第 44 卷　第 6 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 44　No. 6
2016 年 11 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Nov. 2016

文章编号:1000－2367(2016)06－0024－05　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.06.004

一类完全三阶两点边值问题解的存在性与唯一性

刘爱兰

(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：讨论如下完全三阶两点边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

解的存在性与唯一性. 其中 $f(t,x,y,z):[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为连续函数. 在 $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 型增长条件下，应用上下解方法与截断技巧，获得了该问题解的存在性和唯一性结果.

关键词：三阶两点边值问题；上解；下解；Nagumo 条件

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A

三阶微分方程边值问题在气体动力学、流体力学、核物理、边界层理论等实际问题中有着广泛的应用[1-2]，因而受到很多作者的关注，可参看文献[3－16]. 本文的目的是研究如下的完全三阶两点边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases}\tag{1}$$

解的存在性与唯一性，其中 $f(t,x,y,z):[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为连续函数，$I=[0,1]$.

对边值问题(1)非线性项含一阶导数项即 $f(t,x,y,z)=f(t,x,y)$ 的特殊情形，文献[3－6]中作者对其作了讨论. 其中文献[3,6]通过对 f 作适当的增长性限制，从而获得了解的存在性. 文献[4－5]分别用上下解方法和单调迭代技巧，在 f 满足一定的单调性条件下获得了解的存在性结果.

而对非线性项不含导数项即 $f(t,x,y,z)=f(t,x)$ 的更简单的情形，文献[7－9]考察了问题(1)的可解性. 其中文献[7－8]要求 f 在满足一定的增长条件下，采用拓扑度方法获得了正解的存在性. 文献[9]要求 f 满足某些单调性条件，用上下解方法得到解的存在性结果.

然而，由于以上文献中的研究方法不能处理问题(1)非线性项中的二阶导数项，因而不再适用于问题(1)的研究. 为了克服由此带来的困难，本文将运用一个特别的截断技巧，在引入 Nagumo 条件并对 f 作适当限制的情形下，用上下解方法获得了问题(1)解的存在唯一性结果.

1　预备知识

引理 1 [6]　对 $\forall h\in C(I)$，方程

$$\begin{cases}-u'''(t)=h(t),t\in I,\\ u(0)=0,u'(0)=0,u'(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

存在唯一解

$$u(t)=\int_0^t\int_0^1(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\triangleq T_3h.\tag{3}$$

$T_3:C(I)\to C^3(I)$ 为线性有界算子，其中

收稿日期：2015-12-20；**修回日期**：2016-06-23.

基金项目：国家自然科学基金(11261053)；甘肃省自然科学基金(1208R-JZA129).

作者简介(通信作者)：刘爱兰(1992－)，女，甘肃通渭人，西北师范大学硕士研究生，研究方向为非线性泛函分析，E-mail：liual3@126.com.

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t),0\le s\le t\le 1\end{cases}$$

为齐次边值问题

$$\begin{cases}-v''(t)=0,t\in I,\\ v(0)=0,v(1)=0\end{cases}$$

所对应的格林函数.

引理 2　设 $f:I\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续,若 f 有界:存在常数 $M>0$,使得

$$|f(t,x,y,z)|\le M,\tag{4}$$

则 BVP(1) 有解.

证明　问题 (2) 是边值问题(1) 所对应的线性问题,由引理1知,$T_3:C(I)\to C^3(I)$ 为线性有界算子. 由嵌入 $C^3\cup C^2(I)$ 的紧性,$T_3:C(I)\to C^2(I)$ 为线性全连续算子. 对 $\forall u\in C^2(I)$ 令

$$F(u)(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\tag{5}$$

则 $F:C^2(I)\to C(I)$ 连续,把有界集映为有界集. 因此 $A=T_3\circ F:C^2(I)\to C^2(I)$ 全连续算子. 方程(1) 的解等价于 A 的不动点. 令 $R\ge\|T_3\|_{\mathscr{B}(C(I),C^2(I))}\cdot M$,对 $\forall u\in\bar{B}_{C^2(I)}(\theta,R)$. 由(4) 式,得

$$\|u\|_{C^2(I)}=\|u\|_C+\|u'\|_C+\|u''\|_C,\quad \|F(u)\|_C\le M,$$

$$\|Au\|_{C^2}=\|T_3(F(u))\|_{C^2}\le\|T_3\|_{\mathscr{B}(C(I),C^2(I))}\cdot\|F(u)\|_C\le\|T_3\|_{\mathscr{B}(C(I),C^2(I))}\cdot M\le R,$$

则 $A:\bar{B}_{C^2(I)}(\theta,R)\to\bar{B}B_{C^2(I)}(\theta,R)$,由 Schauder 不动点定理,$A$ 有不动点,即边值问题 (1) 有解.

