第 46 卷　第 4 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol.46　No.4
2018 年 7 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Jul. 2018

文章编号:1000－2367(2018)04－0023－06　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.04.004

半参数跳-扩散模型的近似极大似然估计

——基于转移密度的闭式展开方法

王继霞，张亚萌

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:首先,引入半参数跳-扩散模型,用闭式展开的方法得到转移概率密度的近似表达式,证明了转移密度的展开式收敛到真实的转移密度.然后,利用近似极大似然估计的方法对模型中的参数进行估计.针对时变参数和非时变参数,分两步进行估计:第 1 步,采用局部常数拟合对时变波动率参数进行近似,利用核函数加权的方法得到了时变参数的局部近似极大似然估计量;第 2 步,用传统的极大似然估计方法,得到了非时变参数的近似极大似然估计.最后,证明了所得估计量的渐近性质.

关键词:跳-扩散模型;转移密度;近似极大似然估计;核函数加权;局部常数拟合

中图分类号:O211.6;F830.9　　**文献标志码**:A

跳-扩散模型在资产定价、风险管理等方面有着广泛的应用,在期权定价中,跳-扩散模型通常用于描述标的资产价格动态过程的变化规律,并能够有效地解释金融数据中的峰度特征和波动率微笑.1976 年,文献[1]在研究期权定价时,针对 Black-Scholes 模型中的负偏度和过度峰度问题,提出了跳-扩散过程.在资产收益模型中,如果假设发生变化,就会得到不同的跳-扩散过程.例如,由于扩散模型中资产的瞬时收益和瞬时波动率与状态向量有关,因此文献[2]在 2000 年提出了仿射跳-扩散模型,并用于各种各样的估值问题.此后,仿射跳-扩散模型开始应用于各个领域,文献[3]在 2008 年基于仿射跳-扩散模型对电力衍生产品进行定价.2002 年,文献[4]提出了双指数跳-扩散模型,认为资产价格变动可以分别由一个几何布朗运动驱动的连续随机过程和一个离散的跳-扩散过程来表示.2014 年,文献[5]研究了资产价格遵循双指数跳-扩散模型时的信用违约互换点差.2016 年,文献[6]研究了仿射跳-扩散过程,并对转移密度给出了新的表达式.此外,相关的布朗运动驱动的文献可以参考文献[7].

一般来说,在研究扩散模型时,利用转移密度对参数进行估计是一种经典有效的方法.扩散模型的转移密度对资产定价、市场收益率的计算、投资组合和风险管理等方面都有着非常重要的作用.但是在多数情形,跳-扩散模型的转移密度很难求出来,因此很多学者研究转移密度的近似展开式.1999 年,文献[8]首次提出转移密度的展开式以及它在极大似然估计中的应用.2013 年,文献[9]用转移密度的方法研究了扩散过程的极大似然估计.2015 年,文献[10]研究了跳跃 Lévy 过程的转移密度的计算.2016 年,文献[11]用闭式似然展开的方法得到转移密度的近似展开式,并利用近似转移密度得到了跳-扩散模型参数的近似估计.2018 年,文献[12]用转移概率的方法研究了离散工作休假排队问题.由于转移密度的闭式展开式计算速度快、数值精度高,因此受到许多学者的青睐.在上述的文献中,波动参数往往是时齐的.但是,时间的变化和金融条件的不确定性是目前金融环境的两个显著特点,标的资产的价格大多与时间有关,因此,标的资产的价格应该是一个时变扩散模型.基于此,本文主要研究带时变波动率的半参数跳-扩散模型的估计问题.

收稿日期:2017-09-23;**修回日期**:2018-04-26.

基金项目:国家自然科学基金(U1504701);河南省教育厅人文社会科学研究项目(2015-GH-233);河南师范大学博士启动课题(qb15184).

作者简介(通信作者):王继霞(1978－),女,河南驻马店人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为金融统计推断和金融风险管理,E-mail: jixiawang@163.com.

1 模型假设和转移密度的闭式展开

1.1 模型假设

假设随机过程$\{X_t\}$满足如下带跳的广义 Aït-Sahalia 模型，

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t + \gamma X_t^{-1} + \delta X_t^2)\,dt + \sigma(t) X_t^{\gamma} dW_t + d\Big(\sum_{n=0}^{N(t)} Z_n\Big), \tag{1}$$

其中，X_t 是一维随机变量，X_t 的状态空间$S \subset \mathbf{R}$；W_t 是一维标准布朗运动；$\{N_t\}$ 是强度为λ 的泊松过程；未知参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都在有界的开集Θ 内有定义，与时间 t 无关；$\sigma(t)$ 是时变波动率函数，对于每个固定的时间点 t_0，$\sigma(t_0) \in \Theta$；Z_n 服从正态分布，$Z_n \sim N(a, b^2)$.

