

基于几何约束关系的 ML 模型求解三维坐标定位问题研究

张雷

(重庆交通大学 数学与统计学院,重庆 400074)

摘要:为了提高三维空间位置定位算法的性能和准确性,提出了以 3 个基站定位原理为基础的基于几何约束关系的 ML 模型.通过设计基站位置、到达时间(time of arrival, TOA)数值、手持终端位置之间的几何关系,估计得到手持终端的全部可能位置,通过最大似然算法,以最大可能的估计值确定为定位结果.经过仿真计算验证了算法能有效抑制非视距环境(non-line of Sight, NLOS)误差和测量误差,并且能够得到最佳估计值,具有计算量小、精度高等优点.仿真结果表明了该方法的有效性,在各类室内定位系统中具有很强的实用性.

关键词:三维空间定位;ML 模型;几何约束

中图分类号:TN929

文献标志码:A

随着无线通信网络技术的发展,移动定位技术在公共安全服务、智能仓储、危险作业等多方面都有着广泛的应用,准确掌握未知地理位置的相关信息至关重要,相关项目已越来越受到重视,并对此进行了深入的研究^[1-3].

关于无线定位技术的研究方法比较常见的有 Chan 算法^[4]、Taylor 级数展开法^[5]、Chan 和 Taylor 的协同定位算法^[6-7]等. Chan 算法是一种基于到达时间差(time difference of arrival, TDOA)技术、具有解析表达式解的非递归双曲线方程组解法,其主要特点是可以增加基站数量来提高算法精度.但在非视距环境(non-line of Sight, NLOS)下,算法定位精度显著下降. Taylor 序列展开法是一种需要估计初始位置的递归算法,算法在各种信道环境下可取得良好的定位效果,能够提供估计位置的最优解,但该算法需要递归求解,不能提供明确的表达式解,计算量也较大.而基于 Chan 和 Taylor 的协同定位算法,通过 Chan 氏算法对 TDOA 的测量值进行定位计算,将 Chan 算法定位的结果作为 Taylor 算法初值的设计提升了协同定位方法的定位精度,但是加权方式对定位精度的提高是很有限的.

由于在采用 TOA 和 TDOA 技术进行位置估计时,非视距误差是影响定位精度的主要因素,测量误差也是不可忽略的因素.通过对数据进行分区来抑制或消除误差的计算量很大,初始值也难以确定,并且只能在一定程度上降低 NOLS 误差对定位精度的不利影响,不能有效地抑制误差^[8-10].本文为了实现对 NLOS 误差、测量误差的有效抑制,基于三基站定位模型,针对三基站球面交集五大类球面分布情况,采用不同方法获取手持终端估计点.借助软件工具计算,将得出的估计点样本值进行有效筛选,得出每组数据每个终端坐标的估计值.同时,在已建立的基于几何约束关系的最大似然(maximum likelihood, ML)估计模型的基础上,通过估计值与真实值之间的距离均值、标准差以及相对空间关系作为评价指标建模,针对三维空间定位计算、定位精度判断、定位状况分析等问题分别进行了求解,得到了较精确的位置关系,提高了定位的精度.

1 问题的提出

在实际应用中,面对未知的三维空间,为了求得各个终端的三维坐标,需要搭建一个适用于三维空间的

收稿日期:2017-02-27;修回日期:2017-04-09.

基金项目:国家自然科学基金(11501065;11401061);重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2015jcyjA00033);重庆市教委项目(KJ1600504;KJ1600512).

作者简介(通信作者):张雷(1980-),男,重庆市人,重庆交通大学讲师,主要从事优化算法、控制理论研究,E-mail:zhangleicqjtu@163.com.

算法模型. 三维定位算法中, 首先考虑建立一个合适的几何模型. 通过 3 个基站的三维坐标、TOA 测量值建立几何约束关系, 以确定手持终端位置坐标. 即根据 3 个基站 TOA 测量值, 每个基站为球心可以绘制出一个与测量值 TOA 相匹配的球面, 进而形成 3 个球面, 构成一个计算模型, 利用针对各种计算模型的算法便可确定终端位置的估计值.

以三基站通过 TOA 数据形成球面两两会有相交为例, 两两相交形成估计值的一个存在区域, 见图 1.

