文章编号:1000-2367(2021)01-0001-09　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.01.001

修正泡型图的条件匹配排除

王世英,杨婕,马晓蕾

(河南师范大学 数学和信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:一个图 G 的条件匹配排除数是最少的边的数量,使得删去这些边后形成的图既没有孤立点也没有完美匹配和几乎完美匹配.任何一个这样的边集称为 G 的一个最优条件匹配排除集.条件匹配排除数是衡量网络在边故障情况下的鲁棒性的参数之一.主要给出了修正泡型图的条件匹配排除数是 $2n-2(n\geq 5)$.

关键词: Cayley 图;修正泡型图;匹配;条件匹配排除

中图分类号:O157.5　　**文献标志码:**A

一个图的完美匹配是一个边集使得图的每一个顶点都恰好与这个边集中的一条边关联.一个几乎完美匹配是一个边集使得图中除了有一个点以外其余的点都只与一条边关联.因此,如果一个图有一个完美匹配,则它有偶数个点;如果一个图有一个几乎完美匹配,则它有奇数个点.一个图 G 的匹配排除数,用 $mp(G)$ 表示,是最小的边的数量,使得删去这些边后既没有几乎完美匹配也没有完美匹配.任何一个这样的最优边集合被称为一个最优匹配排除集.如果图 G 既没有完美匹配也没有几乎完美匹配,定义 $mp(G)=0$.

分布处理系统能够提升连通性和可靠性.这样的分布系统的一个重要的成分是它的拓扑结构,被定义为内部处理互联体系.在特定的应用中,每个点有一个特殊的对应点,匹配排除数能够度量这个对应在连接故障事件中的鲁棒性[1].

若 G 是含有偶数个顶点的图,与某一个顶点关联的边集合构成一个匹配排除集,称这样的匹配排除集为平凡的.然而,在随机故障模型下,这种情形是几乎不可能发生的.在此情况下,文献[2]定义了图 G 的条件匹配排除数,用 $mp_1(G)$ 来表示,定义为最小的边数,使得删除这些边得到的图既没有孤立点也没有完美匹配和几乎完美匹配.任何一个这样的边集被称为图 G 的一个最优条件匹配排除集.如果图 G 既没有完美匹配也没有几乎完美匹配,或者图 G 没有条件匹配排除集,则定义 $mp_1(G)=0$.称与一个最小度点相关联的所有边组成的集合为最优的平凡匹配排除集.由此可以看出,对一个没有孤立点的图,妨碍一个完美匹配产生的一种可能是一条路 uvw,该路中 u 和 w 的度都为 1.因此,要产生这样的路集,可以选择原图中的任意一条 uvw 路,并删除所有与 u 或者 w 关联的边,但不删除边 (u,v) 和 (v,w).定义 $v_e(G)=\min\{d_G(u)+d_G(w)-2-y_G(u,w)$: u 和 w 为长为 2 的路的端点$\}$,其中,$d_G(\cdot)$ 是一个度函数,如果 u 和 w 相邻,则 $y_G(u,w)=1$,否则为 0.称由 v_e 导出的最优解为平凡的条件匹配排除.最新的相关研究成果参考文献[3-6].

命题 1[2]　若 G 为一个有偶数个顶点的图,则 $mp(G)\leq\delta(G)$,其中 $\delta(G)$ 为 G 的最小度.

命题 2[2]　若 G 为一个有偶数个点的图且 $\delta(G)\geq 3$,则 $mp_1(G)\leq v_e(G)$.

1　预备知识

本节将给出文中需要的一些基本符号和概念.

图 G 中与顶点 v 相关联的边的数目称为 v 的度.若图 G 中的每个点的度都为 t,则称图 G 为 t 正则的.在

收稿日期:2020-03-27;**修回日期:**2020-11-27.

基金项目:国家自然科学基金(61772010)

作者简介(通信作者):王世英(1961—),男,山西晋中人,河南师范大学教授,博士,博士生导师,研究方向为离散数学与理论计算机科学,E-mail:wangshiying@htu.edu.cn.

G 中与 v 相邻的点称为 G 的邻点，记作 $N(v)$.二部图是指一个图，它的顶点集可以分解为两个(非空)子集 X 和 Y，使得每条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；这样一种分类 (X,Y) 称为图的一个二分类.图 G 的一条途径是指一个有限非空序列 $W=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对 $1\leq i\leq k$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i.称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径.若途径 W 的顶点 $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 互不相同，则称 W 为路，记作 $W=v_0v_1\cdots v_k$.称一条途径是闭的，如果它有正的长且起点和终点相同.若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同，则它称为圈，记作 $C=v_0v_1\cdots v_kv_0$.长为 k 的圈称为 k 圈，按 k 是奇数还是偶数，称 k 圈是奇圈或偶圈.包含 G 的每个顶点的路称为 G 的 Hamilton 路.G 的 Hamilton 圈是指包含 G 的每个顶点的圈.G 的围长是 G 中最短圈的长.

设 Q 是一个有限群，S 是 Q 的不含单位元的生成集.Cayley 有向图 $Cay(S,Q)$ 定义如下：它的顶点集是 Q，弧集是 $\{(g,gs):g\in Q,s\in S\}$.若对任意的 $s\in S$，有 $s^{-1}\in S$，则称这个 Cayley 图为无向 Cayley 图.本文中的 Cayley 图均为无向 Cayley 图.

图 1 和图 2 分别给出了修正泡型图 MB_3 和 MB_4 及泡型图 B_3 和 B_4.