为了进行局部常数近似，假设波动参数 $\sigma(t)$ 满足以下条件：

(A1) $\sigma(t)$ 关于 t 连续可微；

(A2)存在常数 C，使得 $\|\sigma(t) x_t^{\gamma}\|^2 \le C(1 + \|x\|)^2$.

首先给出模型的转移密度的闭式展开式.

1.2 转移密度的闭式展开

在给定 $X(t) = x_0$ 的条件下 $X(t+\Delta)$ 的概率密度为

$$P(X(t+\Delta) \in dx \mid X(t) = x_0) = p(\Delta, x \mid x_0)\,dx, \tag{2}$$

为了更加方便地研究转移密度，本文对时变波动率 $\sigma(t)$ 进行局部常数拟合，即对任意给定的时间点 t_0，令 $\sigma(t) = \sigma(t_0)$，其中，t 在 t_0 的某个邻域内取值.

下面给出模型(1)的转移概率密度的闭式渐近展开式的近似形式(参考文献[11])，

$$p_M(\Delta, x \mid x_0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\sigma(t_0) x_0^{\gamma}} \sum_{m=0}^{M} \rho_m(\Delta, x \mid x_0), \tag{3}$$

其中，p_M 是 p 的 M 阶展开；$\rho_M(\Delta, x \mid x_0)$ 的计算在后面的讨论中给出.

首先在模型(1)中引入 Stratonovich 积分[13]，模型表示如下，

$$dX_t = c(X(t))dt + \sigma(t_0) X^{\gamma}(t) \circ dW(t) + d\Big(\sum_{n=0}^{N(t)} Z_n\Big), X(0) = x_0, \tag{4}$$

其中，$c(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^{-1} + \delta x^2 - \frac{1}{2}\sigma(t_0)\gamma x^{2\gamma-1}$，$\circ$表示 Stratonovich 积分.

为了得到该模型的更好的局部表现，对模型(4)进行参数化处理(见文献[9]).用 $X^{\varepsilon}(t) = X(\varepsilon^2 t)$ 对模型(4)进行缩放，根据积分替换和布朗运动的缩放性质，参数化形式如下，

$$dX^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\Big(c(X^{\varepsilon}(t))dt + \sigma(t_0) X(t)^{\gamma} \circ dW(t) + d\Big(\sum_{n=0}^{N(t)} Z_n\Big)\Big), \tag{5}$$

其中，$X^{\varepsilon}(0) = x_0$；$\varepsilon > 0$ 且 $X^{\varepsilon}(t)|_{\varepsilon=1} \equiv X(t)$. 模型参数化之后的转移密度的展开式如下，

$$p^{\varepsilon}(\Delta, x \mid x_0)dx = P(X^{\varepsilon}(t+\Delta) \in dx \mid X^{\varepsilon}(t) = x_0) = P(X^{\varepsilon}(\Delta) \in dx \mid X^{\varepsilon}(0) = x_0). \tag{6}$$

首先，假设 $X^{\varepsilon}(t)$ 的 M 阶展开如下，

$$X^{\varepsilon}(t) = \sum_{m=0}^{M} X_m(t)\varepsilon^m + O(\varepsilon^{M+1}), \tag{7}$$

其次，引入狄拉克 δ 函数的条件期望表示 $X^{\varepsilon}(t)$ 的转移密度，

$$p^{\varepsilon}(\Delta, x \mid x_0) = E(\delta(X^{\varepsilon}(\Delta) - x) \mid X^{\varepsilon}(0) = x_0), \tag{8}$$

然后，对 $X^{\varepsilon}(\Delta)$ 进行标准化，

$$Y^{\varepsilon}(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0) x_0^{\gamma}} \frac{X^{\varepsilon}(\Delta) - x_0}{\varepsilon}. \tag{9}$$

因此，$Y^{\varepsilon}(\Delta)$ 的展开式如下，

$$Y^{\varepsilon}(\Delta) = \sum_{m=0}^{M} Y_m(\Delta)\varepsilon^m + O(\varepsilon^{M+1}), \tag{10}$$

其中，$Y_m(\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}X_{m+1}(\Delta)$.由狄拉克 δ 函数的缩放性质可得

$$E(\delta(X^{\varepsilon}(\Delta)-x))=\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}E(\delta(Y^{\varepsilon}(\Delta)-y)),\tag{11}$$

其中，$y=\dfrac{x-x_0}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}$.