此种情况下, 判断依据为: $r_1 + r_2 \geq l_{12} > |r_1 - r_2|$; $r_2 + r_3 \geq l_{23} > |r_2 - r_3|$; $r_1 + r_3 \geq l_{13} > |r_1 - r_3|$, $\exists M \in R_1, M \in R_2, M \in R_3$. 三个基站球面相交形成多种交集形式. 通过 BS_1, BS_2 和 BS_3 的半径和位置关系来估算未知终端的位置. 由于终端随机地部署在三维空间, 本文约定讨论的终端始终在空间内部.

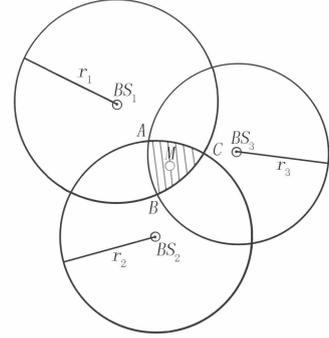


图1 三基站球面交集平面示意图

2 基于几何约束关系的信号模型

无线电波在进行传播时, 从发送点到接收点之间的测量传播时间 TOA 是真实的传播时间与测量噪声的综合反映:

$$\hat{x} = f(x, \omega) = f(x) + \omega_l + \omega_{nl}, \quad (1)$$

x 表示真实的传播时间, ω_l 为测量误差对应的时间部分, ω_{nl} 为非视距误差对应的时间部分, \hat{x} 为对于传播时间的测量值. 已知无线电信号的传播速度 $v = 3 \times 10^8$ m/s, 根据时间、速度与距离之间的关系式, 得出基于 TOA 测量值的距离模型: $L_i = v \cdot \hat{x}_i = v \cdot f_i(x, \omega) = v \cdot f_i(x) + v \cdot \omega_{l,i} + v \cdot \omega_{nl,i} = g_i(x) + n_{l,i} + n_{nl,i}$, 其中 L_i 代表 TOA 测量值对应第 i 个基站到移动台的测量距离, $n_{l,i}$ 代表 L_i 测量距离误差, $n_{nl,i}$ 代表距离的非视距误差, $g_i(x)$ 代表手持终端到第 i 个基站的真实距离, 根据基站与手持终端的坐标, 可得 $g_i(x) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$, 式中 (x, y, z) 为手持终端的真实位置, (x_i, y_i, z_i) 为第 i 个基站的坐标位置.

在一般情况下, $n_{l,i}$ 服从均值为零的正态分布; $n_{nl,i}$ 是数值为正的 NLOS 误差, 其分布情况通常未知. 基于这种假设, LOS 环境、NLOS 环境下第 i 个基站测量得到的 TOA 测量值的概率密度函数可以分别表示为:

$$P_l(L_i/(x, y, z)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L_i - g_i(x)}{\sigma_i}\right)^2}, \quad (2)$$

$$P_{nl}(L_i/(x, y, z), n_{nl,i}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L_i - g_i(x) - n_{nl,i}}{\sigma_i}\right)^2}. \quad (3)$$

因此, 手持终端位置的最大似然估计可以表示为:

$$\hat{X} = \arg \max_x \prod_{i \in S_l} P_l(L_i/(x, y, z)) \prod_{i \in S_{nl}} P_{nl}(L_i/(x, y, z), n_{nl,i}), \quad (4)$$

(4) 式中, S_l 是在 LOS 环境下基站的集合; S_{nl} 是在 NLOS 环境下基站的集合. 采取对 (4) 式两端取对数处理, 得到:

$$\hat{X} = \arg \max_x \sum_{i \in S_l} \left(\frac{L_i - g_i(x)}{\sigma_i}\right)^2 \sum_{i \in S_{nl}} \left(\frac{L_i - g_i(x) - n_{nl,i}}{\sigma_i}\right)^2. \quad (5)$$

3 基于几何约束关系的 ML 算法

三维 TOA 测量数据系统根据随机选取的 3 个已知基站为球心的距离球的交点与交集来判定手持终端坐标. NLOS 误差为一非负值, 而且相对其他误差来说数值较大, 因此, 受 NLOS 误差影响的测量距离远大于真实环境下的距离, 可以认为手持终端的位置在球体的重叠区域, 3 个球心构成的空间平面通过该重叠区域, 并与重叠区域的 3 条弧形棱边相交形成 3 个交点 A, B, C , 此时, 在空间中有唯一点到 A, B, C 3 点距离之

