文章编号:1000－2367(2017)04－0010－05 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.04.002

# 分数布朗运动驱动的分数阶 Benjamin-Ono 方程的适定性

黄建华[1],陈涌[2],闫威[3]

(1.国防科技大学 理学院,长沙 410072;2.浙江理工大学 理学院,杭州 310018;
3.河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

**摘 要:**主要考虑分数次布朗运动驱动的随机分数阶 Benjamin-Ono 方程,利用随机卷积在空间 $X_{s,b}$ 中的估计,三线性估计和压缩映射原理得到了随机分数次 Benjamin-Ono 方程的适定性.

**关键词:**适定性;分数次 Benjamin-Ono 方程;分数次布朗运动

**中图分类号:**O175.5 **文献标志码:**A

本文考虑如下分数次布朗运动驱动的随机分数次 Benjamin-Ono 方程:

$$\begin{cases} du = [-|D_x|^{\alpha+1}u_x + u^2u_x]dt + \phi(t)dB^H(t), x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$, $|D_x|$ 为傅里叶乘子算子,$\Phi(t)$ 是线性算子,$B^H = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i^H(t)e_i(x)$,$(e_i(x))_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的标准正交基,$(\beta_i^H(t))_{i\in\mathbf{N}}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的双边独立分数次布朗运动.

当 $\alpha = 1, \Phi = 0$ 时,方程(1) 修正的Korteweg-de ries(mKdV) 方程.文献[1]证明了当 $s \geq 1/4$ 时,mKdV 方程在 $H^s$ 中局部适定,当 $s \geq 1$ 时是整体适定的.文献[2－3]证明了 mKdV 方程当 $s = \frac{1}{4}$ 是整体适定的,当 $s < \frac{1}{4}$ 是不适定的.文献[4]讨论了在几乎临界空间中的适定性.当 $0 < \alpha \leq 1$ 时,利用三线性估计,文献[5]考虑了布朗运动($H = \frac{1}{2}$)驱动的随机广义分数次 Benjamin-Ono 方程在 Bourgain 空间中的适定性.通过修正文献[6]中随机卷积在 Bourgain 空间中的估计,文献[7]建立了分数次布朗运动驱动的 KdV-BO 方程的适定性.本文将文献[5]中的噪声推广到更一般的分数次噪声,建立方程(1)的适定性.

方程(1)的适度解为

$$u(t) = U(t)u_0 + \frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)(u^3)_x ds + \int_0^t U(t-s)\Phi dB^H(s), \tag{2}$$

其中 $U(t) = \mathscr{F}_x^{-1} e^{-i\phi(\xi)}\mathscr{F}_x$, $\phi(\xi) = \xi|\xi|^{\alpha+1}$.

对于 $s,b \in \mathbf{R}$,定义 Schwartz 函数空间在 $\mathbf{R}^2$ 上的完备化空间 $X_{s,b}$,其上的范数为

$$\| u \|_{X_{s,b}} = \| U(-t)u \|_{H_x^s H_t^b} = \| \langle\xi\rangle^s \langle\sigma\rangle^b \mathscr{F}u \|_{L_\xi^2 L_\tau^2},$$

其中 $\sigma = \tau + \phi(\xi)$, $\langle\cdot\rangle = 1 + |\cdot|$.当 $T > 0$,考虑 $X_{s,b}$ 上函数限制在区间$[0,T]$上的 $X_{s,b}^T$,相应的范数为

$$\| u \|_{X_{s,b}^T} = \inf\{ \| \tilde{u} \|_{X_{s,b}}, \tilde{u} \in X_{s,b}, 且\ u = \tilde{u}|_{[0,T]} \}.$$

**定理 1** 假设 $s > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$, $u_0(x) \in H^s(\mathbf{R})$.当$\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$ 时,$\Phi \in L_2^{0,s+\frac{\alpha(\alpha+2)}{4(3\alpha+8)}}$;当$\frac{1}{2} < H < 1$ 时,

