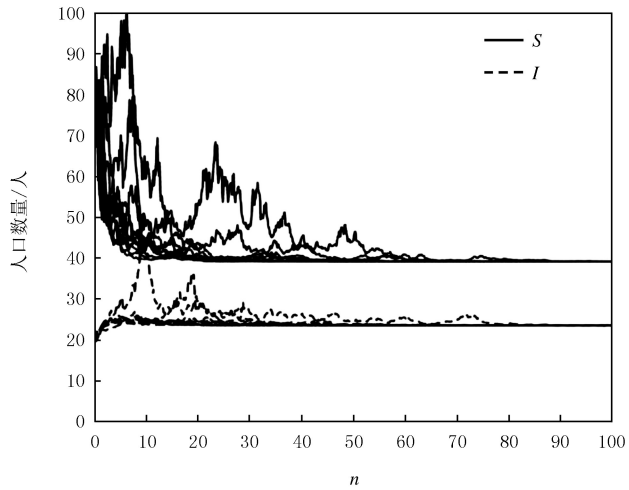


图2 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.35$  时系统(6)的解轨迹

Fig.2 Solution trajectories of system (6) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.35$

### 3 边界平衡点的稳定性

研究边界平衡点  $E_0 = (S_0, I_0)$  的稳定性将要借助线性系统(10).类似地,将定理 2 应用于系统(10),在这种情况下,系统(10)的系数矩阵为



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \mu h & -\frac{\alpha\beta h}{\mu} \\ 0 & 1 + \frac{\alpha\beta h}{\mu} - (\mu + \gamma)h \end{pmatrix}. \quad (21)$$

将矩阵  $\mathbf{A}$  的元素代入式(15)中,然后得到

$$\begin{aligned} p_{11} &= -((1 - \mu h)^2 - 1)d_{11}, \\ p_{12} &= (1 - \mu h) \cdot \frac{\alpha\beta h}{\mu} \cdot d_{11} - \left[ (1 - \mu h) \left( 1 + \frac{\alpha\beta h}{\mu} - (\mu + \gamma)h \right) - 1 \right] d_{12}, \\ p_{22} &= -\left( \frac{\alpha\beta h}{\mu} \right)^2 d_{11} + \frac{2\alpha\beta h}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha\beta h}{\mu} - (\mu + \gamma)h \right) d_{12} - \left[ \left( 1 + \frac{\alpha\beta h}{\mu} - (\mu + \gamma)h \right)^2 - 1 \right] d_{22}. \end{aligned} \quad (22)$$

与推论 1 类似,根据式(17),以下推论可以被得到.

**推论 2** 对于线性系统(10)的系数矩阵(21),如果存在一个正定矩阵  $\mathbf{P}$ ,使方程(22)的解  $(d_{11}, d_{12}, d_{22})$  满足条件(17),且矩阵  $\mathbf{D}$  为半正定的,则系统(10)的零解是渐近均方稳定的.因此,系统(9)的零解是依概率稳定的,这也就是说系统(6)的边界平衡点  $E_0$  是依概率稳定的.

无论  $1 - \frac{\alpha\beta}{\mu(\mu + \gamma)} < 0$  这个条件是否成立,对于边界平衡点来说它都是始终存在的.

当所选择的参数不满足正平衡点存在的条件时,系统(6)中只有一个边界平衡点.在这里,取以下参数值:

$$\alpha = 4, \mu = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0.01, \delta = 0.2, h = 0.1. \quad (23)$$

并且初始值仍为式(19)中所给出.

根据式(23)中所取的参数值,通过计算可以知道正平衡点存在的条件不被满足,因此在系统(6)中只存在一个边界平衡点,且这个边界平衡点为  $E_0 = \left( \frac{\alpha}{\mu}, 0 \right) = (40, 0)$ . 并且式(21)中的矩阵  $\mathbf{A}$  凭借这些参数求得为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.99 & -0.04 \\ 0.00 & 0.94 \end{pmatrix}.$$

同样,对于正定矩阵  $\mathbf{P}$ ,仍取  $p_{11} = p_{22} = 1, p_{12} = 0$ , 得到

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

半正定矩阵  $\mathbf{D}$  的具体形式通过求解方程(22)求得:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 50.251 & -28.673 \\ -28.673 & 27.806 \end{pmatrix}.$$

并且如果  $\sigma_1, \sigma_2$  满足以下条件:

$$\sigma_1 < \frac{1}{\sqrt{d_{11}h}} = \frac{1}{\sqrt{50.251 \times 0.1}} = 0.446, \sigma_2 < \frac{1}{\sqrt{d_{22}h}} = \frac{1}{\sqrt{27.806 \times 0.1}} = 0.599, \quad (24)$$

那么,根据推论 2,可以得出系统(10)的零解是渐近均方稳定的.因此,是依概率稳定的对于系统(9)的零解,这等同于依概率稳定的对于系统(6)的边界平衡点.