由于 $\delta(Y^{\varepsilon}(\Delta)-y)=\sum\limits_{m=0}^{M}\varphi_m(y)\varepsilon^m+\mathrm{O}(\varepsilon^{M+1})$，$\varphi_m(y)$ 是 m 阶展开项，假设 $\rho_m(y)=E(\varphi_m(y))$，则

$$E(\delta(Y^{\varepsilon}(\Delta)-y))=\sum_{m=0}^{M}\rho_m(y)\varepsilon^m+\mathrm{O}(\varepsilon^{M+1}),\tag{12}$$

因此，

$$p_M^{\varepsilon}(\Delta,x\mid x_0)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}\sum_{m=0}^{M}\rho_m\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\varepsilon^m.\tag{13}$$

令 $m=1$，则转移密度 $p(\Delta,x\mid x_0)$ 的 M 阶近似为

$$p_M(\Delta,x\mid x_0)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}\sum_{m=0}^{M}\rho_m\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}(x-x_0)\right).\tag{14}$$

本文中，主要研究模型(1)的密度展开的计算和实现.

p_M 的计算如下，先计算 $\rho_m(y)$，$\rho_m(y)$ 的值取决于跳跃总数.令

$$\rho_m(y)=E[\varphi_m(y)]=\sum_{n=0}^{\infty}E[\varphi_m(y)\mid N(\Delta)=n]p(N(\Delta)=n),\tag{15}$$

其中，$p(N(\Delta)=n)=\mathrm{e}^{-\lambda\Delta\frac{(\lambda\Delta)n}{n!}}$. 令

$$K_{m,n}(y)=E[\varphi_m(y)\mid N(\Delta)=n],\tag{16}$$

因此，有

$$\rho_m(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda\Delta}\frac{(\lambda\Delta)^n}{n!}K_{m,n}(y).\tag{17}$$

在计算 $\rho_m(y)$ 时 n 的取值范围是$[0,\infty)$，在实际应用中很难计算.因此，对无穷大的 n，进行 N 阶近似，得到 $\rho_m(y)$ 的真实值的近似表达式为

$$\rho_{m,n}(y)=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\lambda\Delta}\frac{(\lambda\Delta)^n}{n!}K_{m,n}(y).\tag{18}$$

本节的以下部分将介绍 $K_{m,n}(y)$ 的计算方法，见参考文献[9,11].首先计算 $K_{0,n}(y)$，

$$K_{0,n}(y)=E(E(\sigma(Y_0(\Delta)-y)\mid\sum_{n=0}^{N(\Delta)}Z_n,N(\Delta)=n)N(\Delta)=n)=E[\phi_I(y-\frac{1}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}((\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^{-1}+\delta x_0^2-\frac{1}{2}\sigma(t_0)\gamma x_0^{2\gamma-1})\Delta+\sum_{n=0}^{N(t)}Z_n))N(\Delta)=n],\tag{19}$$

其中 ϕ 表示的是标准正态分布的密度函数.

经计算，(19)式可以表示为，

$$K_{0,n}(y)=\sqrt{\frac{\Delta\sigma(t_0)^2x_0^{2\gamma}}{\Delta\sigma(t_0)^2x_0^{2r}+n\beta}}\times\phi\left(y-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}(\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^{-1}+\delta x_0^2)-\frac{na}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}\right),\tag{20}$$

在这里，先提供两个例子的计算结果，即 $K_{0,0}(y)$ 和 $K_{0,1}(y)$，

$$K_{0,0}(y)=\phi\left(y-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}(\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^{-1}+\delta x_0^2)\right),\tag{21}$$

$$K_{0,1}(y)=\sqrt{\frac{\Delta\sigma(t_0)^2x_0^{2\gamma}}{\Delta\sigma(t_0)^2x_0^{2r}+\beta}}\times\phi\left(y-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}(\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^{-1}+\delta x_0^2)-\frac{na}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^{\gamma}}\right),\tag{22}$$