和最小的点就是所求的手持终端 M 点. 手持终端位置坐标 $M(x, y, z)$, 应满足:

$$F(x, y, z) = (x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 + (x - x_C)^2 + (y - y_A)^2 + (y - y_B)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_A)^2 + (z - z_B)^2 + (z - z_C)^2. \quad (6)$$

接下来, 将三基站通过 TOA 数据形成的 3 个球面之间的不同几何关系进行详细分类和算法解析, 共有以下 5 种情况.

(1) 三基站球面交集. 此种情况, 即三基站通过 TOA 数据形成球面两两会有相交, 从而形成估计值的一个存在区域. 在这类几何关系下, 显然 3 个基站对应球面大小相当, 即三基站数据的 LOS 误差与 NLOS 误差数量相当, 可以认为三基站数据误差均很大的情况为小概率情况. 由于假设了小概率事件不发生, 所以本模型认为此时三基站数据误差均很小. 选取三球面相交的两个点 A, B 为计算取值点, 通过将两点坐标平均可以得到所需要的终端位置 i 的估计点.

计算公式按照(7)式进行:

$$X_i = \frac{X_A + X_B}{2}, Y_i = \frac{Y_A + Y_B}{2}, Z_i = \frac{Z_A + Z_B}{2}. \quad (7)$$

(2) 三基站球面单交集. 此种情况, 判断依据为: $\exists r_i + r_j \geq l_{ij} > |r_i - r_j|$; $\exists r_i + r_j < l_{ij}$ 或 $\exists l_{ij} < |r_i - r_j|$.

即存在两个基站通过 TOA 数据形成球面相交的情况, 随着第 3 个基站球面的位置不同, 也有着不同的位置关系情况.

使用 3 个基站点确定的平面切割三基站通过 TOA 数据形成的球面, 则在切割平面上形成了 3 个圆, 其中有两个圆存在交集. 将两个存在交集的圆的两个交点作为估计终端位置的基本点 A, B 点, 采用公式计算得出估计的终端位置.

(3) 三基站球面非单交集. 此种情况, 判断依据如下.

1 类: $r_1 + r_2 \geq l_{12} > |r_1 - r_2|$; $r_2 + r_3 \geq l_{23} > |r_2 - r_3|$; $r_1 + r_3 < l_{13}$.

2 类: $r_1 + r_2 \geq l_{12} > |r_1 - r_2|$; $r_2 + r_3 \geq l_{23} > |r_2 - r_3|$; $r_1 + r_3 \geq l_{13} > |r_1 - r_3|$, 且不存在 M , 使 $M \in R_1, M \in R_2, M \in R_3$.

即 3 个基站 TOA 数据形成球面存在交集, 但交集数不止一个. 按交集面数目为两个和 3 个的情况分为两类, 如图 2、图 3 所示. 其中, 交集面为两个时, 采用的方法是取相离的两球的心连线的中点作为其中一个基本点 A , 然后再使用三球球心连成平面切割球面, 切割平面上形成的 3 个圆, 两个相离的球对应的圆都与另一圆相交, 出现 4 个交点, 分为相邻 E, F 和 G, H 两对, 取出每对 midpoint 作为基本点 B, C , 通过最小二乘法计算, 得出函数中 x, y, z 值为估计得到的手持终端坐标.

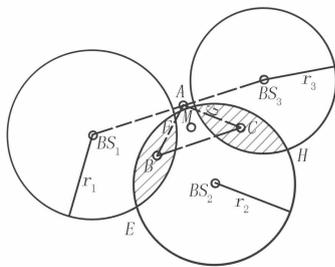


图2 三基站球面交集面两个

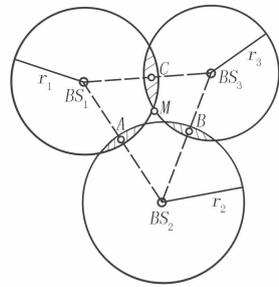


图3 三基站球面交集面3个

当 3 个球面均两两存在交集, 交集面为 3 个时. 首先使用三球心形成平面对 3 个球面进行切割, 在切割平面上形成 3 个圆两两相交的几何关系图, 如图 3. 根据图 3 中所示, 三圆心两两连线, 会穿过其交集区域, 与交集区域形成 6 个交点, 再分别取 3 对相近交点的 midpoint 作为基本点 A, B, C . 最后通过最小二乘法计算得到估计手持终端位置.