根据式(23)中的参数值和式(19)给出的初始值,当随机扰动强度为 0 时,得到系统(6)和(10)的解曲线.如图 3 中的(a)和(b)所示.

如图 3 所示,图 3(a)中线性系统(10)和图 3(b)中系统(6)的解曲线最终都分别收敛到它们的平衡点.因此,通过图像,也可以得到系统(10)的零解是渐近均方稳定的,而系统(6)的边界平衡点  $E_0$  是依概率稳定的.

当随机噪声强度不为 0,且  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的值满足条件(24)时,取  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$ , 参数值和初始值仍为式(23)和(19)中给出,然后可以得到具有随机噪声扰动的系统(6)的解轨迹.

如图 4 所示,可以看到,具有噪声扰动的系统(6)的解轨迹最终收敛于边界平衡点  $E_0 = (40, 0)$ ,这也表明系统(6)的边界平衡点是依概率稳定的.

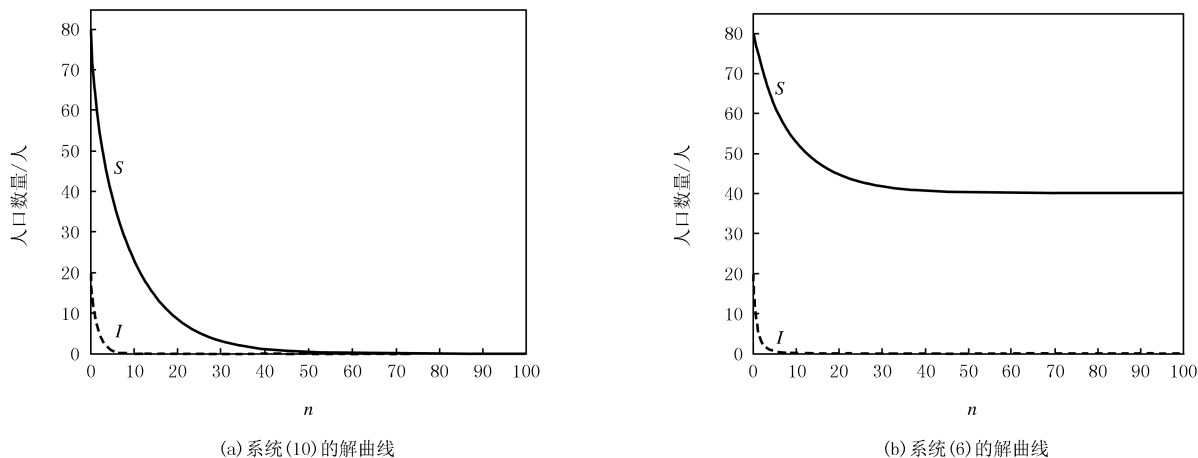


图3 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  时系统(10)和(6)的解曲线  
 Fig.3 The solution of system (10) and (6) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

接下来,考虑当满足正平衡点存在的条件  $1 - \frac{\alpha\beta}{\mu(\mu + \gamma)} < 0$  时,系统(6)的边界平衡点的稳定性.现在所取的参数值和初值仍为式(18)和(19)中给出的,在这种情况下,系统(6)同时存在正平衡点和边界平衡点.由方程(21)可以计算出矩阵  $A$  为

$$A = \begin{pmatrix} 0.994 & -1.333 \\ 0.000 & 2.326 \end{pmatrix}.$$

并且  $P$  仍为单位矩阵,此时求得矩阵  $D$  为

$$D = \begin{pmatrix} 83.584 & 84.412 \\ 84.412 & 84.791 \end{pmatrix}.$$

然而,矩阵  $D$  不是一个半正定矩阵,因此根据推论 2,在这种情况下系统(6)的边界平衡点是不稳定的.