下面计算 $K_{m,n}(y)$,令 $m \geq 1$,且 $S_m=\{(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega)) \mid \omega=1,2,\cdots,\xi(\omega)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\omega),\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\omega \geq 1,\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\omega=m,\zeta(\omega)=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_\omega),\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_\omega\}$,

则,可以得到 $K_{m,n}(y)$ 的表达式如下:

$$K_{m,n}(y)=\sum_{\substack{(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega))= \\ (\omega,(\xi_1,\cdots,\xi_\omega),(\zeta_1,\cdots,\zeta_\omega))\in S_m}} \frac{1}{\omega!}\left(-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\right)\frac{1}{\sigma(t_0)x_0^\gamma}\times$$
$$E\left[F_{n,(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega))}\left(y-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(t_0)x_0^\gamma}(\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^{-1}+\delta x_0^2)-\frac{na}{\sqrt{\Delta}\sigma(t_0)x_0^\gamma}\right)\right], \tag{23}$$

其中,$F_{n,(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega))}(z)=\phi(z)D(P_{n,(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega))}(\sqrt{\Delta}z)),D(u(z))=\dfrac{\partial u(z)}{\partial z}-u(z)z,P_{n,(\omega,\xi(\omega),\zeta(\omega))}(w)=E\left[\prod_{i=1}^{\omega}X_{\xi_{i+1},\zeta_i}(\Delta) \mid W(\Delta)=w,N(\Delta)=n,g(\Delta)\right]$,其中 $\{g(t)\}=\sigma(J(s),s\leq t)$ 是由 $J(s)$ 生成的滤子.

定理 1 如果 $\varepsilon\to 0,M\geq 1$,则转移密度满足下面的等式

$$\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid p_M^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)-p^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)\mid=O(\varepsilon^{M+1}), \tag{24}$$

如果 $N\to\infty$,且 $\varepsilon\to 0,M\geq 1$ 时,近似的转移密度满足下式

$$\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)-p^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)\mid\to 0. \tag{25}$$

证明 令参数和滞后变量 x_0 独立,则对 $\forall M\geq 0$,有 $\delta(Y^\varepsilon(\Delta;\theta,x_0)-y)=\sum_{m=0}^{M}\varphi_m(y;\theta,x_0)\varepsilon^m+O(\varepsilon^{M+1})$,因此,可以得到 $\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\left|E\left(\delta(Y^\varepsilon(\Delta;\theta,x_0)-y)-\sum_{m=0}^{M}\varphi_m(y;\theta,x_0)\varepsilon^m\right)\right|=O(\varepsilon^{M+1})$,根据(8)式进行变换,可以得到

$$\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid E(\delta(X^\varepsilon(\Delta)-x)\mid X^\varepsilon(0)=x_0)-\frac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon\sigma(t_0)x_0^\gamma}\sum_{m=0}^{M}\varphi_m\left|\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon\sigma(t_0)x_0^\gamma}\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\varepsilon^m\right|=O(\varepsilon^{M+1}),$$

因此令 $\varepsilon\to 0,M\geq 1$,$\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid p_M^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)-p^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)\mid=O(\varepsilon^{M+1})$,如果 $N\to\infty$,则 $\varphi_{m,N}(y)\to\varphi_m(y)$,所以,对于任意的 $M\geq 1$,当 $N\to\infty$ 时,有 $\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)-p^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)\mid\to 0$,因此,可以得到,令 $N\to\infty$ 且 $\varepsilon\to 0,M\geq 1$ 时,有 $\sup_{x\in S,\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)-p^\varepsilon(\Delta,x\mid x_0)\mid\to 0$.

证毕.

2 近似极大似然估计

令 $\theta=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda,a,b)^{\mathrm{T}}$ 为模型(1)的参数向量,$\sigma(t)$ 为时变波动率参数函数.假设$(X_{t_0},X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$为模型(1)的等距观测样本,$0\leq X_{t_0}<X_{t_1}<\cdots<X_{t_n}\leq T$,令 $\Delta=t_i-t_{i-1},i=1,2,\cdots,n$.假设当 $\theta_i\neq\theta_j$ 时,$p_i\neq p_j$,即 θ 可识别.n 为正整数,Δ 为时间间隔.针对模型(1)的参数向量 θ 和时变波动率 $\sigma(t)$,分两步来讨论其极大似然估计.