定义 1　设 $\alpha(t)\in C^3(I)$,若 $\alpha(t)$ 满足

$$\begin{cases}-\alpha'''(t)\le f(t,\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''t)),t\in I,\\ \alpha(0)\le 0,\alpha'(0)\le 0,\alpha'(1)\le 0,\end{cases}\tag{6}$$

则称 $\alpha(t)$ 为边值问题(1) 的下解,若(6) 式中均取反向不等式,则称 $\alpha(t)$ 为上解.

2　主要结论

本节用上下解方法讨论边值问题(1) 解的存在性和唯一性.

定理 1　设 $f:I\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续,边值问题(1) 存在下解 $\alpha(t)$ 及上解 $\beta(t)$. 满足 $\alpha(t)\le\beta(t),\alpha'(t)\le\beta'(t)$. 若 f 关于 α 与 β 满足 Nagumo 条件.

(F1) 存在$[0,+\infty)$ 上的正值连续函数 $h(\rho)$,满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho}{h(\rho)}\mathrm{d}\rho>\max_{t\in I}\beta'(t)-\min_{t\in I}\alpha'(t),\tag{7}$$

使得 f 满足:

$$|f(t,x,y,z)|\le h(|z|),t\in I,\alpha(t)\le x\le\beta(t),\alpha'(t)\le y\le\beta'(t),$$

且 $f(t,x,y,z)$ 关于 x 单调不减,则边值问题(1) 至少存在一解满足:

$$\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t),\alpha'(t)\le u'(t)\le\beta'(t).$$

证明　令 $u'=v$,则 $u(t)=\int_0^t v(s)\mathrm{d}s:=Tv(t)$. 显然,$T$ 为单调连续增算子. 边值问题(1) 等价于如下的积 - 微分方程边值问题:

$$\begin{cases}-v''(t)=f(t,(Tv)(t),v(t),v'(t)),t\in I,\\ v(0)=0,v(1)=0.\end{cases}\tag{8}$$

证明方程(8) 至少有一个解.

为此,令 $\varphi(t)=\alpha'(t)$, $\psi(t)=\beta'(t)$,则 $\varphi(t)\le\psi(t)$,由(7) 式知,存在 $M>0$,使得

$$\int_0^M\frac{\rho}{h(\rho)}\mathrm{d}\rho>\max_{t\in I}\varphi(t)-\min_{t\in I}\varphi(t).$$

取 $N=M+\|\varphi\|_{C^1}+\|\psi\|_{C^1}+1$,令

$$\eta(t,x)=\max\{T\varphi(t),\min\{x,T\psi(t)\}\},\eta_1(t,y)=\max\{\varphi(t),\min\{y,\psi(t)\}\},$$

$$[z]_N=\begin{cases}N,\ z>N,\\ z,-N\le z\le N,\\ -N,\ z\le -N,\end{cases}$$

则

$$|\eta(t,x)\le\|T\varphi(t)\|_C+\|T\psi(t)\|_C,\ |\eta_1(t,y)|\le\|\varphi(t)\|_C+\|\psi(t)\|_C,\ |[z]_N|\le N.$$

作 f 的截断函数:

$$f^*(t,x,y,z)=f(t,\eta(t,x),\eta_1(t,y),[z]_N)-\frac{y-\eta_1(t,y)}{1+y^2},\tag{9}$$

则 $f^*:I\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续,有界. 由引理 2,修改了的边值问题

$$\begin{cases}-v''(t)=f^*(t,(Tv)(t),v(t),v'(t)),t\in I,\\ v(0)=0,v(1)=0\end{cases}\tag{10}$$

有解 $v_0\in C^2(I)$,下证 v_0 为边值问题(8) 的解.