**收稿日期:**2017-03-08;**修回日期:**2017-03-23.

**基金项目:**国家自然科学基金(11401532;11501511;11671359;11371367);浙江省自然科学基金(LQ14A010015;LQ15A010012).

**作者简介:**黄建华(1968－),男,湖北随州人,国防科技大学教授,博士生导师,主要从事非自治与随机动力系统的研究,E-mail:jhhuang32@nudt.edu.cn.

**通信作者:**闫威(1982－),男,河南周口人,河南师范大学副教授,主要从事偏微分方程的研究,E-mail:yanwei19821115@sina.cn.

$\Phi \in L_2^{0,s}$. 那么对于 $P$-a. e. $\omega \in \Omega$，存在 $T > 0$ 使得柯西问题 1 有唯一的解 $u \in C([0,T];H^s(\mathbf{R})) \cap X_{s,b}^T$.

## 1　对分数次布朗运动的积分

这部分的内容可参考文献[8−10]. 给定区间 $[0,T]$，令分数次布朗运动 $B^H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^H(t) e_i(x)$ 的 Hurst 参数 $H \in (0,1)$. 从而 $B^H(t)$ 是中心高斯过程，其协方差为

$$R(s,t) = E(B^H(s)B^H(t)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) = \int_0^{t \wedge s} K_h(t,r)K_h(s,r)\mathrm{d}r,$$

其中 $K_H$ 是均方可积核，满足

$$K_H(t,s) = c_H(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + c_H(\frac{1}{2} - H)\int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}}[1 - (\frac{s}{u})^{\frac{1}{2}-H}]\mathrm{d}u, \tag{3}$$

其中常数 $c_H = [\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)}]^{\frac{1}{2}}$. 令 $K_T^*$ 是从 $\varepsilon$（$\varepsilon$ 表示 $[0,T] \times [0,1]$ 上的所有阶梯函数）到 $L^2([0,T])$ 的线性算子，定义如下：

$$[K_T^*\varphi](s,x) = K_H(T,s)\varphi(s,x) + \int_s^T (\varphi(r,x) - \varphi(s,x))\frac{\partial K_H(r,s)}{\partial r}\mathrm{d}r,\ \forall \varphi \in \varepsilon. \tag{4}$$

进一步 $B^H(t)$ 有如下的维纳积分

$$B^H(t) = \int_0^t K_H(t,s)\mathrm{d}W(s), \tag{5}$$

其中 $W$ 是维纳过程. 令 $\mathscr{H}$ 是 $\varepsilon$ 关于数量积 $(1_{[0,t]}, 1_{[0,t]})_{\mathscr{H}} = R(s,t)$ 的闭. 对于 $\varphi \in \varepsilon, h \in L^2(0,T)$，以下对偶成立 $\int_s^T (K_T^*\varphi)(t)h(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \varphi(t)(K_H h)(\mathrm{d}t)$. 从而对分数次布朗运动的维纳积分和对维纳过程的 Itô 积分有如下关系

$$\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}B^H(s) = \int_0^t (K_s^*\varphi)(s)\mathrm{d}W(s),\ \varphi \in \mathscr{H}. \tag{6}$$

令 $\Lambda$ 是从希尔伯特空间 $E$ 到 $F$ 的有界算子，相应的积分定义为

$$\int_0^t \Lambda(s)\mathrm{d}B^H(s) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t \Lambda(s)\Phi e_i \mathrm{d}\beta_i^H(s) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t (K_s^*\Lambda(\cdot)\Phi e_i)(s)\mathrm{d}\beta_i(s), \tag{7}$$

其中 $(\Lambda(t))_{t \in [0,T]}$ 满足 $\sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t \| (K_s^*\Lambda(\cdot)\Phi e_i)(s) \|_F^2 \mathrm{d}s < \infty$.

## 2　随机卷积估计

令 $\psi(t)$ 代表支集在 $[-1,2]$ 上的光滑函数且在 $[0,1]$ 上 $\psi(t) \equiv 1$. 下面给出如下随机卷积估计：

$$Z(t) = \int_0^t U(t-s)\Phi \mathrm{d}B^H(s). \tag{8}$$

首先，给出以下基本不等式.

**引理 1**　对任意 $x, y \in \mathbf{R}, \gamma \in (0,1)$，有 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}| \leq C(\gamma)|x-y|^\gamma$.