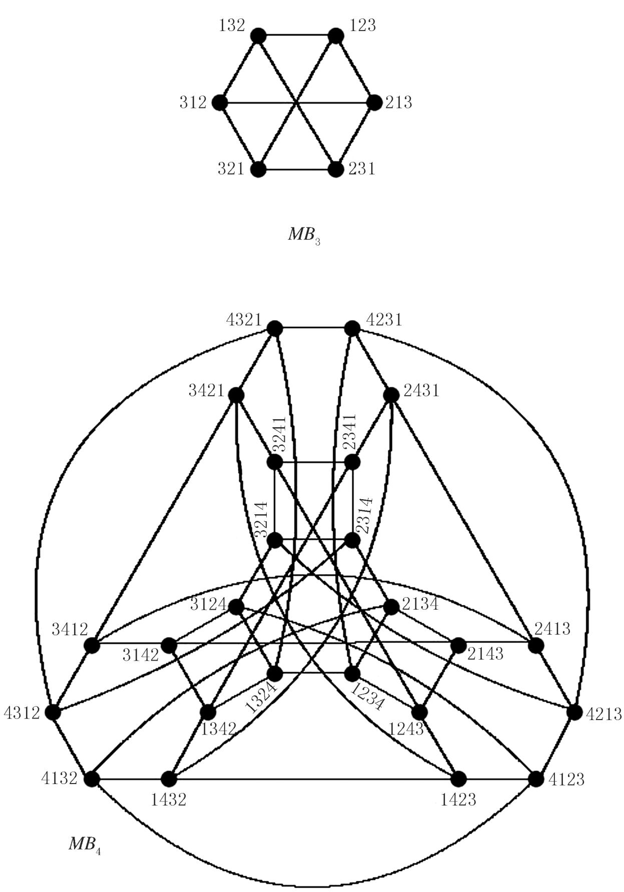

图1 修正泡型图 MB_3 和 MB_4

Fig. 1 The modified bubble-sort graphs of MB_3 and MB_4

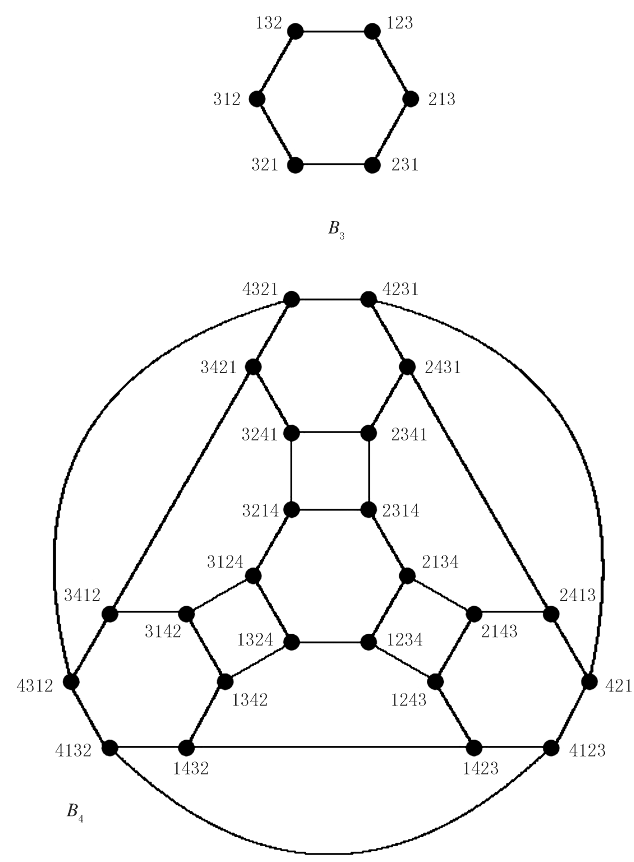

图2 泡型图 B_3 和 B_4

Fig. 2 The bubble-sort graphs of B_3 and B_4

考虑一个 $n\geq 3$ 阶连通简单图 H，它的顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$，它的每条边可以看作对称群 S_n 中的一个对换，这样 H 的边集 $E(H)$ 就对应 S_n 中的一个对换集.在这种情况下，H 称为对换简单图.对换简单图 H 对应的 Cayley 图记为 $Cay(H,S_n)$.当对换简单图是树时，称为对换树.当对换简单图是路时，它对应的 Cayley 图称为泡型图(Bub ble sort graph)，记为 B_n.当对换简单图是一个单圈图时，对应的 Cayley 图称为单圈图生成的 Cayley 图，记为 UG_n.特别地，当 H 是一个圈时，UG_n 称为修正泡型图，记作 MB_n.由 UG_n 的定义，显然它是 n！个点的 n- 正则图.注意到 UG_n 是特殊的 Cayley 图，它有以下性质.

定义 1[7] 单圈图是边数等于顶点数的简单连通图.

性质 1[8]　UG_n 是顶点传递的二部图.

性质 2[8]　对任意的正整数 $n\geq 4$，UG_n 的围长是 4.

在本文中，研究了 MB_n 的条件匹配排除数.对于 MB_n 中的两个点 $a_1a_2\cdots a_n$ 和 $b_1b_2\cdots b_n$，如果可以通过交换 i 位置和 $i+1$ 位置（$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$）的符号使得一个点可以得到另一个点这样的一条边称为 i- 边，交换 1 位置和 n 位置的符号使得一个点得到另一个点这样的一条边称为 n- 边.当 $n\geq 4$ 时，可以将 MB_n 进行如下分解：给定 $1\leq p\leq n$，令 H_i 为 MB_n 的一个由在 p 位置的值为 i 的点导出的子图，其中 $1\leq i\leq n$，称这样的分解是 MB_n 沿着 p 位置的分解.当沿最后一个位置分解 MB_n，H_i 和 B_{n-1} 同构.根据这个分解，端点在不同的 H_i 中的边称为交叉边.注意到每个顶点都与两个交叉边关联并且在两个不同的 H_i 之间共有 $2(n-2)!$ 个独立的交叉边.本文出现的未介绍的概念参考文献[9].

2　主要结论

在证明本文的主要结论之前，首先引用一些已证明的结论.

定理 1[10]　令 $n\geq 3$，设 H 为由 n 阶 m 条边生成的连通对换简单图，G 为 H 对应的 Cayley 图，则 $mp(G)=\delta(G)=m$.进一步，如果 $n\geq 4$，那么最优匹配排除集是平凡的.

定理 2[9]　设 $k>0$ 是一个整数，则每一个 k 正则 2 部图有 k 个边不相交的完美匹配.

定理 3[10]　令 $n\geq 4$，u 和 v 是 B_n 中两个相邻的点，则 $B_n-\{u,v\}$ 包含一个 Hamilton 圈.

定理 4[11]　令 $n\geq 4$，$F\subseteq E(B_n)$ 且 $|F|\leq n-3$，对 B_n 中的每对点 x 和 y，其中 x 和 y 属于不同的部集，在 B_n-F 中都存在一个从 x 到 y 的 Hamliton 路.

定理 5[12]　令 $n\geq 3$，则 $mp_1(B_n)=2n-4$.当 $n=4$ 时，B_n 的最优匹配排除集或是平凡的条件匹配排除集，或是由 ω_e 归纳出的条件匹配排除集，当 $n\neq 4$ 时，B_n 的每个最优条件匹配排除集都是平凡的.

引理 1　令 $n\geq 5$，若 v 是 MB_n 中的任一点，$e_1,e_2,\cdots,e_{n-2}$ 是与 v 关联的边，并且 e_{n-1},e_n 是与 v 关联的 $(n-1)$- 边和 n- 边，则在 MB_n 中存在 $2(n-3)$ 个长为 4 的圈和 2 个长为 6 的圈，其中 $(n-3)$ 个 4 圈和 1 个 6 圈包含 e_{n-1}，$(n-3)$ 个 4 圈和 1 个 6 圈包含 e_n.

证明　对每个 $i(1\leq i\leq n-2)$，从点 v 开始使用 $(n-1)$- 边，$(n-2)$- 边，$(n-1)$- 边，$(n-2)$- 边，$(n-1)$- 边，$(n-2)$- 边得到一个 6 圈包含 e_{n-1} 和使用 1- 边，n- 边，1- 边，n- 边，1- 边，n- 边得到一个 6 圈包含 e_n.从点 v 开始使用 $(n-1)$- 边，i- 边 $(1\leq i\leq n-3)$，$(n-1)$- 边，i- 边得到 $(n-3)$ 个 4 圈包含 e_{n-1} 和使用 n- 边，i- 边 $(2\leq i\leq n-2)$，n- 边，i- 边得到 $(n-3)$ 个 4 圈包含 e_n.