(4) 三基站球面外离. 此种情况, 判断依据为: $r_1 + r_2 < l_{12}$; $r_2 + r_3 < l_{23}$; $r_1 + r_3 < l_{13}$.

即 3 个基站通过 TOA 数据形成的球面, 均两两相离. 3 个基站球面不存在交集面, 采用 3 个球的两两球

心连线与球面交点的中点 A, B, C 作为估计终端位置的基本点,采用最小二乘法即可估计得到手持终端坐标.

(5)球面内含无交集. 在此种情况下,3 个基站通过 TOA 数据形成的球面,由一个大球面包含另一小球面,且 3 个球面均无交集. 有一基站形成的球面包含另一球面或者包含另两球面,不存在球面相交. 采用 3 个球面球心形成的平面切割 3 个球面,切割面上得到了 3 个圆形. 在这个平面上,将 3 个圆心连接起来,并适当延长,使之在靠近 3 个圆组成图形中心的一端,对应的两个圆上相交形成两个交点,取两个交点的中点作为一个基本点,对 3 个圆两两进行操作,采用最小二乘法估计得到手持终端坐标,见图 4.

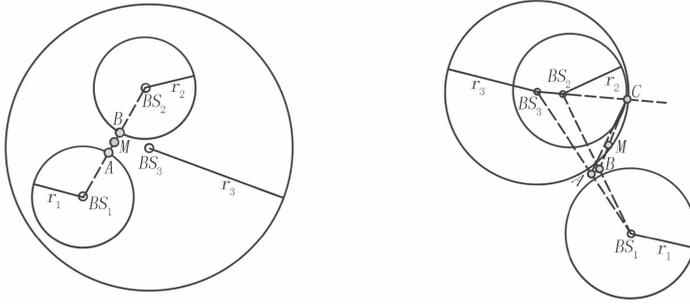


图4 球面内含无交集估计点判定表

上述内容介绍了三基站通过 TOA 数据形成的 3 个球面几何关系分类,针对每种情况都建立了详细的几何约束模型以及对应的估计点算法. 具体实施方案如下.

步骤 1:进行分类,选择合适的算法. 将空间中所有以 3 个基站为球心,TOA 测量得到的距离为半径的 3 个球体分布情况进行分类,将需要采用相同算法的归为一类,确定选取所有可能位置点中最优位置的方法. 在模型中,针对上述位置关系按照一定原则划分的 5 大类,与之对应的,就存在 5 种抑制 NLOS 误差和 LOS 误差计算选取最优估计值的方法.

步骤 2:对于某个手持终端位置坐标 M ,任选 3 个基站进行分析,由这 3 个基站与其对应 M 手持终端的 TOA 测量数据构成一组计算模型,通过编写的判别语句识别算法求解,进而进入该模型的计算,得到 M 的一个估计坐标.

步骤 3:任取 3 个基站构成一组计算模型,将会有数千种取值. 针对同一手持终端的计算模型数量庞大,得出数千个 M 坐标的估计值,再通过数据处理可以很大程度上消除误差,只要在计算模型分类和算法编写的过程中考虑充分,就可以得到精确的解答.

4 定位精度研究

为了研究手持终端定位精度问题,继续采用基于几何位置约束的 ML 算法模型进行计算.

1)定位精度与样本数量的关系. 为了在相同基站数量、而样本数量不同的情况下进行定位精度讨论,通过计算得出的估计点和真实终端点之间的距离(定位误差)的均值和标准差两个参数作为判断精度的两个指标,在这基础上加入计算结果与真实值 $X-Y, X-Z$ 平面内的空间关系比对,以更好地显示出精度受样本数量影响的情况. 均值及标准差的计算公式如下所示.