**性质 1**　令 $s, b \in \nabla, \gamma \in (0,1), 0 < b \leq H < \frac{1}{2}, H + \gamma > \frac{1}{2}$，假设 $\Phi \in L_2^{0,s+\frac{\gamma}{2}(\alpha+2)}$. 则 $\psi Z(t) \in L^2(\Omega, X_{s,b})$ 且

$$E(\| \psi Z \|_{X_{s,b}}^2 \leq M(b,\gamma,H,\psi) \| \Phi \|_{L_2^{0,s+\frac{\gamma}{2}(\alpha+2)}}^2, \tag{9}$$

其中 $M(b,\gamma,H,\psi)$ 只依赖 $b,\gamma,H$, $\| t |^{1/2}\psi(t) |_{L_t^2}^2$, $| \psi(t) |_{H_t^b}^2$ 及 $\| t |^{1/2}\psi(t) |_{L_t^\infty}^2$ 的常数.

**证明**　定义 $g(t,\cdot) = \psi(t)\int_0^t U(t-s)\Phi \mathrm{d}B^H(s)$，则 $\psi(t)Z(t) = U(t)g(t,\cdot)$. 从而

$$\| \psi Z \|_{X_{s,b}}^2 = \| (1+|\xi|)^s(1+|\tau+\phi(\xi)|)^b \mathscr{F}_t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\phi(\xi)}g(t,\xi)) \|_{L_\tau^2 L_\xi^2} = \| (1+|\xi|)^s(1+|\tau+$$

$$\phi(\xi)|)^b\hat{g}(\tau+\phi(\xi),\xi)\|_{L_\tau^2L_\xi^2}=\|(1+|\xi|)^s(1+|\tau|)^b\hat{g}(\tau,\xi)\|_{L_\tau^2L_\xi^2}.$$

因此

$$E\|\psi Z\|_{X_{s,b}}^2=\int\int_{\mathbf{R}^2}(1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau|)^{2b}|\hat{g}(\tau,\xi)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbf{R}}(1+|\xi|)^{2s}E|\mathscr{F}_xg(\cdot,\xi)|_{H_t^b}^2\mathrm{d}\xi,\quad(10)$$

其中 $\mathscr{F}_xg(t,\xi)=\psi(t)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\widehat{\Phi e_k}(\xi)\mathrm{d}\beta_k^H(s)$.

利用 $H_t^b$ 上的等价范数 $|h|_{H_t^b}^2=\int\int_{\mathbf{R}^2}\frac{|h(t)-h(s)|^2}{|t-s|^{1+2b}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s+|h|_{L^2}^2$, $\forall h\in H_t^b$.

可以得到

$$E|\mathscr{F}_xg(\cdot,\xi)|_{H_t^b}^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\widehat{\Phi e_k}|^2(E|\psi(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H|_{H_t^b}^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\widehat{\Phi e_k}|^2E|\psi(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H|_{L^2}^2+$$

$$E\int\int_{\mathbf{R}^2}\frac{|\psi(t_1)\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)-\psi(t_2)\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2):=\sum_{k=0}^{\infty}|\widehat{\Phi e_k}|^2(I_1+I_2).\quad(11)$$

由(6)、(7)式和 Itô 等距公式有

$$I_1=\int_0^2|\psi(t)|^2E|\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)\mathrm{d}\beta_k^H}|^2\mathrm{d}t=\int_0^2|\psi(t)|^2E|\int_0^tK_s^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k(s)|^2\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^2|\psi(t)|^2E|\int_0^t|K_s^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)}|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

结合(4)式,得

$$\int_0^t|K_s^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)}|^2\mathrm{d}s=\int_0^t|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)}K(t,s)+\int_s^t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\varphi(\xi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)})\frac{\partial K^*}{\partial\tau}(\tau,s)\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}s\le$$

$$2(\int_0^t|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)}K(t,s)|^2\mathrm{d}s+\int_0^t|\int_s^t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\varphi(\xi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi(\xi)})\frac{\partial K^*}{\partial\tau}(\tau,s)\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}s):=2(T_1+T_2).$$