定理 6　$n\geq 5$ 时，$mp_1(MB_n)=2n-2$.

证明　MB_n 的围长为 4，故 $v_e(MB_n)=2n-2$.因此由命题 2，$mp_1(MB_n)\leq v_e(MB_n)=2n-2$.设 F 是一个最优条件匹配排除集并称它的元素为故障边，则 $|F|=mp_1(MB_n)\leq 2n-2$.下证 $|F|=2n-2$.假设 $|F|\leq 2n-3$ 且 MB_n-F 无孤立点.下证 MB_n-F 有完美匹配.

令 $H_i,i=1,2,\cdots,n$ 为 MB_n 沿着最后一个位置的分解，则 H_i 同构于 B_{n-1}，M_A 为所有 $(n-1)$- 边组成的交叉边集，M_B 为所有 n- 边组成的交叉边集，$M=M_A\cup M_B$.假设 MB_n-F 不含完美匹配，由于 M_A,M_B 均为 MB_n 的一个完美匹配，所以 $|F\cap M|\geq 2$，其中 M_A,M_B 各自少一条故障边，$|E(H_i)\cap F|\leq 2n-3-1-1=2n-5(i=1,2,\cdots,n)$.如果每个 H_i-F 都含有完美匹配，则 MB_n-F 包含完美匹配，矛盾.故至少一个 H_i-F 不含完美匹配.不妨设 H_n-F 不含完美匹配即 $n-2\leq|F\cap E(H_n)|\leq 2n-5$.

情况 1　$|F\cap E(H_n)|=2n-5$.

此时 $|F\cap M|=2$，其余 H_i 中没有故障边.设故障交叉边为 $x_1y_1\in M_A$，$x_2y_2\in M_B$，所有的故障边均已找到.

如果 $x_i,y_i(i=1,2)$ 都不在 H_n 中，则存在一个 4 圈 $x_1y_1zwx_1$，其中 zw 是交叉边，y_1z 和 x_1w 都是非故障的.因此 $(M_A\backslash\{x_1y_1,zw\})\cup\{y_1z,x_1w\}$ 是 MB_n-F 的一个完美匹配.

$x_i,y_j(i,j=1,2)$ 只有一个是 H_n 中的点.不妨设 $x_1\in V(H_n)$.由于 x_1y_1 为故障边，故与 x_1 关联的另一条交叉边 x_1z_1 非故障.由引理 1，存在一个过 x_1z_1 的 6 圈 $x_1z_1u_1u_2u_3y_1x_1$ 且 $z_1u_1\in M_A$，$u_1u_2\in M_B$，

$u_2u_3 \in M_A$，$y_1u_3 \in M_B$.注意 u_2 是 H_n 的点.因此，u_1u_2 不是故障边.当 $u_3y_1 \neq x_2y_2$ 时，$(M_A \backslash \{x_1y_1, z_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{x_1z_1, y_1u_3, u_1u_2\}$ 是 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.当 $u_3y_1 = x_2y_2$ 时，过 x_2y_2 存在一个 4 圈 C：$x_2y_2vux_2$，其中 $E(C) \backslash \{x_2y_2\}$ 没有故障边.因此，$(M_B \backslash \{x_2y_2, uv\}) \cup \{x_2u, y_2v\}$ 是 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

$x_i, y_j (i,j = 1,2)$ 有两个是 H_n 的点.不妨设 x_1 和 x_2 是 H_n 的顶点.当 $x_1 = x_2$ 时，由于 $MB_n - F$ 没有孤立点，所以在 H_n 中与 x_1 关联的边至少有一条非故障，设为 x_1w_1.如果 x_1w_1 是一个 1- 边，则选择 x_1, y_1 构造 4 圈；如果 x_1w_1 是一个$(n-2)$- 边，则选择 x_2y_2 构造 4 圈；如果 x_1w_1 是其他边，则选择 x_1y_1 或者 x_2y_2 构造 4 圈.下面给出一种情况，其他可以相同的方法构造.设 x_1w_1 是一个 1- 边，则存在一个 4 圈 C_4：$x_1w_1w_2y_1x_1$，使得 $E(C_4) \backslash \{x_1y_1\}$ 是非故障的.因此，$(M_A \backslash \{x_1y_1, w_1w_2\}) \cup \{x_1w_1, w_2y_1\}$ 是 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

当 $x_1 \neq x_2$ 时，另一条交叉边 $x_1z_1 \in M_B$ 是非故障.设在 H_n 中有与 x_1 关联的非故障边.一条设为 x_1z_2.由引理 1，有包含 x_1y_1 和 x_1z_2 的 4 圈 $C_4 = x_1y_1x_3z_2x_1$ 或者 6 圈 $C_6 = x_1y_1x_3x_4x_5z_2x_1$.其中在 C_4 中，$x_1y_1 \in M_A$，$x_3z_2 \in M_A$，$y_1x_3 \in E(H_x)(H_x \in \{H_2, \cdots, H_n\})$.$H_x$ 中没有故障边.因此，$(M_A \backslash \{x_1y_1, x_3z_2\}) \cup \{x_1z_2, y_1x_3\}$ 形成 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.对于那个 6 圈，用相同的方法，可以得到 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