首先,证 $\varphi(t)\le v_0(t)\le\psi(t),t\in I$.

事实上,如果 $\varphi(t)\not\le v_0$,考查 $\phi(t)=v_0(t)-\varphi(t)$,存在 $t_0\in(0,1)$,使得 $\min\limits_{t\in I}\phi(t)=\phi(t_0)<0$,所以

$$\phi'(t_0)=0,\ \phi''(t_0)\ge 0,\text{即}$$

$$v_0(t_0)<\varphi(t_0),\ v_0'(t_0)=\varphi'(t_0),\ v_0''t_0)\ge\varphi''(t_0).\tag{11}$$

根据截断函数的定义以及 f 关于第二变元的单调性有

$$-v_0''(t_0)=f^*(t_0,Tv_0(t_0),v_0(t_0),v_0'(t_0))=f(t_0,\eta(t_0,Tv_0(t_0)),\varphi(t_0),\varphi'(t_0))-$$
$$\frac{v_0(t_0)-\varphi(t_0)}{1+(v_0(t_0))^2}\ge f(t_0,T\varphi(t_0),\varphi(t_0),\varphi'(t_0))-\frac{v_0(t_0)-\varphi(t_0)}{1+(v_0(t_0))^2}\ge$$
$$-\varphi''(t_0)-\frac{v_0(t_0)-\varphi(t_0)}{1+(v_0(t_0))^2}\ge-\varphi''(t_0),$$

所以 $v_0'(t_0)<\varphi''(t_0)$,这与(11) 式后一不等式矛盾!所以 $\varphi(t)\le v_0(t)$.

同理可证 $v_0(t)\le\psi(t)$.

其次,证明 $|v_0'(t)|\le M,t\in I$.

由中值定理,存在 $t_1\in(0,1)$,使得 $v_0'(t_1)=0$. 反设结论不成立,则 $\|v_0'\|_C>M$. 即存在 $t_2\in[0,t_1)$ 或 $t_2\in(t_1,1]$,使得

$$\|v_0'\|_C=|v_0'(t_2)|>M.$$

下面对上述结论分 4 种情形讨论:

情形 1 $t_2\in[0,t_1),v_0'(t_2)>M$;

情形 2 $t_2\in[0,t_1),v_0'(t_2)<-M$;

情形 3 $t_2\in(t_1,1],v_0'(t_2)>M$;

情形 4 $t_2\in(t_1,1],v_0'(t_2)<-M$.

仅证明情形 1,其他情形类似可证. 令

$$b=\inf\{t'\in(t_2,t_1]\mid v_0'(t')=0\},a=\sup\{t''\in[t_2,b)\mid v_0'(t'')=0\},$$

则 $b\in(t_2,t_1],a\in(t_2,b)$. 由上下确界的定义

$$v_0'(a)=M,v_0'(b)=0,0<v_0'(t)<M,t\in(a,b).\tag{12}$$

当 $t\in(a,b)$ 时,由方程(10) 得

$$-v_0''(t)=f^*(t,Tv_0(t),v_0(t),v_0'(t))=f(t,\eta(t,Tv_0(t)),\eta_1(t,v_0(t)),v_0'(t))-$$
$$\frac{v_0(t)-\eta_1(t,v_0(t))}{1+(v_0(t)^2}=f(t,Tv_0(t),v_0(t),v_0'(t))\le h(v_0'(t)),$$

所以 $-\dfrac{v_0''(t)v_0'(t)}{h(v_0'(t))}\le v_0'(t),t\in[a,b]$.

对上式两边从 a 到 b 积分,且结合(12) 式,得(令 $\rho=v_0'(t)$):

$$\int_0^M \frac{\rho}{h(\rho)}\mathrm{d}\rho \le V_0(b) - v_0(a) \le \max_{t\in I}\psi(t) - \min_{t\in I}\varphi(t), t \in [a,b].$$

与 M 的选择矛盾！故 $\| v_0' \| \le M$. 所以综上有 $\alpha \le v_0 \le \beta$, $\| v_0' \| \le M < N$.

