

基于 Adomian 分解法的分数阶 Lü 混沌系统的动力学分析及数字实现

陈 恒¹, 雷腾飞², 尹劲松¹

(1. 西京学院 控制工程学院, 西安 710123; 2. 齐鲁理工学院 机电工程学院, 济南 250200)

摘 要: 基于 Adomian 分解方法, 研究了一类分数阶 Lü 混沌系统. 从系统的分岔图、基于谱熵(SE)算法和 C_0 算法的系统复杂度、吸引子相图等数值仿真分析研究了 0.9 阶次 Lü 混沌系统丰富的动力学特性. 又基于 Adomian 分解法, 利用数字芯片 TMS320F28335DSP 中设计了程序以及外围硬件电路, 实现了分数阶 Lü 混沌系统. 最后, 通过示波器观察 DSP 数字电路输出结果与理论分析结果相一致, 从而进一步揭示了分数阶混沌系统的动力学特性.

关键词: Adomian 分解法; 谱熵算法; C_0 算法; 复杂度; 分数阶混沌系统; DSP

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

在整数阶微积分提出后, 分数阶微积分也随之出现, 距今已有 300 多年. 因为分数阶没有实用背景且在工程中也无应用, 从而使得分数阶的思想一直很少被研究者以及科学工作者提及. 而现实的许多实际工程与物理系统都表现出了他们本身的分数阶特性, 且相对整数阶分数阶更可以准确反映自然现象, 如材料记忆与阻尼特性等^[1]. 近年来, 随着非混沌理论研究的深入与完善, 特别因分数阶混沌系统的复杂性不仅与系统本身参数有关, 而且与结束相关使得分数阶混沌系统成为新的研究热点. 不少学者提出了以整数阶混沌系统为基础的若干种分数混沌系统如分数阶 Chen 系统^[3-4]、分数阶 Lü 系统^[5]、分数阶 Lorenz 系统^[6]等^[7-9]

目前, 众多科学家工作者已分数阶混沌系统领域取得了丰硕的成果, 但具体涉及到分数阶系统的混沌特性分析的工作较少. 研究分数阶系统的前提为分数阶的定义, 由于分数阶微积分的定义众多^[10], 使得许多研究结果存在一定区别^[11]. 对分数阶混沌系统的研究方法很多, 而许多科研工作者一般集中在频域法、预估-矫正法、Adomian 分解法. 文[12-14]采用频域法分别对分数阶 Lorenz, 分数阶 Chen, 分数阶超 Lorenz 混沌系统的混沌特性进行了分析研究, 也采用模拟电路实现分数阶混沌系统. 文献[15]采用预估-矫正法对分数阶时滞系统进行了同步研究. 文献[16]采用 Adomian 对简化的一类 Lorenz 系统进行了分析研究.

对于分数阶 Lü 混沌系统, 由于系统为 Lorenz 系统与 Chen 系统之间的过渡系统, 则对分数阶 Lü 混沌系统的动力特性的探究讨论尤为重要, 它是两类经典混沌系统的桥梁, 而现有文献对分数阶系统的研究大部分采用预估-矫正法利用不同的刻画方法进行了描述研究[12-14], 而 Adomian 分解法作为经典的研究分数阶的方法, 因仿真时间短, 被作为良好的研究分数阶的方法. 加之, 现刻画混沌系统动力学特性的方法众多, 但有一种方法常常被人们忽略即复杂度, 现有文献对此方法利用也甚少, 则利用该方法分析其分数阶混沌系统尤为重要, 而且简单易观察. 所以利用 Adomian 分析分数阶 Lü 混沌系统的动力学(复杂度)对于认识分数阶混沌系统的形成机理具有重要意义.

本文针对一类过渡分数阶混沌系统即分数阶 Lü 混沌系统, 首先对分数阶 Lü 混沌系统的非线性项进行了 Adomian 分解法, 得出了系统的混沌吸引子, 其次为了说明系统状态随参数变化的特点, 同时研究了 0.9 阶的 Lü 混沌系统的分岔图与复杂度图. 最后, 为了在实际工程中特别为通信保密中更好地使用该系统利用

收稿日期: 2016-06-23; 修回日期: 2016-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金(61371163); 陕西省教育厅科研计划项目(2013JK1068).

第 1 作者简介: 陈 恒(1965-)男, 江苏淮阴人, 西京学院副教授, 博士后, 研究方向: 电机控制与混沌控制.

通信作者: 雷腾飞, E-mail: leitengfeicanhe@126.com.

DSP 以及搭建外围电路,通过示波器观察到了与数值仿真一致的结果从而进一步说明系统的客观存在性,为更好混沌密码以及图像、文字视频加密领域提供了参考价值^[17].