由(5)式和 Itô 等距公式得 $T_1=E[(\beta^H(t))^2]=t^{2H}$. 由引理 1 得

$$T_2\le C(\gamma)|\phi(\xi)|^\gamma\int_0^t|\int_s^t(\tau-s)^{H-\frac{3}{2}+\gamma}(\frac{\tau}{s})^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}s\le C(\gamma)|\phi(\xi)|^\gamma\int_0^t|\int_s^t(\tau-s)^{H-\frac{3}{2}+\gamma}\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}s.$$

对于 $\gamma\in(0,1)$,令 $H-\frac{3}{2}+\gamma>-1$, 可得 $T_2\le C(\gamma)|\phi(\xi)|^\gamma t^{2H+2\gamma}$.

因此,得到

$$I_1\le C(\gamma)(|t^{2H}\psi(t)|_{L_t^2}^2+|\phi(\xi)|^\gamma|t^{2H+2\gamma}\psi(t)|_{L_t^2}^2).\quad(12)$$

对于 $I_2$, 有

$$I_2=2\int_0^\infty\int_{t_1<t_2}\frac{E|\psi(t_1)\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)-\psi(t_2)\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\le$$

$$2\int_0^\infty\int_{t_1<0}\frac{|\psi(t_2)|^2E|\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2+$$

$$2\int_0^\infty\int_{0<t_1<t_2}\frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|^2E|\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2+$$

$$2\int_0^\infty\int_{0<t_1<t_2}\frac{|\psi(t_2)|^2E|\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\phi(\xi)}\mathrm{d}\beta_k^H(s)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2:=2(I_{2,1}+I_{2,2}+I_{2,3}).$$

类似 $I_1$,分别估计 $I_{2,1},I_{2,2},I_{2,3}$. 对于 $\gamma\in(0,1)$, $H-\frac{3}{2}+\gamma>-1$, 由(6)、(7)式,Itô 等距公式及引理 1,有

$$I_{2,1}\le C(\gamma)\int_0^2(t_2^{2H}+|\phi(\xi)|^\gamma t_2^{2H+2\gamma})|\psi(t_2)|^2\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}t_1}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_2\le C(\gamma,b)\int_0^2(t_2^{2(H-b)}+$$

$$|\phi(\xi)|^\gamma t_2^{2(H+\gamma-b)})|\psi(t_2)|^2\mathrm{d}t_2\le C(\gamma,b)|\phi(\xi)|^\gamma(||t|^{H-b}\psi(t)|_{L_t^2}^2+||t|^{H+\gamma-b}\psi(t)|_{L_t^2}^2),\quad(14)$$

$$I_{2,2} \le C(\gamma)\int_0^\infty \int_{0<t_1<t_2} \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma})\,|\psi(t_1)-\psi(t_2)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \le$$

$$C(\gamma)\Big(\int_0^2\int_0^{t_2} \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma})\,|\psi(t_1)-\psi(t_2)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 +$$

$$\int_2^\infty\int_0^2 \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma})\,|\psi(t_1)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\Big) \le$$

$$C(\gamma,H)\,|\phi(\xi)|^\gamma\Big(\int_0^2\int_0^{t_2} \frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 +$$

$$\|\,|t|^H\psi(t_1)\|_{L^\infty}^2 \int_2^\infty\int_0^2 \frac{1}{|t_1-t_2|^{1+2b}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\Big) \le$$

$$C(\gamma,H)\,|\phi(\xi)|^\gamma\big(|\psi(t)|_{H_t^b}^2 + C_b\,\|\,|t|^H\psi(t)\|_{L_t^\infty}^2\big). \tag{15}$$

最后计算 $I_{2,3}$：

$$I_{2,3} \le C(\gamma)\int_0^2\int_0^{t_2} |\psi(t_2)|^2\big(|t_1-t_2|^{2H-1-2b} + |t_1-t_2|^{2H+2\gamma-1-2b}\,|\phi(\xi)|^\gamma\big)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \le$$

$$C(\gamma,b,H)\,|\phi(\xi)|^\gamma\,\|\,|t|^{H-b}\psi(t)\|_{L_t^2}^2. \tag{16}$$

由(13)～(16)式，有

$$I_2 \le M(\gamma,b,H,\psi)\,|\phi(\xi)|^\gamma, \tag{17}$$

其中 $M(\gamma,b,H,\psi) = C(\gamma,b,H)(\|\,|t|^{1/2}\psi(t)\|_{L_t^2}^2 + |\psi(t)|_{H_t^b}^2 + C_b\,\|\,|t|^{1/2}\psi(t)\|_{L_t^\infty}^2)$.