当 $x_1 \neq x_2$ 时，另一条交叉边 $x_1z_1 = \{x_1, x_1(1n)\} \in M_B$ 是非故障.设在 H_n 中没有与 x_1 关联的非故障边.这样的故障边有$(n-2)$条.另外在 H_n 中还有故障边$(n-3)$条.设这$(n-3)$条故障边为 F^*.由性质 1，H_n 是一个$(n-2)$正则的二部图.由定理 2，H_n 有$(n-2)$个边不相交的完美匹配.因此，$H_n - F^*$ 有一个完美匹配 M_n.设 $x_1z_2 \in M_n$.则 x_1z_2 是 H_n 中的故障边.由引理 1，存在一条包含边 x_1z_1 和 x_1z_2 的 4 圈 $C_4 = x_1z_1x_3z_2x_1$ 或者 6 圈 $C_6 = x_1z_1x_3x_4x_5z_2x_1$.先考虑那个圈是 4 圈 $C_4 = x_1z_1x_3z_2x_1$.设 z_1, x_3 在 H_x 中 $(H_x \in \{H_1, \cdots, H_{n-1}\})$.因在 H_x 中没有故障边，所以由定理 4 在 H_x 中包含一个在 z_1 和 x_3 间的 Hamilton 路，从而 $H_x - \{z_1, x_3\}$ 包含一个完美匹配 M_x.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.如果 n- 边交叉边 x_3z_2 是非故障的，那么$((M_n \cup M_x \cup M_r) \backslash \{x_1z_2\}) \cup \{x_1z_1, z_2x_3\}$ 形成了 $MB_n - F$ 的完美匹配.设 n- 边交叉边 x_3z_2 是故障的.这样 2 条交叉故障边已经找到.设与 z_2 关联的非故障交叉边是 z_2w_2.则 z_2w_2 是一个$(n-1)$- 边.注意到 $z_1 = x_1(1n)$，$z_2 = x_1(i, i+1)(1 \leq i \leq n-2)$ 和 $w_2 = z_2(n-1, n-2) = x_1(i, i+1)(n-1, n-2)$.所以$(1n)$和$(i, i+1)(n-1, n-2)$是不同的.由于对于任意的 $x \in V(MB_n) = S_n$，$x \to x_1x$ 是一个自同构，所以 z_1 和 w_2 在不同的 H_i.不妨设 $z_1 \in V(H_2)$，$w_2 \in V(H_3)$.因 H_2, H_3 之间有 $2(n-2)!$ 条交叉边，在 H_2 中有$(n-2)!$ 条边的端点与 z_1 不在同一部和没有交叉边故障，故存在一条非故障交叉边 r_1r_2，r_1 和 z_1 在不同的部，$r_1 \in V(H_2)$，$r_2 \in V(H_3)$.显然，r_2 与 w_2 也在不同的部.因 H_2 中没有故障边，故由定理 4，$H_2 - F$ 存在一个 z_1 和 r_1 间的 Hamilton 路 P.故 P 包含一个 $H_2 - \{z_1, r_1\}$ 的完美匹配 M_2.同理 $H_3 - \{w_2, r_2\}$ 包含一个完美匹配 M_3.因其余 H_i 中没有故障边，所以各包含一个完美匹配 M_i，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$(M_n \backslash z_2x_1) \cup M_2 \cup M_3 \cup M_r \cup \{x_1z_1, z_2w_2, r_1r_2\}$ 是 $MB_n - F$ 的完美匹配.

对于包含边 x_1z_1 和 x_1z_2 的是 6 圈，用相同的方法，可以得到 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

情况 2 $n-2 \leq |F \cap E(H_n)| \leq 2n-6$.

情况 2.1 $H_n - F$ 有一个孤立点.

情况 2.1.1 $|F \cap E(H_n)| = n-2$.

在这个条件下，由性质 1，设该孤立点为 $u = (1)$.$e_1, e_2, \cdots, e_{n-2}$ 是 H_n 中与 u 关联的边并且 $e_{n-1} = uu'$，$e_n = uu''$ 是与 u 关联的交叉边.则 $u' = (n-1, n)$ 和 $u'' = (1n)$.由于 $MB_n - F$ 没有孤立点，所以与 u 关联的交叉边至少一条非故障.不失一般性，设 uu'' 不是故障边.设 $F_j = (F \cap E(H_n)) \backslash \{e_j\}$，其中 $j = 1, 2, \cdots, n-2$，则 $|F_j| \leq n-3$.由性质 1，H_n 是一个$(n-2)$正则的二部图.由定理 2，H_n 有$(n-2)$个边不相交的完美匹配.所以 $H_n - F_j$ 有完美匹配 M_n^j，并且 e_j 是 M_n^j 中的元素.u' 是 H_{n-1} 中的点和 u'' 是 H_1 中的点.因 $|F| \leq 2n-3$，$|F \cap M| \geq 2$，所以 $|E(H_i) \cap F| \leq n-3$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$.讨论下面的子情况.

情况 2.1.1.1 $|F \cap E(H_1)| = n-3$.

在这个条件下，$|F\cap M|=2$ 和对于 $i=2,\cdots,n-1$，H_i 中无故障边.

情况 2.1.1.1.a　uu'不是故障边.

$u'=(n-1,n)$ 是在 H_{n-1} 中和 H_{n-1} 中没有故障边.设 $e'_1,e'_2,\cdots,e'_{n-2}$是 H_{n-1} 中与 u' 关联的边.由引理 1，过uu' 和 e'_j的 4 圈有$(n-3)$ 个.由于 $n\geq 5$，所以这样的 4 圈至少有 2 个.设其中的一个 4 圈是 $C_4=uu'z_1z_2u$，其中 z_1z_2 是一个$(n-1)$- 边，uz_2 是故障边 $e_{j_0}\in E(H_n)$ 和 $u',z_1\in V(H_{n-1})$.因 H_{n-1} 中没有故障边，所以由定理 3，$H_{n-1}-\{u',z_1\}$ 包含一个 Hamilton 圈 C，故圈 C 包含一个 $H_{n-1}-\{u',z_1\}$ 的完美匹配 M_{n-1}.因 H_1 中有$(n-3)$ 条故障边，所以由定理 2，H_1-F 有完美匹配M_1.由上面的讨论，$H_n-\{u,z_2\}$ 有一个完美匹配 M_n.因对其他 H_i 中没有故障边，所以由定理 2，每个都含有完美匹配，记这些完美匹配的并为 M_r.如果 z_1z_2 不是故障边，那么$(M_n\backslash uz_2)\cup M_1\cup M_{n-1}\cup M_r\cup\{uu',z_1z_2\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.设 z_1z_2 是故障边.由于那样的 4 圈至少有 2 个，所以可以选择另一个 4 圈是 $C'_4=uu''z'_1z'_2u$，其中 $z'_1z'_2$ 是一个$(n-1)$- 边.由于只有一条交叉边$(n-1)$- 边是故障边，所以新的 $z'_1z'_2$ 不是故障边.利用上面的方法，能获得 MB_n-F 的一个完美匹配.

情况 2.1.1.1.b　uu'是故障边.

注意到 $u''=(1n)$ 是 H_1 中的点和 $|F\cap E(H_1)|=n-3$.由定理 2，H_1 有一个完美匹配 M_1.设 $u''x_3\in M_1$.注意到包含 uu'' 和$u''x_3$ 有一个 4 圈 $C_4=uu''x_3x_4u$ 或者一个 6 圈$C_6=uu''x_3y_4y_5x_4u$.其中 $x_3x_4\in M_B$ 和 $x_4u\in E(H_n)$.设如此的圈是 4 圈 $C_4=uu''x_3x_4u$.设 $e_j=x_4u$.由上面的讨论 $H_n-\{x_4,u\}$ 有一个完美匹配 $M_n^{x_4u}$.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.如果 x_3x_4 不是故障边，那么 $M_n^{x_4u}\cup(M_1\backslash u''x_3)\cup M_r\cup\{uu'',x_3x_4\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.设 x_3x_4 是故障边.现在 2 条交叉边的故障边已经找到.它们是$\{(1),(n-1,n)\}$ 和$\{(i,i+1),(i,i+1)(1n)\}$，其中$(i,i+1)$ 和$(1n)$ 不相交.2 种交叉边构成的 6 圈 $C_6=(1),(1n),(1n)(n-1,n),(1n)(n-1,n)(1n),(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n),(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)(1n),(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)$.在 C_6 中的 n- 边如下：

$\{(1),(1n)\}$；

$\{(1n)(n-1,n),(1n)(n-1,n)(1n)\}$，其中$(1n)(n-1,n)=(1,n,n-1)$ 和$(1n)(n-1,n)(1n)=(1,n-1)$；

$\{(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n),(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)(1n)\}$，其中$(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)=(1,n-1,n)$ 和$(1n)(n-1,n)(1n)(n-1,n)(1n)=(n-1,n)$.