1 分数阶 Lü 混沌系统

吕金虎等^[18]提出 Lü 混沌系统,本文在此基础上提出了分数阶 Lü 混沌系统的动力学方程

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = a(y-x), \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = cy - xz, \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

对系统(1)进行非线性项的分解,截取前6项

$$\begin{cases} A_2^0 = -x^0 z^0, \\ A_2^1 = -x^1 z^0 - x^0 z^1, \\ A_2^2 = -x^2 z^0 - x^1 z^1 - x^0 z^2, \\ A_2^3 = -x^3 z^0 - x^2 z^1 - x^1 z^2 - x^0 z^3, \\ A_2^4 = -x^4 z^0 - x^3 z^1 - x^2 z^2 - x^1 z^3 - x^0 z^4, \\ A_2^5 = -x^5 z^0 - x^4 z^1 - x^3 z^2 - x^2 z^3 - x^1 z^4 - x^0 z^5. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A_3^0 = x^0 y^0 \\ A_3^1 = x^1 y^0 + x^0 y^1, \\ A_3^2 = x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2, \\ A_3^3 = x^3 y^0 + x^2 y^1 + x^1 y^2 + x^0 y^3, \\ A_3^4 = x^4 y^0 + x^3 y^1 + x^2 y^2 + x^1 y^3 + x^0 y^4, \\ A_3^5 = x^5 y^0 + x^4 y^1 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x^1 y^4 + x^0 y^5. \end{cases} \quad (3)$$

给定初始状态: $\begin{cases} x^0 = x(t_0) = c_1^0 \\ y^0 = y(t_0) = c_2^0 \\ z^0 = z(t_0) = c_3^0 \end{cases}$, 根据 Adomian 分解法和分数阶微积分性质得

$$\begin{cases} x^1 = a(c_2^0 - c_1^0) \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)}, \\ y^1 = [cc_2^0 - c_1^0 c_3^0] \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)}, \\ z^1 = (c_1^0 c_2^0 - bc_3^0) \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)}. \end{cases} \quad (4)$$

将相对应的变量赋系数值,令

$$\begin{cases} c_1^1 = a(c_2^0 - c_1^0), \\ c_2^1 = +cc_2^0 - c_1^0 c_3^0, \\ c_3^1 = c_1^0 c_2^0 - bc_3^0, \end{cases} \quad (5)$$

则可知只求出每一项对应的系数即可,根据 Adomian 分解法和分数阶微积分性质得

$$\begin{cases} c_1^2 = a(c_2^1 - c_1^1), \\ c_2^2 = +cc_2^1 - c_1^1 c_3^1 - c_1^0 c_3^1, \\ c_3^2 = c_1^1 c_2^0 + c_1^0 c_2^1 - bc_3^1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} c_1^3 = a(c_2^2 - c_1^2), \\ c_2^3 = cc_2^2 - c_1^2 c_3^0 - c_1^0 c_3^2 - c_1^1 c_3^1 \frac{\Gamma(2q+1)}{\Gamma^2(q+1)}, \\ c_3^3 = c_1^2 c_2^0 + c_1^0 c_2^2 + c_1^1 c_2^1 \frac{\Gamma(2q+1)}{\Gamma^2(q+1)} - bc_3^2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} c_1^4 = a(c_2^3 - c_1^3), \\ c_2^4 = cc_2^3 - c_1^3 c_3^0 - c_1^0 c_3^3 - (c_1^1 c_3^2 + c_1^2 c_3^1) \frac{\Gamma(3q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(q+1)}, \\ c_3^4 = c_1^3 c_2^0 + c_1^0 c_2^3 + (c_1^1 c_2^2 + c_1^2 c_2^1) \frac{\Gamma(3q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(q+1)} - bc_3^3, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} c_1^5 = a(c_2^4 - c_1^4), \\ c_2^5 = cc_2^4 - c_1^4 c_3^0 - c_1^0 c_3^4 - (c_1^1 c_3^3 + c_1^2 c_3^2) \frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(q+1)} - c_1^3 c_3^1 \frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma^2(2q+1)}, \\ c_3^5 = c_1^4 c_2^0 + c_1^0 c_2^4 + (c_1^1 c_2^3 + c_1^2 c_2^2) \frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(q+1)} + c_1^3 c_2^1 \frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma^2(2q+1)} - bc_3^4, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} c_1^6 = a(c_2^5 - c_1^5), \\ c_2^6 = cc_2^5 - c_1^5 c_3^0 - c_1^0 c_3^5 - (c_1^2 c_3^3 + c_1^3 c_3^2) \frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(2q+1)} - (c_1^1 c_3^4 + c_1^4 c_3^1) \frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(4q+1)\Gamma(q+1)}, \\ c_3^6 = c_1^5 c_2^0 + c_1^0 c_2^5 + (c_1^1 c_2^4 + c_1^2 c_2^3) \frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(2q+1)} + (c_1^3 c_2^2 + c_1^4 c_2^1) \frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(4q+1)\Gamma(q+1)} - bc_3^5, \end{cases} \quad (10)$$