第 1 步,估计 $\sigma(t)$.首先,固定参数向量 $\theta=\theta_0=(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\delta_0,\lambda_0,a_0,b_0)^{\mathrm{T}}$,考虑时变波动率 $\sigma(t)$ 的局部极大似然估计.由于 $\sigma(t)$ 是时变的参数,因此,采用局部常数近似的方法对它进行近似,即,对任意给定的时间点 t_0,在 t_0 的某个邻域内,令 $\sigma(t)=\sigma(t_0)$,其中,h 表示邻域的大小,称为带宽参数.则把 $\sigma(t_0)$ 作为 $\sigma(t)$ 的近似.

接下来,构造关于 $\sigma(t_0)$ 的核函数加权似然函数,即

$$l_n(\sigma(t_0))=\prod_{i=1}^{n}p(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\sigma(t_0))K_h(t_i-t_0), \tag{26}$$

其中,$K(x)$ 是权重函数,称为核函数,$K_h(x)=K(x/h)/h$.由于在实际问题中似然函数不容易计算,因此,引入 $\sigma(t_0)$ 的(M,N)阶的加权近似似然函数,即

$$l_n^{(M,N)}(\sigma(t_0))=\prod_{i=1}^{n}p_{M,N}(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\sigma(t_0))K_h(t_i-t_0), \tag{27}$$

则它的对数似然函数为

$$L_n^{(M,N)}(\sigma(t_0))=\sum_{i=1}^{n}p_{M,N}(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\sigma(t_0))K_h(t_i-t_0),\tag{28}$$

可以得到近似极大似然估计 $\hat{\sigma}^{(M,N)}(t_0)$，即

$$\hat{\sigma}^{(M,N)}(t_0)=\arg\max_{\sigma(t_0)}L_n^{(M,N)}(\sigma(t_0)),\tag{29}$$

至此，可得 $\hat{\sigma}(t_0)$ 的近似极大似然估计 $\hat{\sigma}^{(M,N)}(t_0)$，即 $\hat{\sigma}^{(M,N)}(t_0)$ 是 $\sigma(t)$ 的近似极大似然估计.

第 2 步，固定 $\hat{\sigma}^{(M,N)}(t_0)$，估计 θ.首先，对参数 θ 进行极大似然估计.构造似然函数为，

$$l_n(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\theta),\tag{30}$$

则它的对数似然函数为

$$L_n(\theta)=\sum_{i=1}^{n}p(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\theta),\tag{31}$$

通过对 $L_n(\theta)$ 求 θ 的偏导数，可以得到 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_n$，即 $\hat{\theta}_n=\arg\max_{\theta\in\Theta}L_n(\theta)$.

由于在实际问题中，有的似然函数不容易计算，因此，通过类比，引入 (M,N) 阶的近似极大似然函数，其中的 $p_{M,N}$ 是由(15)式定义的转移密度，

$$l_n^{(M,N)}(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p_{(M,N)}(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\theta),\tag{32}$$

则它的对数似然函数为

$$L_n^{(M,N)}(\theta)=\sum_{i=1}^{n}p_{(M,N)}(\Delta,X_{t_i}\mid X_{t_{i-1}};\theta),\tag{33}$$

通过对 $L_n^{(M,N)}(\theta)$ 求 θ 的偏导数，可以得到近似极大似然估计 $\hat{\theta}_n^{(M,N)}$，即

$$\hat{\theta}_n^{(M,N)}=\arg\max_{\theta\in\Theta}L_n^{(M,N)}(\theta),\tag{34}$$

至此，可得 $\hat{\theta}_n^{(M,N)}$ 是 $\hat{\theta}_n$ 的近似，即 $\hat{\theta}_n^{(M,N)}$ 是 θ 的近似极大似然估计.

3　渐近性质

定理 2　如果样本容量 n 固定，则当 $N\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_n^{(M,N)}-\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}0$.

证明　令 $R^{(M,N)}(\Delta,x\mid x_0)=\sup_{\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}(\Delta,x\mid x_0)-p(\Delta,x\mid x_0)\mid$，由于当 $N\to\infty$ 并且 $M\geq 1$ 时，$\sup_{\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}(\Delta,x\mid x_0)-p(\Delta,x\mid x_0)\mid\to 0$，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $R^{(M,N)}(\Delta,x\mid x_0)\leq\varepsilon$ 成立.则对于任意的正整数 k，就有

$$E(\mid R^{(M,N)}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\mid^k\mid X(t)=x_0)\leq\varepsilon,$$

根据马尔科夫不等式，可以得到，在给定 $X(t)=x_0$ 的情况下，$R^{(M,N)}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))$ 依概率收敛到 0.