终端估计点和真实点距离的均值计算为:

$$D_j = \sqrt{(X_j - (\hat{X}_j))^2 + (Y_j - (\hat{Y}_j))^2 + (Z_j - (\hat{Z}_j))^2} \tag{8}$$

$$\bar{D}_i = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{m}, \tag{9}$$

其中: $i = 1, 2, \dots, 5; m$ 为终端数;设 \hat{X}_j 为 j 号终端 X 真实坐标; \hat{Y}_j 是 j 号终端 Y 的真实坐标; \hat{Z}_j 作为 j 号终端 Z 的真实坐标; D_j 为 j 号终端估计点和真实值的距离; \bar{D}_i 为 i 样本情况下终端估计点与真实终端点的距离的均值.

终端估计点与真实点的距离的标准差计算:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (D_j - \bar{D}_i)^2} \quad (10)$$

2) 定位精度与基站数量的关系. 为了对相同样本数量、不同基站数量情况下的定位精度进行讨论, 参考上述方法, 在符合精度要求的样本点数下, 通过对不同基站数情况的分析, 将每种情况下计算得到的估计点与真实终端点的距离(定位误差)的均值和标准差两个参数作为判断精度的两个指标, 在此基础上加入计算结果与真实值 X - Y , X - Z 平面内的空间关系比对, 以更好地显示出精度受样本数量影响的情况.

5 仿真结果分析

为了验证算法的性能, 采用上述基于几何约束关系的 ML 模型, 使用 MATLAB 程序对数据进行仿真计算, 得到相应的终端坐标值. 现取一组 30 个基站的 TOA 数据得出的基站对某个手持终端所有的估计样本点绘制的三维散点图, 如图 5 所示.

根据所得结果, 可以知道, 大部分样本点集中于较小的区域, 但是也有很少一部分点分布于距离集中点分布区域较远的地方. 针对此种情况, 采取均值排除法, 排除距离均值超过一定距离远处的点, 便可以得到较为精确的散点图, 如图 6 所示.

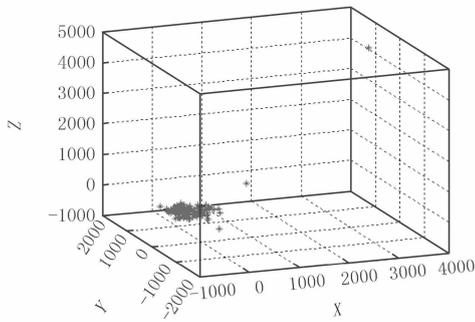


图5 终端样本点散点图

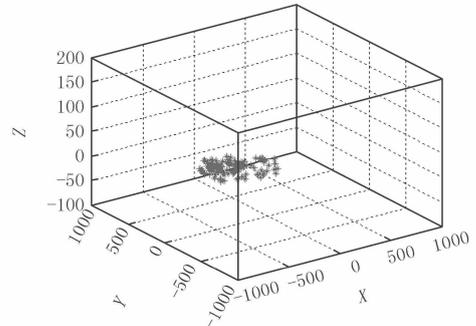


图6 终端样本点修正后散点图

可见, 样本点集中度较高, 本模型对误差抑制程度较高, 实现了预期目标. 为了得知模型优劣程度, 使用该模型对 50 个终端点的数据进行计算, 使用 3000 个样本点估计时得到估计点, 与真实点进行对比. 由于 Z 方向坐标数值改变不大, 所以这里仅进行 X - Y 平面内的比对, 形成图 7.