从而,得出系统的方程解

$$\begin{cases} x(t) = c_1^0 + c_1^1 \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)} + c_1^2 \frac{(t-t_0)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + c_1^3 \frac{(t-t_0)^{3q}}{\Gamma(3q+1)} + c_1^4 \frac{(t-t_0)^{4q}}{\Gamma(4q+1)} + c_1^5 \frac{(t-t_0)^{5q}}{\Gamma(5q+1)} + c_1^6 \frac{(t-t_0)^{6q}}{\Gamma(6q+1)}, \\ y(t) = c_2^0 + c_2^1 \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)} + c_2^2 \frac{(t-t_0)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + c_2^3 \frac{(t-t_0)^{3q}}{\Gamma(3q+1)} + c_2^4 \frac{(t-t_0)^{4q}}{\Gamma(4q+1)} + c_2^5 \frac{(t-t_0)^{5q}}{\Gamma(5q+1)} + c_2^6 \frac{(t-t_0)^{6q}}{\Gamma(6q+1)}, \\ z(t) = c_3^0 + c_3^1 \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)} + c_3^2 \frac{(t-t_0)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + c_3^3 \frac{(t-t_0)^{3q}}{\Gamma(3q+1)} + c_3^4 \frac{(t-t_0)^{4q}}{\Gamma(4q+1)} + c_3^5 \frac{(t-t_0)^{5q}}{\Gamma(5q+1)} + c_3^6 \frac{(t-t_0)^{6q}}{\Gamma(6q+1)}, \end{cases} \quad (11)$$

其中 x, y, z 为系统变量, a, b, c 为系统参数, 当 $a = 30, b = 2.93, c = 22.2, q_1 = q_2 = q_3 = q = 0.9$, 即得出系统的解析解. 运用 MATLAB 软件对其进行 Adomain 分解下的 Lü 系统数值仿真, 得出系统(1)的相图即存在混沌吸引子如图 1 所示.

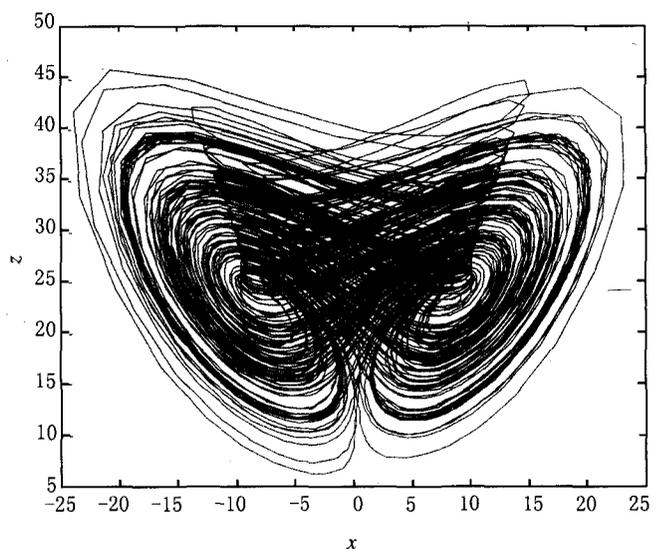
2 分数阶 Lü 混沌系统分岔图与复杂度

为了进一步研究系统参数对分数阶 Lü 混沌系统的影响, 下面就对三个参数变换下的系统分岔图与复杂度进行研究分析.

2.1 参数 a 的变化

固定参数 $b = 2.93, c = 22.2, q_1 = q_2 = q_3 = q = 0.9, a \in [20, 40]$ 系统的分岔图与

复杂度如图 2 所示. 由图 4 可知系统是以倍周期(PDB)分岔的行为过渡到混沌行为的. $a \in [20, 28.5]$ 属于周期状态, 从分岔图中可以看到, 当然系统此时的谱熵(SE)复杂度 S 处于 0.15 左右, C_0 复杂度属于 0.03 左右



(a) $x-z$ 相图

图1 系统吸引子

期状态,系统复杂度很低,可以看出系统分岔图与系统复杂度基本一致.为了进步验证以上的结论,即给出了参数 a 某些具体值下的系统的相图如图 3 所示.