由全概率公式 $P(\mid R^{(M,N)}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\mid>\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\mid R^{(M,N)}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\mid>\varepsilon\mid X(t)=x_0)P(X(t)\in \mathrm{d}x_0)$，因此，由勒贝格控制收敛定理可得，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$P(\mid R^{(M,N)}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\mid>\varepsilon)\to 0$，即，$P(\sup_{\theta\in\Theta}\mid p_{M,N}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))-p(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\mid>\varepsilon)\to 0$，因此，可以得到，$p_{M,N}(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))-p(\Delta,X(t+\Delta)\mid X(t))\xrightarrow{P}0$，因此，似然函数 $l_n^{(M,N)}(\theta)$ 收敛到 $l_n(\theta)$.因此，当 $N\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_n^{(M,N)}-\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}0$.

证毕.

定理 3　如果样本容量 n 固定，则当 $N\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_n^{(M,N)}-\theta\xrightarrow{P}0$.

证明　因为 θ 是 $\hat{\theta}_n$ 的极大似然估计，所以当 $N\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_n-\theta\xrightarrow{P}0$，由定理 2 可知，当 $N\to\infty$ 时，

$\hat{\theta}_n^{(M,N)} - \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} 0$,所以,当 $N \to \infty$ 时,$\hat{\theta}_n^{(M,N)} - \hat{\theta}_n + \hat{\theta}_n - \theta \xrightarrow{P} 0$,即,当 $N \to \infty$ 时,$\hat{\theta}_n^{(M,N)} - \theta \xrightarrow{P} 0$,证毕.

参 考 文 献

[1] Merton R.Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J].Finance Econometrica,1976,3:125-144.

[2] Duffie D,Pan J,Singleton K.Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions[J].Econometrica,2000,68:1343-1376.

[3] Nomikos N K,Soldatos O.Using affine jump diffusion model for modelling and pricing electricity derivatives[J].Applied Mathematical Finance,2008,15(1):41-71.

[4] Kou S G.A jump-diffusion model for option pricing[J].Manage Science,2002,48:1086-1101.

[5] Yang R C,Pang M X,Jin Z.Valuing credit default swap under a double exponential jump diffusion model[J].Applied Mathematical,2014,29(1):36-43.

[6] Li L F,Rafael M A,Daniel M.Analytical representations for the basic affine jump diffusion[J].Operations Research Letters,2016,44(1):121-128.

[7] 黄建华,陈涌,闫威.分数布朗运动驱动的分数阶 Benjamin-Ono 方程的适定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2017,45(4):10-14.

[8] Aït-Sahalia Y.Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions[J].Finance,1999,54:1361-1395.

[9] Li C X.Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions[J].Annals of Statistics,2013,41(3):1350-1380.

[10] Kamil K,Pawel S.Estimates of transition densities and their derivatives for jump Lévy processes[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2015,431(1):260-282.

[11] Li C X,Chen D C.Estimating jump-diffusions using closed-form likelihood expansions[J].Journal of Econometrics,2016,195(1):51-70.

[12] 马占友,王文博,王哲,等.带非抢占优先权和可变服务率的离散工作休假排队[J].河南师范大学学报(自然科学版),2018,46(1):23-28.

[13] Simon K,Peter D D.Algorithms for integration of stochastic differential equations using parallel optimized sampling in the Stratonovich calculus[J].Computer Physics Communications,2017,212:25-38.

Approximate maximum likelihood estimation of semi-parametric jump-diffusion model

——closed-expansion method based on transfer density

Wang Jixia, Zhang Yameng

(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract:First, we introduce the semi-parametric jump-diffusion model, and get the expression of the transition probability density using the closed-form method.It is proved that the expansion of the transition density converges to the true transition density.Then we use the approximate maximum likelihood estimation method to estimate the parameters in the model.For the time-varying parameter and the non-time-varying parameter, we estimate it in two steps.In the first step, we use the method of local constant fitting to approximate the time-varying volatility parameters, then the kernel function weighted method is used to estimate the parameters, and we get the local approximate maximum likelihood estimators of the time-varying parameters.In the second step, the approximate maximum likelihood estimation of non-homogeneous parameters is obtained by using the traditional maximum likelihood estimation method.Finally, we prove the asymptotic properties of all estimators.

Keywords:jump-diffusion model; transition density; approximate maximum likelihood estimation; kernel weighting; local constant fitting

[责任编校 陈留院]