按 f^* 的定义 $f^*(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t)) = f(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t))$. 所以 v_0 为边值问题 (8) 的解，故边值问题 (1) 有解. 证毕.

定理 2　设 $f: I \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 连续，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 是边值问题(1) 的下解和上解. 且 f 关于 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 满足 Nagumo 条件，如果 $f(t,x,y,z)$ 关于 x 单调不减，在 $I \times \mathbf{R}^3$ 上关于各个变量 t,x,y,z 连续可微，且满足条件 (F2) 对 $(t,\xi,\eta,\zeta) \in [0,1] \times \mathbf{R}^3$，$f_x(t,\xi,\eta,\zeta) + f_y(t,\xi,\eta,\zeta) < 0$. 则边值问题(1) 有唯一解 $u(t) \in C^3[0,1]$，满足：$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)$，$\alpha'(t) \le u'(t) \le \beta'(t)$.

证明　由定理 1 知，存在性显然，只需证明唯一性. 假设定理 2 的结论不成立，不妨设 u_1，u_2 都是边值问题(1) 的解，记 $u_0(t) = u_1(t) - u_2(t)$，则由微分中值定理 $u_0(t)$ 满足方程的解.

$$\begin{cases} -u'''(t) = a(t)u(t) + b(t)u'(t) + c(t)u''(t), t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $a(t) = f_x(t,\xi,\eta,\zeta)$，$b(t) = f_y(t,\xi,\eta,\zeta)$，$c(t) = f_z(t,\xi,\eta,\zeta)$，$\xi = u_1 + \theta(u_2 - u_1)$，$\eta = u_0' + \theta(u_2' - u_1')$，$\zeta = u_1'' + \theta(u_2'' - u_1'')$，$\theta \in (0,1)$.

因 $f(t,x,y,z)$ 连续，关于各个变量 t,x,y,z 连续可微，故上述定义有意义. 且由 $f(t,x,y,z)$ 关于 x 单调不减性，知 $a(t) \ge 0$. 要证 $u_0 \equiv 0$，只需证 $u_0' \equiv 0$ 即可，由(13) 式的边界条件便可得 $u_0 \equiv 0$. 下证 $u_0' \equiv 0$.

反设不成立，则存在 $K > 0$，使得 $K = \max\limits_{t\in I} | u_0'(t) |$，即存在 $t^*(0,1)$，使得 $u_0'(t^*) = \max\limits_{t\in I} u_0'(t) = K$，或 $u_0'(t^*) = \min\limits_{t\in I} u_0'(t) = -K$.

先证 $u_0'(t^*) = \min\limits_{t\in I} u_0'(t) = K$ 的情形. 因 $u_0'(t^*) = \min\limits_{t\in I} u_0'(t) = K > 0$. 故 $u_0''(t^*) = 0$，$u_0'''(t^*) \le 0$，所以 $-u_0'''(t^*) \ge 0$，且

$$| u_0(t^*) | = \left| \int_0^{t^*} u_0'(s)\mathrm{d}s \right| \le \int_0^{t^*} | u_0'(s) | \mathrm{d}s \le Kt^* < K. \tag{14}$$

另一方面，由 $a(t) \ge 0$ 和条件(F2) 有

$$-u_0'''(t^*) = a(t^*)u_0(t^*) + b(t^*)u_0'(t^*) + c(t^*)u_0''(t^*) = a(t^*)u_0(t^*) + b(t^*)u_0'(t^*) \le$$
$$a(t^*) \,| u_0(t^*) | + b(t^*) \cdot K < a(t^*)K + b(t^*) \cdot K = [a(t^*) + b(t^*)] \cdot K < 0.$$

这与(14) 式矛盾！所以反设不成立.

$$u_0'(t^*) = \min_{t\in I} u_0'(t) = -K$$

的情形可类似证明. 所以 $u_0' \le 0$，故 $u_0 \le 0$，即边值问题(1) 的解唯一. 证毕.