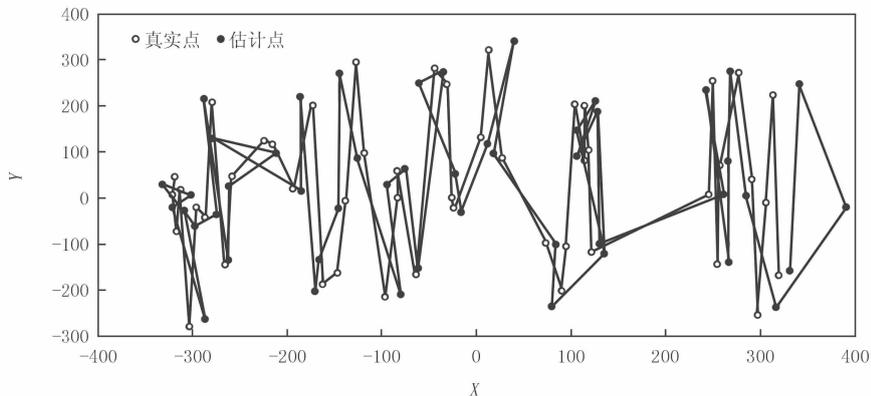


图7 校核文件手持终端估计点与真实点在 X - Y 平面分布图

可见, 当采用样本数目较大时, 本模型所计算出终端点与真实点接近程度较高, 即本模型可以很好地抑制误差, 实现对手持终端位置的有效估计.

通过对定位精度和样本数量与基站数量的关系分析, 发现估计点与真实点距离的均值与标准差随样本

数增加而呈下降趋势。选择以样本数 0~1000 为例,基站数以 5~30 为例进行拟合计算,结果如图 8 和图 9 所示。可明显看出,当样本点数量较小时,区别明显,与真实点情况相差较大,但增加到一定数量时,越来越接近真实点的位置关系。当基站数较小时终端估计点与真实点情况相差较大,但随着基站数的增加,同样越来越接近真实点的空间位置关系。

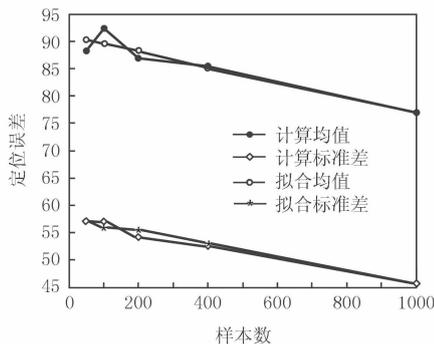


图8 样本数递增拟合图

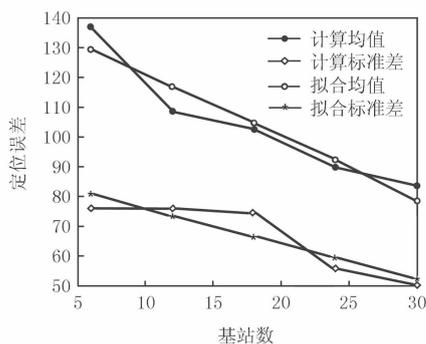


图9 基站数递增拟合图

本文建立的基于几何约束关系的 ML 计算模型经过仿真计算验证证明了方法的可行性和有效性,与 Chan 算法、Taylor 级数展开法等算法相比具有如下特点。

1)模型可以同时对视距、非视距传播环境下的测量数据进行处理,并有效地抑制和克服了测量误差和非视距误差,这是其他很多方法都做不到的。

2)通过 TOA 数据形成的三基站球面几何关系分类和具体的算法都进行了详细的介绍,针对每种情况作了专门的判别与算法设计,对于提高计算精度具有较大的意义。

3)模型使用所有估计点与真实点距离的均值和标准差作为主要评价指标,评价原理简单易懂,可信度高;算法比较简单,能通过计算机程序实现拟合,适用范围广。

6 结束语

针对基于无线通信基站的室内三维定位问题,本文通过 TOA 数据形成的三基站球面几何关系情况分类,建立了以三基站定位原理为基础的基于几何位置约束的最大似然估计模型。利用估计点与真实点距离的均值和标准差作为主要评价指标,对可能出现的计算模型进行了分析和总结。仿真结果表明,模型有效地抑制和克服了测量误差与非视距误差,与传统的 Chan 算法、Taylor 级数展开法等相比,该算法具有更高的定位精度和可靠性。由于其简单性和有效性,在求解三维坐标定位问题中具有较大的应用潜力。