由(10)、(11)、(12)及(17)式，得到(18)式.

下面给出 $\frac{1}{2} < b \le H < 1$ 时的随机卷积估计. 证明过程与性质 1 类似，此时 $H+\gamma > \frac{1}{2}$ 恒成立.

**性质 2**　令 $s,b \in \nabla$，$\frac{1}{2} < b \le H < 1$，假设 $\Phi \in L_2^{0,s}$. 则 $\psi Z(t) \in L^2(\Omega, X_{s,b})$ 且

$$E(\|\psi Z\|_{X_{s,b}}^2 \le M(b,H,\psi)\,\|\Phi\|_{L_2^{0,s+}}^2, \tag{18}$$

其中 $M(b,H,\psi)$ 只依赖 $b,H$，$\|\,|t|^{1/2}\psi(t)\|_{L_t^2}^2$，$|\psi(t)|_{H_t^b}^2$ 及 $\|\,|t|^{1/2}\psi(t)\|_{L_t^\infty}^2$ 的常数.

## 3　局部适定性

首先，以下三线性估计在文献[5]得到.

**引理 2**　令 $s \ge \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$，$b = \frac{1}{2} - \epsilon$ 且 $0 < \epsilon \le \frac{\alpha}{2(3\alpha+8)}$，有 $\|(u_1u_2u_3)_x\|_{X_{s,-b}} \le C\prod_{j=1}^{3}\|u_j\|_{X_{s,b}}$.

**注 1**　在性质 1 中要求 $H \ge b$ 且 $H > \frac{1}{2} - \gamma$. 结合引理 2，如 $H \ge b > \frac{1}{2} - \epsilon$，可取 $\gamma = \frac{\alpha}{2(3\alpha+8)}$. 从而当 $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$ 时，$\Phi \in L_2^{0,s+\frac{\alpha(\alpha+2)}{4(3\alpha+8)}}$.

**引理 3**　令 $0 < a,b < \frac{1}{2}$，$c > \frac{1}{2}$，$s \in \mathbf{R}$，$u_0 \in H^s$，$f \in X_{s,-a}$. 则

$$\|U(t)u_0\|_{X_{s,c}} \le C\,\|u_0\|_{H^s}, \tag{19}$$

$$\Big\|\int_0^t U(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{X_{s,b}} \le CT^{1-a-b}\,\|f\|_{X_{s,-a}}. \tag{20}$$

**定理 1 的证明**　首先考虑 $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$ 情形. 令 $Z(t)$ 由(8)式给定，$z(t) = U(t)u_0$，$v(t) = u(t) - Z(t) - z(t)$，则

$$v(t) = \mathscr{T}v(t) = -\frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)(v^3 + Z^3 + z^3 + 3v^2Z + 3vZ^2 +$$

$$3v^2z + 3vz^2 + 3Zz^2 + 3Zz^2 + 6vZz)_x\mathrm{d}s. \tag{21}$$

令 $B_R = \{v \in X_{s,b}^T,\ \|v\|_{X_{s,b}^T} \le R\}$. 由性质 1、引理 2 和引理 3，得到

$$\| \mathscr{T}v(t) \|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-a-b}(R^3 + \| Z \|_{X_{s,b}^T}^3 + \| u_0 \|_{H^s}^3).$$

对于 $v_1, v_2 \in B_R$，有 $\| \mathscr{T}v_1 - \mathscr{T}v_2 \|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-a-b}(R^2 + \| Z \|_{X_{s,b}^T}^2 + \| u_0 \|_{H^s}^2) \| v_1 - v_2 \|_{X_{s,b}^T}$.