例　设 $m,n \in \mathbf{N}$，$m < 2n$，取 $f(t,x,y,z) = x^m - 2y^n + z^2 + \sin \pi t$，则 f 为连续函数. 相应的三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = u^m(t) - 2[u'(t)]^n + [u''(t)]^2 + \sin \pi t, t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

取 $\alpha(t) \equiv 0$，$\beta(t) = t$. 显然，$\alpha(t)$ 为边值问题(15) 式的下解. 另一方面

$$f(t,\beta,\beta',\beta'') = t^m - 2[t']^n + \sin \pi t = t^m - 2 + \sin \pi t \le 0 = -\beta'(t), \forall t \in I.$$

因此，$\beta(t)$ 为边值问题(15 式) 的上解，并且 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 满足定理 1 的要求. 令 $h(| z |) = 4 + | z |^2$，则 h 满足 (7) 式，当 $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ 时，$y \in [0,1]$，故

$$| f(t,x,y,z) | = | x^m - 2y^n + z^2 + \sin \pi t | \le | x^m - 2y^n + \sin \pi t | + | z |^2 \le$$
$$| x^m | + | 2y^n | + 1 + | z |^2 \le 4 + | z |^2 = h(| z |), \forall t \in I,$$

所以 f 满足条件(F1)，且由 f 的表达式可知 f 关于 x 单调不减，则由定理 1 知，边值问题(15) 存在一解 u，满足 $0 \le u \le t$，$0 \le u' \le 1$. 又 $m < 2n$，所以 f 满足定理 2 的条件，故该解唯一.

参 考 文 献

[1]　王显正，陈正航，王旭永. 控制理论基础 [M]. 北京：科学出版社，2000.

[2] Tarcísio C S, Keti T. Third order differential equations describingpseudospherical surfaces[J]. J Differential Equations, 2015, 259: 4897-4923.

[3] 冯育强,刘三阳. 非线性三阶边值问题的多解性[J]. 工程数学学报,2003,20(4):109-112.

[4] Feng Yuqiang, Liu Sanyang. Solvability of a third-Order two-Point boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 2005, 18: 1034-1040.

[5] 杜睿娟. Nagumo 条件下三阶两点边值问题解的存在性[J]. 应用泛函分析学报,2008,10(1):71-75.

[6] 张宏旺,李永祥. 一类非线性三阶边值问题的单调迭代方法[J]. 西南大学学报(自然科学版),2009,31(5):34-37.

[7] 蒋达清. 三阶非线性微分方程正解的存在性[J]. 东北师大学报(自然科学版),1996,28(4):6-10.

[8] 姚庆六. 某些非线性三阶两点边值问题的正解存在性[J]. 吉首大学学报(自然科学版),2003,24(2):10-14.

[9] Yao Qingliu, Feng Yuqiang. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 227-232.

[10] Feng Xingfang, Feng Hanying, Bai Donglong. Eigenvalue for a singular third-order three-point boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219: 9783 - 9790.

[11] 孙 博. 一类三阶两点边值问题单调迭代正解的存在性[J]. 工程数学学报,2009,26(6):1027-1032.

[12] 姚庆六. 三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J]. 数学物理学报,2003,(23):513-519.

[13] 冯育强,刘三阳. 一类非线性三阶边值问题的可解性[J]. 工程数学学报,2007,24(3):543-546.

[14] Li Y H, Zhang X Y. Multiple positive solutions of boundary value problems for system of nonlinear third-order differential equations[J]. J Math Res Appl, 2013, 3: 321-329.

[15] Warisa N. Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinarydifferential equations via tangent transformations[J]. Journal of Symbolic Computation, 2016, 77: 63-77.

[16] Wei Zhongli. Some necessary and sufficient conditions for existence of positive solutions for third order singular sublinear multi-point boundary value problems[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B(6): 1795-1810.

Existence and Uniqueness for a Class of Fully Third-Order Two-Point Boundary Value Problems

LIU Ailan

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the existence and uniqueness was discussed for a class of fully third-order two-point boundary value problems,

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in[0,1], \\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0, \end{cases}$$

where $f(t,x,y,z):[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ is continuous and satisfy the Nagumo-type growth condition on z. We obtain the existence and uniqueness result via the lower and upper solution method and a special truncating technique.

Keywords: Third-order two-point boundary value problems; upper solutions; lower solutions; Nagumo condition