如图 5 所示,发现当随机噪声强度为 0 时,图 5 中代表染病者的曲线  $I$  是趋向于无穷的,所以此时系统(10)的零解是不稳定的.

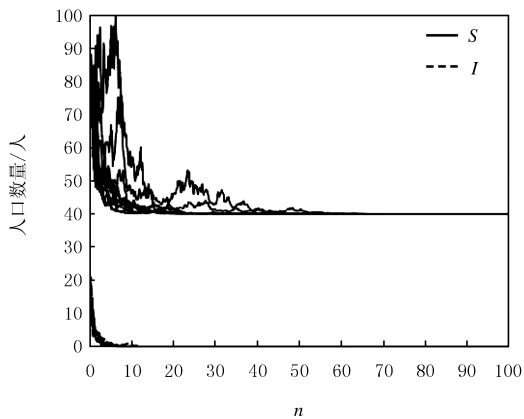


图4 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$  时系统(6)的解轨迹  
 Fig.4 Solution trajectories of system (6) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$

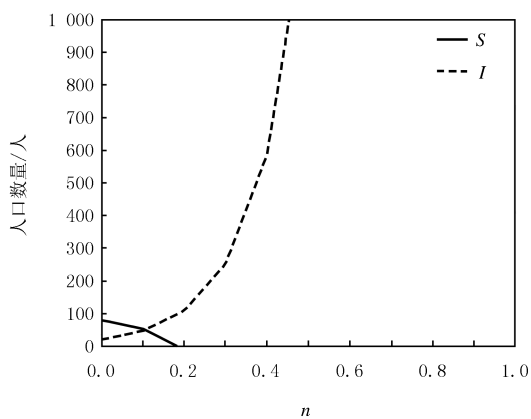


图5 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  时系统(10)的解曲线  
 Fig.5 Solution of system (10) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

然后在这种情况下加入随机扰动.如图 6 中,当加入一个较小的噪声强度后,发现此时系统的解轨迹在图中是非常不规则的.因此,当一个正平衡点存在时,无论随机扰动是否存在,对于系统(6)来说,它的边界平衡点都是不稳定的.



## 4 结 论

本文基于一个具有非单调发生率的 SIR 传染病模型,考虑到疾病在传播过程中不可避免地受到一些随机因素的影响,在系统中加入一个随机扰动项,并假设随机扰动强度与状态  $S(t)$  和  $I(t)$  偏离平衡点的偏差成正比.通过应用欧拉方法离散化系统,得到一个随机离散系统.用 Lyapunov 函数方法证明了系统在平衡点处稳定的充分条件.之后,论证了随机离散 SIR 传染病模型在正平衡点和边界平衡点处的稳定性.

最后,应用数值仿真对正平衡点和边界平衡点的稳定性进行了验证.当所选参数和噪声强度满足给定条件时,发现适当的噪声强度不会影响系统在平衡点处的稳定性.并且还发现,当正平衡点存在时,无论随机扰动强度是多少,边界平衡点的稳定性都不会被改变,并且在这种情况下,边界平衡点是不稳定的.

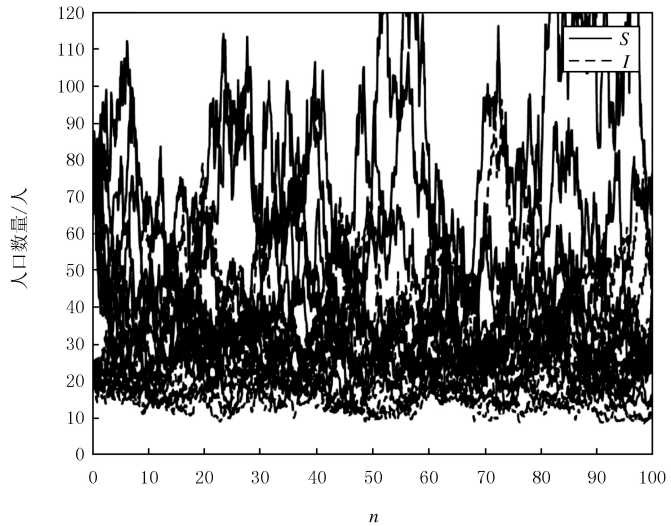


图6 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$  时系统(6)的解轨迹

Fig.6 Solution trajectories of system (6) when  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$