令 $R_0 = \| Z \|_{X_{s,b}} + \| u_0 \|_{H^s} \leq R, T = \inf\{t > 0, 2CT^{1-a-b}R_0^2 \leq \frac{1}{2}\}$. 则 $\mathscr{T}$ 在空间 $X_{s,b}^T$ 映 $B_R$ 到自身且 $\| \mathscr{T}v_1 - \mathscr{T}v_2 \|_{X_{s,b}^T} \leq \frac{1}{2} \| v_1 - v_2 \|_{X_{s,b}^T}$. 因此 $\mathscr{T}$ 有一个唯一的不动点即是方程(21) 在空间 $X_{s,b}^T$ 中的唯一解.

接下来证明 $u = z + v + Z \in X_{s,c}^T + X_{s,b}^T$ 属于空间 $C([0,T];H^s)$. 由嵌入定理，$z \in C([0,T];H^s)$. 类似文献[11]中定理 6.10 的证明，得到 $Z(t)$ 在 $H^s$ 中有连续的修正. 令 $\tilde{u}$ 是 $u$ 在 $X_{s,c} + X_{s,b}$ 中的任意延拓，由性质 1 及文献[12]，得到 $\| \varphi_T \int_0^t U(t-s)(\tilde{u}^3)_x \mathrm{d}r \|_{X_{s,1-a}} \leq C \| (\tilde{u}^3)_x \mathrm{d}r \|_{X_{s,-a}}$. 因为 $1 - a > 1/2$，所以 $\tilde{u} \in X_{s,b} \subset C([0,T];H^s)$，这里 $\varphi_T(\cdot) = \psi(\frac{\cdot}{T})$.

类似 $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$ 情形，利用性质 2 和引理 2 得到 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时解的存在唯一性.

## 参　考　文　献


[1] Kenig C, Ponce G, Vega L. Well-posedness and scattering rersults for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle[J]. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 527-620.

[2] Birnir B, Ponce G, Svanstedt N. The local ill-posedness of the modified KdV equation[J]. Ann Inst Henri Poincaré, 1996, 34: 529-535.

[3] Kenig C, Ponce G, Vega L. On the illposedness of some canonical dispersive equations[J]. Duke Math J, 2001, 106: 617-633.

[4] Grünrock A, Vega L. Local well-posedness for the modified KdV equation in almost critical $\widehat{H}_s^r$-spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2009, 361: 5681-5694.

[5] Yan W, Huang J H, Guo B L. Well-posedness for Stochastic Generalized Fractional Benjamin-Ono Equation[EB/OL]. [2017-03-10]. http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/bib_query? arXiv:1504.02172.

[6] de Bouard A, Debussche A, Tsutsumi Y. White noise driven Korteweg-de Veris equation[J]. J Funct Anal, 1999, 169: 532-558.

[7] Bian B J, Wang G L. Well-posedness of stochastic KdV-BO equation driven by fractional Brownian motion[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 657-669.

[8] Alòs E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes[J]. Ann Probab, 2001, 29: 766-801.

[9] Tindel S, Tudor C A, Viens F. Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion[J]. Probab Theory Related Fields, 2003, 127: 186-204.

[10] Zähle M. On the link between fractional and stochastic calculus, Stochastic Dynamics[J]. New York: Springer, 1999: 305-325.

[11] Prato Da G, Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions[D]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[12] Kenig C E, Ponce G, Vega L. The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices[J]. Duke Math J, 1993, 71: 1-21.


# Well-posedness for Stochastic Fractional Benjamin-Ono Equations Driven by Fractional Brownian Motion


Huang Jianhua[1], Chen Yong[2], Yan Wei[3]

(1. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. College of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 3. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)



**Abstract**: In this paper, the stochastic fractional Benjamin-Ono equations driven by fractional Brownian motion has been discussed. The regularity of stochastic convection for fractional Brownian motions in Bourgain space is established, and the local well-posedness for the stochastic fractional Benjamin-Ono equations is established by the trilinear-estimates and the contracting mapping principle in the Bourgain space.



**Keywords**: well-posedness; fractional Brownian motion; fractional Benjamin-Ono equations

[责任编辑　陈留院]