因此，这 3 条边都不是$\{(i,i+1),(i,i+1)(1n)\}$.为了方便，设那个交叉边构成的 6 圈为 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_1$.因此，$(M_A\backslash\{x_2x_3,x_4x_5,x_1x_6\})\cup\{x_1x_2,x_3x_4,x_5x_6\}$ 是 MB_n-F 的一个完美匹配.

设如此的圈是 6 圈 $C_6=uu''x_3y_4y_5x_4u=(1),(1n),(1n)(12),(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12),(1n)(12)(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12)(1n)(12)=(1),(1n),(12n),(2n),(1n2),(12),(1)$.其中 $\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\in M_B$ 和 $x_4u\in E(H_n)$.设 $e_j=x_4u$.由上面的讨论 $H_n-\{z_4,u\}$ 有一个完美匹配 $M_n^{x_4u}$.H_2 中没有故障边.$H_2-\{(2n),(1n2)\}$ 有一个完美匹配 M_2^*.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.如果$\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}$ 不是故障边，那么 $M_n^{x_4u}\cup(M_1\backslash u''x_3)\cup M_2^*\cup M_r\cup\{\{(1),(1n)\},\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.设$\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}$ 之一是故障边.由上面讨论的交叉边构成的 6 圈知道，那 3 条的 n- 边与边$\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}$ 不同.由上面的讨论，可以获得 MB_n-F 的一个完美匹配.

情况 2.1.1.2　$|F\cap E(H_1)|\leq n-4$.

讨论下面的情况.

情况 2.1.1.2.a　$|F\cap M|=2$.

在这种情况故障边最多还有 $(n-3)$ 条没有找到.注意通过 uu'' 和e_j 有 6 圈或者 4 圈有$(n-2)$ 个.因(12) 和$(1,n)$ 相交，故这样的 4 圈有$(n-3)$ 个.因为 $n\geq 5$，所以存在 4 圈 C 上交叉边是非故障.设 C 为 $uu''u_2u_3u$ 时，其中 $u'',u_2\in V(H_1)$，uu_3 是故障边 e_j.因在 H_1 中最多有$(n-4)$ 条故障边，所以由定理 4 在 H_1 中包含

一个在 u'' 和 u_2 间的 Hamilton 路,从而 $(H_1-F)-\{u'',u_2\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因剩余 H_r 中最多有 $(n-3)$ 条故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$((M_n\cup M_1\cup M_r)\backslash\{uu_3\})\cup\{uu'',u_2u_3\}$ 形成了 MB_n-F 的完美匹配.

情况 2.1.1.2.b $3\leq|F\cap M|\leq n-2$.

考虑 $|F_i|\leq n-4$ 对于 $i=1,2,\cdots,n-1$,讨论下面的子情况.

情况 A uu' 不是故障边.

由引理 1,过边 uu' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈;过边 uu'' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈,共 $2(n-2)$ 个圈.由于 $n\geq5$,所以存在一个 4 圈在它上面交叉边是非故障.不妨设,过边 uu'' 和 e_j 有一个 4 圈 $C_4=uu''u_2u_3u$,其中 $u'',u_2\in V(H_1)$,uu_3 是故障边 e_j.因在 H_1 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,所以由定理 4 在 H_1 中包含一个在 u'' 和 u_2 间的 Hamilton 路,从而 $H_1-\{u'',u_2\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因剩余 H_r 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$((M_n\cup M_1\cup M_r)\backslash\{uu_3\})\cup\{uu'',u_2u_3\}$ 形成了 MB_n-F 的完美匹配.

情况 B uu' 是故障边.

在这种情况交叉边是故障边最多还有 $(n-3)$ 条没有找到.因过边 uu'' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈,故存在一个 4 圈或一个 6 圈上交叉边是非故障的.设 n- 边的交叉边是非故障的 4 圈 $C_4=uu''u_2u_3u$,其中 $u'',u_2\in V(H_1)$,uu_3 是故障边 e_j.因在 H_1 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,所以由定理 4 在 H_1 中包含一个在 u'' 和 u_2 间的 Hamilton 路,从而 $H_1-\{u'',u_2\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因剩余 H_r 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$((M_n\cup M_1\cup M_r)\backslash\{uu_3\})\cup\{uu'',u_2u_3\}$ 形成了 MB_n-F 的完美匹配.设如此的圈是 6 圈 $C_6=uu''y_3y_4y_5y_6u=(1),(1n),(1n)(12),(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12),(1n)(12)(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12)(1n)(12)=(1),(1n),(12n),(2n),(1n2),(12),(1)$.其中 $\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\in M_B$ 和 $y_6u\in E(H_n)$.设 $e_j=y_6u$.由上面的讨论 $H_n-\{y_6,u\}$ 有一个完美匹配 $M_n^{y_6u}$.由于 H_1 和 H_2 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,所以 $H_1-\{(1n),(12n)\}$ 有一个完美匹配 M_1^* 和 $H_2-\{(2n),(1n2)\}$ 有一个完美匹配 M_2^*.因剩余 H_r 中最多有 $(n-4)$ 条故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$M_n^{y_6u}\cup M_1^*\cup M_2^*\cup M_r\cup\{\{(1),(1n)\},\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

情况 2.1.1.2.c $|F\cap M|=n-1$.

在这种情况下所有的故障边已经找到和 $H_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 没有故障边.讨论下面的子情况.

情况 A uu' 不是故障边.

由引理 1,过边 uu' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈;过边 uu'' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈,共 $2(n-2)$ 个圈.由于 $n\geq5$,所以 $2(n-2)>n-1$ 和存在一个 4 圈或一个 6 圈上 n- 边的交叉边是非故障.不妨设,过边 uu'' 和 e_j 有一个 4 圈或一个 6 圈上 n- 边的交叉边无故障.设 n- 边的交叉边是非故障是 4 圈 $C_4=uu''u_2u_3u$,其中 $u'',u_2\in V(H_1)$,uu_3 是故障边 e_j.因在 H_1 中没有故障边,所以由定理 4 在 H_1 中包含一个在 u'' 和 u_2 间的 Hamilton 路,从而 $H_1-\{u'',u_2\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因剩余 H_r 中没有故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$((M_n\cup M_1\cup M_r)\backslash\{uu_3\})\cup\{uu'',u_2u_3\}$ 形成了 MB_n-F 的完美匹配.设如此的圈是 6 圈 $C_6=uu''y_3y_4y_5y_6u=(1),(1n),(1n)(12),(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12),(1n)(12)(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12)(1n)(12)=(1),(1n),(12n),(2n),(1n2),(12),(1)$.其中 $\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\in M_B$ 和 $y_6u\in E(H_n)$.设 $e_j=y_6u$.由上面的讨论 $H_n-\{y_6,u\}$ 有一个完美匹配 $M_n^{y_6u}$.由于 H_1 和 H_2 中没有故障边,所以 $H_1-\{(1n),(12n)\}$ 有一个完美匹配 M_1^* 和 $H_2-\{(2n),(1n2)\}$ 有一个完美匹配 M_2^*.因剩余 H_r 中没有故障边,故由定理 2,每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$M_n^{y_6u}\cup M_1^*\cup M_2^*\cup M_r\cup\{\{(1),(1n)\},\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

情况 B uu' 是故障边.