参 考 文 献

- [1] 葛斌,郑建宝,韩江洪. RSSI 辅助的三维空间坐标四面体质心定位算法[J]. 计算机科学,2015,42(4):81-84.
- [2] 王富亮,张国玺,吕明,等. 基于 RSSI 测距的井下人员区域定位算法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2014,42(5):45-49.
- [3] 乔梁,王卫锋. 基于神经网络的 TDOA 定位改进算法研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2014,42(4):139-143.
- [4] 倪磊磊,杨露露,蔡时超,等. 基于 TDOA 的 Chan 定位算法仿真研究[J]. 舰船电子工程,2016(05):92-95.
- [5] 刘春红,战美,陆萍萍. 基于 Taylor 级数展开的改进定位算法研究[J]. 无线电通信技术,2012(06):48-51.
- [6] 陈德章,唐皓,吴季达. 基于 Chan 和 Taylor 的 TDOA 协同定位算法研究[J]. 计算机科学,2011(S1):406-407.
- [7] 吴慎山,尚江丽,聂惠娟,等. 基于多算法协同的蜂窝无线定位的算法研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2006,34(4):192-194.
- [8] 华惊宇. NLOS 无线环境中运用最优化原理的定位算法[J]. 浙江工业大学学报,2014,42(1):93-98.
- [9] 崔玮,吴成东,张云洲,等. 基于高斯混合模型的非视距定位算法[J]. 通信学报,2014,35(1):99-106.
- [10] 龚福祥,王庆,张小国. NLOS 环境下无线通信网络中的 TDOA/AOA 混合定位算法[J]. 东南大学学报(自然科学版),2010,40(5):905-910.

Research on 3D Coordinate Localization based on ML Model with Geometric Constraint Relation

Zhang Lei

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In order to improve the performance and accuracy of the 3D spatial location algorithm, this paper proposes a ML model based on the geometric constraint relationship based on the positioning principle of three base stations. Through the design of base station location, TOA, handheld terminal numerical geometric relationship between locations, estimated by the handheld terminal all possible position, through the maximum likelihood algorithm to estimate the maximum possible value to determine the positioning results. The simulation results show that the algorithm can effectively suppress the NLOS error and the measurement error, and can get the best estimation value. The simulation results show the effectiveness of the proposed method, and it has strong practicability in various indoor positioning systems.

Keywords: 3D positioning; ML model; geometric constraint

[责任编辑 陈留院]

(上接第 52 页)

- [13] Aguila-Camacho N, Duarte-Mermoud M A, Gallegos J A. Lyapunov functions for fractional order systems[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2014, 19(9): 2951-2957.
- [14] 古元凤, 肖剑. Willis 环脑动脉瘤系统的混沌分析及随机相位控制[J]. 物理学报, 2014, 63(16): 51-58.
- [15] 高飞, 李腾, 董恒庆, 等. 分数阶 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌动力学分析与控制[J]. 物理学报, 2016, 65(23): 52-62.
- [16] 韦笃取, 张波, 丘东元, 等. 基于 LaSalle 不变集定理自适应控制永磁同步电动机的混沌运动[J]. 物理学报, 2009, 58(9): 6026-6029.
- [17] 李春来, 禹思敏. 永磁同步电动机的自适应混沌控制[J]. 物理学报, 2011, 60(12): 85-91.
- [18] Li C L, Yu S M, Luo X S. Fractional-order permanent magnet synchronous motor and its adaptive chaotic control[J]. Chinese Physics B, 2012, 21(10): 168-173.
- [19] 雷腾飞, 陈恒, 孟敬, 等. 同步磁阻电机混沌系统的自适应滑模控制[J]. 黑龙江电力, 2015, 37(2): 130-132.

Chaos in the Fractional Order Synchronous Reluctance Motor and its Control

Liu Huizhao, Chen Xiaoxia

(School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: In this paper we propose a fractional Synchronous Reluctance Motor(SynRM) by using the Caputo fractional differential and its theory. We also investigate the chaotic behaviors of the fractional SynRM. Firstly, we discuss chaotic characteristic of the fractional SynRM by analyzing the bifurcation diagram, Lyapunov exponent, phase portraits and time responses. Then we study the influence of system's order to the chaos. In the case of commensurate fractional order SynRM system, the lowest order at which chaos exists is turned out to be about 2.94. Based on the stability theory of fractional order system, Lyapunov function is constructed, a reasonable controller is designed to achieve global asymptotic stability. Finally, numerical investigations demonstrate the validity and feasibility of the presented control method.

Keywords: fractional Synchronous Reluctance Motor; chaos; control

[责任编辑 杨浦]