## 参 考 文 献

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-I[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1/2): 33-55.
- [2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-II. the problem of endemicity[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1/2): 57-87.
- [3] ZHANG X, LIU X. Backward bifurcation and global dynamics of an SIS epidemic model with general incidence rate and treatment[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2009, 10(2): 565-575.
- [4] HU Z, MA W, RUAN S. Analysis of SIR epidemic models with nonlinear incidence rate and treatment[J]. Mathematical Biosciences, 2012, 238(1): 12-20.
- [5] JIANG D, YU J, JI C, et al. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. Mathematical & Computer Modelling, 2011, 54(1/2): 221-232.
- [6] LIN Y, JIANG D. Long-time behaviour of a perturbed SIR model by white noise[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems Series B, 2013, 18(7): 1873-1887.
- [7] GRAY A, GREENHALGH D, HU L, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(3): 876-902.
- [8] TUONG T D, DANG H, et al. Extinction and permanence in a stochastic SIRS model in regime-switching with general incidence rate[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 34: 121-130.
- [9] SHAIKHET L. Stability of equilibrium states for a stochastically perturbed exponential type system of difference equations[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2015, 290: 92-103.
- [10] PALMER P. Application of a discrete Itô formula to determine stability (instability) of the equilibrium of a scalar linear stochastic difference equation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64: 2302-2311.
- [11] HU Z, TENG Z, JIANG H. Stability analysis in a class of discrete SIRS epidemic models[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2012, 13(5): 2017-2033.
- [12] LIU Q, CHEN Q. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 282: 155-166.

- [13] XIAO D, RUAN S. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. *Mathematical Biosciences*, 2007, 208(2): 419-429.
- [14] FENG T, QIU Z. Global dynamics of deterministic and stochastic epidemic systems with nonmonotone incidence rate[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2018, 11(8): 107-130.
- [15] ZHANG J, REN J, ZHANG X. Dynamics of an SLIR model with nonmonotone incidence rate and stochastic perturbation[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, 16(5): 5504-5530.
- [16] Al-DARABSAH I. A time-delayed sveir model for imperfect vaccine with a generalized nonmonotone incidence and application to measles [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 91: 74-92.
- [17] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Second Edition. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007.
- [18] BERETTA E, KOLMANOVSKII V, SHAIKHET L. Stability of epidemic model with time delays influenced by stochastic perturbations [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1998, 45(3/4): 269-277.
- [19] LI D, ZHAO Y, SONG S. Dynamic analysis of stochastic virus infection model with delay effect[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 528: 121463.
- [20] LIAO X, CHEN Y. Stability of a stochastic discrete mutualism system[J]. *Advances in Difference Equations*, 2019(1): 1-10.
- [21] HIGHAM, DESMOND J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(3): 525-546.
- [22] LI L, SUN G, JIN Z. Bifurcation and chaos in an epidemic model with nonlinear incidence rates[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(4): 1226-1234.
- [23] REZAPOUR S, MOHAMMADI H, SAMEI M E. SEIR epidemic model for COVID-19 transmission by Caputo derivative of fractional order[J]. *Advances in Difference Equations*, 2020(1): 490.
- [24] SHAIKHET L. *Lyapunov functionals and stability of stochastic difference equations*[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011.

## Stability of stochastic discrete SIR epidemic model with nonmonotonic incidence rate

Tan Wei, Liu Maoxing

(College of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** The stability of a stochastic discrete SIR epidemic model with nonmonotonic incidence rate at equilibrium point is studied. Based on a continuous SIR epidemic model with noise disturbance and nonmonotonic incidence rate, discretized by Euler-Maruyama method, and a stochastic discrete SIR model is obtained. Using Lyapunov function, we prove the sufficient conditions for the stability of the system at the equilibrium point, and propose the sufficient conditions for the probability stability of nonlinear difference equations at the zero solution and the sufficient conditions for the mean square stability of linear difference equations at the zero solution. Then we prove the stability of the system at the positive equilibrium point and the boundary equilibrium point. Finally, The conclusion is verified by numerical simulation, and the influence of stochastic disturbance in the system is proved.

**Keywords:** stochastic discrete; nonmonotone incidence rate; Euler-Maruyama method; mean square stability; numerical simulation

[责任编辑 陈留院 赵晓华]