在这种情况下还有 $(n-2)$ 条交叉边是故障边没有找到.过边 uu'' 和 e_j 有 $(n-2)$ 个圈.设过边 uu'' 和 e_j

有一个 4 圈或一个 6 圈上 n- 边的交叉边无故障.现设 n- 边的交叉边是非故障的 4 圈 $C_4=uu''u_2u_3u$，其中 u''，$u_2\in V(H_1)$，uu_3 是故障边 e_j.因在 H_1 中没有故障边，所以由定理 4 在 H_1 中包含一个在 u' 和 u_2 间的 Hamilton 路，从而 $H_1-\{u'',u_2\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$((M_n\cup M_1\cup M_r)\backslash\{uu_3\})\cup\{uu'',u_2u_3\}$ 形成了 MB_n-F 的完美匹配. 设如此的圈是 6 圈 $C_6=uu''y_3y_4y_5y_6u=(1),(1n),(1n)(12),(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12),(1n)(12)(1n)(12)(1n),(1n)(12)(1n)(12)(1n)(12)=(1),(1n),(12n),(2n),(1n2),(12),(1)$.其中$\{(12n),(2n)\}$，$\{(1n2),(12)\}\in M_B$ 和 $y_6u\in E(H_n)$.设 $e_j=y_6u$.由上面的讨论 $H_n-\{y_6,u\}$ 有一个完美匹配 $M_n^{y_6u}$.由于 H_1 和 H_2 中没有故障边，所以 $H_1-\{(1n),(12n)\}$ 有一个完美匹配 M_1^* 和 $H_2-\{(2n),(1n2)\}$ 有一个完美匹配 M_2^*.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$M_n^{y_6u}\cup M_1^*\cup M_2^*\cup M_r\cup\{\{(1),(1n)\},\{(12n),(2n)\},\{(1n2),(12)\}\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

设过边 uu'' 和 e_j 的$(n-2)$个圈都有 n- 边的交叉边是故障的.这样$(n-1)$条交叉边是故障边就找到了.注意到边$\{(12),(12)(1n)\}$，$\{(23),(23)(1n)\}$，…，$\{(n-2,n-1),(n-2,n-1)(1n)\}$ 可能是故障边.设 $e_j=\{(1),(23)\}$.则$\{(23),(23)(n-1,n))\}$ 是非故障的.由上面的讨论 $H_n-\{(1),(23)\}$ 有一个完美匹配 M_n^*.点$(23)(n-1,n)$ 和$(12)(1n)(n-1,n)$ 在 H_{n-1} 中和点$(1n)$ 和$(12)(1n)$ 在 H_1 中.由定理 4，在 H_1 中有一个连接$(1n)$和$(12)(1n)$之间的 Hamilton 路和在 H_{n-1} 中有一个连接$(23)(n-1,n)$和$(12)(1n)(n-1,n)$之间的 Hamilton 路.因此，$H_1-\{(1n),(12)(1n)\}$ 有一个完美匹配 M_1^* 和 $H_{n-1}-\{(23)(n-1,n),(12)(1n)(n-1,n)\}$ 有一个完美匹配 M_{n-1}^*.因剩余 H_r 中没有故障边，故由定理 2，每个都存在一个完美匹配，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$M_n^*\cup M_1^*\cup M_{n-1}^*\cup M_r\cup\{\{(1),(1n)\},\{(23)(n-1,n),(23)\},\{(12)(1n),(12)(1n)(n-1,n)\}\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

情况 2.1.2　$n-1\leq|F\cap E(H_n)|\leq 2n-6$.

设该孤立点为 u，在 H_n 中，与 u 相邻的点为 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$.因 MB_n-F 没有孤立点，所以与 u 关联的交叉边 uu'，uu'' 至少有一条非故障.不妨设 uu'' 非故障.令 F' 为 $F\cap E(H_n)$ 中删去与 u 关联的 H_n 中的边得到的边集，则 $|F'|\leq 2n-6-(n-2)=n-4$.因 $2\leq|F\cap M|\leq n-2$ 和 $2(n-2)>n-2$，故在 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$ 中至少有一个关联的交叉边是非故障的.不妨设 u_1 关联的交叉边 $u_1u_1^*$ 是非故障的，其中 $u_1^*=(1n)$ 或者$(n-1,n)$.

情况 2.1.2.1　$u_1^*=(1n)$.

由定理 4 在 H_n-F' 中包含一个在 u 和 u_1 间的 Hamilton 路 P_1.在 P_1 上仅有和 u 关联的边是故障边.因此$(H_n-F)-\{u,u_1\}$ 包含一个完美匹配 M_n.如果 u'' 和 u_1^* 在同一个 H_1，那么在 H_1 中 u'' 和 u_1^* 相邻，这时 $uu_1u''u_1^*u$ 是一个 4 圈.因 H_1 中至多有 $2n-3-(n-1)-2=n-4$ 条故障边，由定理 4，H_1-F 包含一个在 u'' 和 u_1^* 间的 Hamilton 路，因此$(H_1-F)-\{u',u_1'\}$ 包含一个完美匹配 M_1.因为其他的 H_i 中最多有 $2n-3-(n-1)-2=n-4$ 条故障边，所以由定理 2，H_i-F 有完美匹配 M_i，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$M_1\cup M_n\cup M_r\cup\{uu'',u_1u_1^*\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

如果 u''，u_1^* 在不同的 H_i 中，那么 $u_1=(12)$ 和 $u_1^*=(1n2)\in V(H_2)$.因 H_1 和 H_2 间有 $2(n-2)!$ 条交叉边，其中$(n-2)!$ 条交叉边在 H_1 中的端点与 u'' 不在同一部.因$(n-2)!>n-2$，故存在一条非故障交叉边 r_1r_2，r_1 与 u'' 在不同的部，$r_1\in V(H_1)$，$r_2\in V(H_2)$.显然 r_2 与 u_1^* 也在不同的部.因 H_1 中最多含$(n-4)$条故障边，所以由定理 4，H_1-F 中包含一个在 u'' 和 r_1 间的 Hamilton 路.因此，$(H_1-F)-\{u'',r_1\}$ 包含一个完美匹配 M_1.同理，$H_2-F-\{u_1^*,r_2\}$ 包含一个完美匹配 M_2.因其他 H_i 中最多$(n-4)$条故障边，所以由定理 2，H_i-F 有完美匹配 M_i，设这些完美匹配的并为 M_r.因此，$M_1\cup M_2\cup M_n\cup M_r\cup\{uu'',u_1u_1^*,r_1r_2\}$ 是 MB_n-F 的完美匹配.

情况 2.1.2.2　$u_1^*=(n-1,n)$.

由于 $2(n-2)-1>n-2$，所以可以选择 u_1 和 u_1^* 不相交.因此，$u_1^*\in V(H_{n-1})$.因 H_1 和 H_{n-1} 间有 $2(n-2)!$ 条交叉边，其中$(n-2)!$ 条交叉边在 H_1 中的端点与 u'' 不在同一部.因$(n-2)!>n-2$，故存

在一条非故障交叉边 r_1r_2,r_1 与 u'' 在不同的部,$r_1 \in V(H_1)$,$r_2 \in V(H_{n-1})$.显然 r_2 与 u_1^* 也在不同的部.因 H_1 中最多含$(n-4)$ 条故障边,所以由定理 4,$H_1 - F$ 中包含一个在 u'' 和 r_1 间的 Hamilton 路.因此,$(H_1 - F) - \{u'', r_1\}$ 包含一个完美匹配 M_1.同理,$H_{n-1} - F - \{u_1^*, r_2\}$ 包含一个完美匹配 M_{n-1}.因其他的 H_i 中最多$(n-4)$ 条故障边,所以由定理 2,$H_i - F$ 有完美匹配M_i,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$M_1 \cup M_{n-1} \cup M_n \cup M_r \cup \{uu'', u_1u_1^*, r_1r_2\}$ 是 $MB_n - F$ 的完美匹配.

情况 2.2 $H_n - F$ 不含孤立点.

因 H_n 同构于 B_{n-1},所以由定理 5,当 $n-2 \leq |F \cap E(H_n)| \leq 2n-7$ 时,$H_n - F$ 有完美匹配,矛盾.因此,下面考虑 $|E(H_n) \cap F| = 2n-6$ 的情况.因为 $H_n - F$ 中没有完美匹配,所以存在路 $z_1z_2z_3$,其中与 z_1 关联的有$(n-3)$ 条故障边,设为 $z_1y_1, z_1y_2, \cdots, z_1y_{n-3}$,与 z_3 关联的有$(n-3)$ 条故障边,设为 $z_3x_1, z_3x_2, \cdots, z_3x_{n-3}$.

因 $2 \leq |F \cap M| \leq 3$,z_1,z_3 各关联两条交叉边,所以 z_1 或 z_3 存在一条交叉边非故障.不失一般性,设与 z_1 关联的交叉边 $z_1z'_1$ 非故障.令 F' 为 $V(H_n) \cap F$ 中与 z_3 相邻的故障边集,则 $|F'| = n-3$.因 H_n 是$(n-2)$ 正则二部图,由定理 2,$H_n - F'$ 中存在完美匹配 M_n 且 $z_2z_3 \in M_n$,$z_1y_i \in M_n (1 \leq i \leq n-3)$.不妨设 $z_1y_1 \in M_n$.在 M_n 中只有 z_1y_1 是故障边.

情况 2.2.1 y_1 的交叉边不是故障.

不妨设 $y_1y'_1$ 非故障.如果 z'_1 和 y'_1 在同一个 H_i 中时,不妨记为 H_2,那么 z'_1 和 y'_1 相邻,这时 $z_1y_1y'_1z'_1z_1$ 是一个 4 圈.由定理 3,$H_2 - \{z'_1, y'_1\}$ 包含一个 Hamilton 圈 C.因 $|H_2 \cap F| \leq 2n-3-(2n-6)-2=1$,故 C 包含一个 $H_2 - \{z'_1, y'_1\}$ 的完美匹配 M_2.因其他的 H_i 中最多有一条故障边,所以由定理 2,$H_i - F$ 有完美匹配M_i,设这些完美匹配的并为 M_r 因此,$(M_n \setminus z_1y_1) \cup M_2 \cup M_r \cup \{z_1z'_1, y_1y'_1\}$ 形成 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

如果 z'_1 和 y'_1 在不同的 H_i 中时,那么不妨设 $z'_1 \in V(H_2)$,$y'_1 \in V(H_3)$.因 H_2,H_3 之间有 $2(n-2)!$ 条交叉边,在 H_2 中有$(n-2)!$ 条它的端点与 z'_1 不在同一部和最多有 3 条交叉边故障,故存在一条非故障交叉边 r_1r_2,r_1 和 z'_1 在不同的部,$r_1 \in V(H_2)$,$r_2 \in V(H_3)$.显然,r_2 与 y'_1 也在不同的部.因 H_2 中至多有一条故障边,故由定理 4,$H_2 - F$ 存在一个 z'_1 和 r_1 间的 Hamilton 路 P.故 P 包含一个 $H_2 - \{z'_1, r_1\}$ 的完美匹配 M_2.同理 $H_3 - \{y'_1, r_2\}$ 包含一个完美匹配 M_3.因其余 H_i 中最多有一条故障边,所以每个都存在一个完美匹配,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$(M_n \setminus z_1y_1) \cup M_2 \cup M_3 \cup M_r \cup \{z_1z'_1, y_1y'_1, r_1r_2\}$ 是 $MB_n - F$ 的完美匹配.

情况 2.2.2 y_1 的两条交叉边都是故障边.

因 $2 \leq |F \cap M| \leq 3$,故存在 z_3 的交叉边存在非故障.令 F' 为 $V(H_n) \cap F$ 中与 z_1 相邻的故障边集,则 $|F'| = n-3$.因 H_n 是$(n-2)$ 正则二部图,故由定理 2,$H_n - F'$ 存在完美匹配 M'_n 且 $z_1z_2 \in M'_n$,$z_3x_i \in M'_n$.不妨设 $z_3x_1 \in M'_n$.在 M'_n 中只有 z_3x_1 是故障边.因 y_1 的交叉边都故障且 $2 \leq |F \cap M| \leq 3$,所以 x_1 有一条交叉边非故障.不妨设 $x_1x'_1$ 非故障.

如果 z'_3 和 x'_1 在同一个 H_i 中时,不妨记为 H_2,那么 z'_3 和 x'_1 相邻,这时 $z_3x_1x'_1z'_3z_3$ 是一个 4 圈.由定理 3,$H_2 - \{z'_3, x'_1\}$ 包含一个 Hamilton 圈 C.因 H_2 中最多有一条故障边,故 C 包含一个 $H_2 - \{z'_3, x'_1\}$ 的完美匹配 M_2.因其他的 H_i 中最多有一条故障边,所以由定理 2,$H_i - F$ 有完美匹配M_i,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$(M'_n \setminus z_3x_1) \cup M_2 \cup M_r \cup \{z_3z'_3, x_1x'_1\}$ 形成 $MB_n - F$ 的一个完美匹配.

如果 z'_3 和 x'_1 在不同的 H_i 中时,那么不妨设 $z'_3 \in V(H_2)$,$x'_1 \in V(H_3)$.因 H_2,H_3 之间有 $2(n-2)!$ 条交叉边,在 H_2 中有$(n-2)!$ 条边的端点与 z'_3 不在同一部和最多有 3 条交叉边故障,故存在一条非故障交叉边 w_1w_2,w_1 和 z'_3 在不同的部,$w_1 \in V(H_2)$,$w_2 \in V(H_3)$.显然,w_2 与 x'_1 也在不同的部.因 H_2 中至多有一条故障边,故由定理 4,$H_2 - F$ 存在一个 z'_3 和 w_1 间的 Hamilton 路 P.故 P 包含一个 $H_2 - \{z'_3, w_1\}$ 的完美匹配 M_2.同理 $H_3 - \{x'_1, w_2\}$ 包含一个完美匹配 M_3.因其余 H_i 中最多有一条故障边,所以各包含一个完美匹配 M_i,设这些完美匹配的并为 M_r.因此,$(M'_n \setminus z_3x_1) \cup M_2 \cup M_3 \cup M_r \cup \{z_3z'_3, x_1x'_1, w_1w_2\}$ 是 $MB_n - F$ 的完美匹配.

参　考　文　献

[1] BRIGHAM R,HARARY F,VILLIN E C,et al.Perfect-matching Preclusion[J].Congressus Numerantium,2005,174:185-192.

[2] CHENG E,LESNIAK L,LIPMAN M J,et al.Conditional Matching Preclusion Sets[J].Information Sciences,2009,179(8):1092-1101.

[3] CHENG E,HU P,JIA R,et al.Matching preclusion and conditional matching preclusion for pancake and burnt pancake graphs[J].International Journal of Parallel,Emergent and Distributed Systems,2014,29(5/6):499-512.

[4] CHENG E,CONNOLLY R,MELEKIAN C.Matching preclusion and conditional matching preclusion problems for the folded Petersen cube[J].Theoretical Computer Science,2015,576(20):30-44.

[5] REN Y X,WANG S Y.Conditional Matching Preclusion Sets for an Mixed-Graph of the Star Graph and the Bubble-Sort Graph[C].International Conference on Intelligent Computing,2015,9225:630-638.

[6] LIN R Z,ZHANG H P.Conditional Matching Preclusion for Folded Hypercubes[J].Journal of Interconnection Networks,2019,19(3):1940011.1-1940011.16.

[7] SONG C Y,HUANG Q X.The nullity of unicyclic graphs[J].运筹学学报,2009,13:77-83.

[8] YU X M,HUANG X H,ZHANG Z.A kind of conditional connectivity of Cayley graphs generated by unicyclic graphs[J].Information Science,2013,243:86-94.

[9] BONDY J A,MURTY U S R.Graph Theory[M].New York:Springer,2008.

[10] CHENG E,LIPTÁK L.Matching Preclusion for Some Interconnection Networks[J].Networks,2007,50(2):173-180.

[11] ARAKI T,KIKUCHI Y.Hamiltonian lace ability of bubble-sort graphs with edge faults[J].Information Sciences,2007,177(13):2679-2691.

[12] 王牟江山,王镇,王世英.泡型图的条件匹配排除[J].新疆大学学报(自然科学版),2011,28(1):23-35.
WANGMOU J S,WANG Z,WANG S Y.Conditional Matching Preclusion for Bubble Sort Graphs[J].Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition),2011,28(1):23-35.

Conditional matching preclusion of the modified bubble sort graph

Wang Shiying, Yang Jie, Ma Xiaolei

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: The conditional matching preclusion number of a graph is the minimum number of edges, whose deletion results in a graph with no isolated vertices that has neither perfect matchings nor almost-perfect matchings. Any such optimal set is called an optimally conditional matching preclusion set. The conditional matching preclusion number is one of the parameters to measure the robustness of interconnection networks in the event of edge failure. In this paper, we work out that the conditional matching preclusion number of the modified bubble sort graph is $2n-2(n\geq 5)$.

Keywords: Cayley graphs; modified bubble sort graphs; matchings; conditional matching preclusion

[责任编校　陈留院　赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

王世英,博士,河南师范大学教授,博士生导师.1990 年在陕西师范大学获理学学士学位,1993 年在陕西师范大学获理学硕士学位,2000 年于郑州大学系统科学与数学系博士研究生毕业并获理学博士学位,2002 年 8 月于华中科技大学系统工程博士后流动站出站.主要研究方向为离散数学与理论计算机科学.主持国家自然科学基金面上项目 5 项;主持教育部博士点基金(博导类)1 项;2005 年作为完成人之一(7/13)获中华人民共和国教育部自然科学一等奖;2011 年作为第一完成人获山西省科学技术三等奖.培养毕业 50 名硕士研究生,12 名博士研究生.在科学出版社出版专著 3 部,在国内外学术刊物上发表学术论文 250 多篇.

马晓明,博士,河南师范大学教授,博士生导师,河南省学术技术带头人,河南省高校科技创新团队带头人,河南省高校科技创新人才,河南师范大学杰出青年科研创新人才.主要研究方向有生物矿化、基于细胞的仿生合成、具有分级结构的无机/有机杂化材料的设计合成及结构—性能关系、生物燃料电池与生物传感器等.在 *Angew Chem Int Ed*,*ACS Sustainable Chem Eng*,*Chem Commun*,*Bioresour Technol*,*J Hazard Mater*,*J Phy Chem B*,*Chem Eng J* 等 SCI 源期刊发表论文 50 余篇,篇均影响因子达到 4.58,引用次数达到 300 余次,授权专利 5 件.主持国家自然科学基金面上项目 2 项、联合基金 1 项、河南省高校科技创新团队支持计划 1 项、河南省高校科技创新人才支持计划 1 项.

王文晟,博士,河南师范大学特聘教授,博士生导师.2000 年毕业于日本东京大学药学院,获药学博士学位,毕业后作为日本学术振兴会特别研究员在日本国立食品药品卫生研究所(NIHS)工作,从事与 DNA 的复制,修复和同源重组相关的遗传病研究.后转到美国,先后在加州大学艾尔文分校,罗切斯特大学工作,2005 年晋升为助理教授,2012 年回国,先后被河南师范大学和新乡医学院聘为特聘教授.现在河南师范大学生命科学学院工作.长期从事和人类疾病相关研究.近年来在国家自然科学基金和美国健康卫生研究所的资助下主要从事与神经精神性疾病(抑郁症)和骨相关疾病(如溶骨病和骨关节炎)方面的研究.