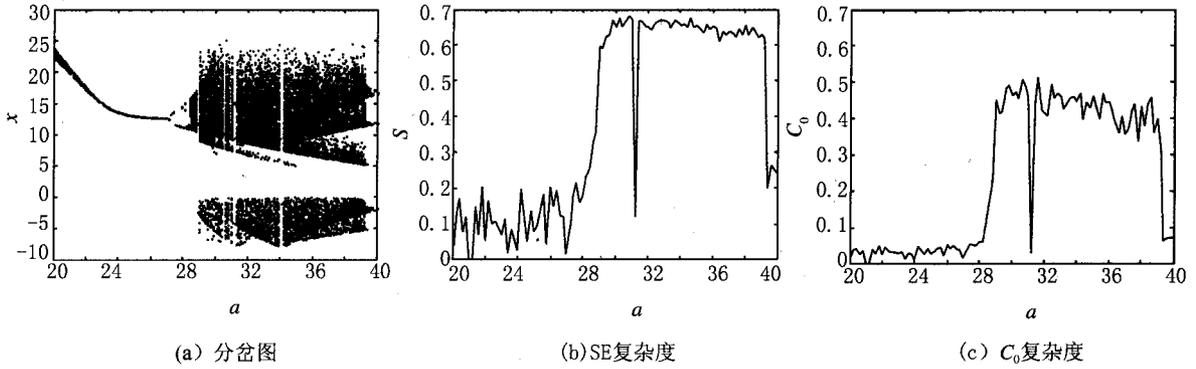


图2 a 变化时系统(1)的分岔图复杂度

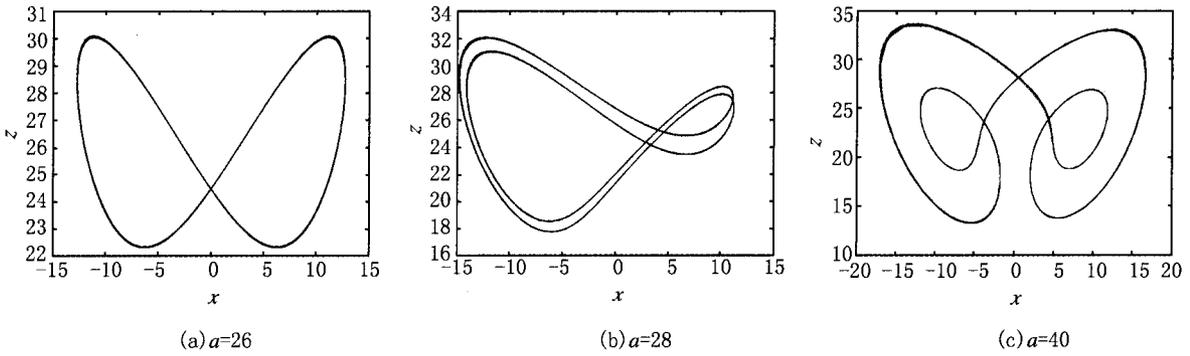


图3 a 变化时系统的相图

2.2 参数 b 的变化

固定参数 $a=30, c=22.2, q_1=q_2=q_3=q=0.9, b \in [0, 4]$ 系统的分岔图与复杂度如图 4 所示. 由图 4 可知系统是以拟周期的行为脱离混沌行为的. $b=2$ 时属于周期状态. 从分岔图中可以看到, 分数阶 Lü 系统此时的 SE 复杂度接近 0, C_0 复杂度接近 0. 在此点为鞍结点分岔 (SNB); $b \in (0, 4]$ 系统属于混沌状态, 此时系统的 SE 复杂度都处于 $0.6 \sim 0.7$ 左右, 可以看出系统分岔图与系统复杂度基本一致. 对于参数 b 某些具体值下的系统的相图由于篇幅有限, 且与参数 a 变换时有相似之处, 本节不在给出.

2.3 参数 c 的变化

固定参数 $a=30, b=2.93, q_1=q_2=q_3=q=0.9, c \in [10, 30]$ 系统的分岔图与复杂度如图 5 所示. 由图 5 可知系统是以倍周期 (FDB) 的行为脱离混沌行为的. $c \in [23, 30]$ 属于周期状态, 从分岔图中可以看到, 系统此时的 SE 复杂度处于 0.1 左右, C_0 复杂度属于 0.05 左右; $c \in [11, 23]$ 系统属于混沌状态, 此时系统的 SE 复杂度都处于 0.7 左右, 可以看出系统分岔图与系统复杂度基本一致. 对于参数 c 某些具体值下的系统的相图由于篇幅有限, 且与参数 a 变换时有相似之处, 本节不在给出.

3 混沌系统的数字实现

混沌系统用最为直接的应用是硬件电路实现, 当然模拟电路实现已经普遍存在, 而随着微电子和数字信号的发展, 运用数字电路实现其混沌系统已经成为混沌系统研究的热点. 在众多数字元器件 (CPU) 中, 具有强大的信号处理与数字处理能力的 DSP 被广泛应用于航空、石油测井、电源控制、电机控制等领域^[19].

为更好实现分数阶 Lü 混沌系统, 文中采用典型 TI 公司的 TMS320F28335, 而 D/A 转换器采用 16 位的 DAC8552, DSP 与计算机的通讯采用串口 RS232, 串口转换利用 MAX3232 芯片. F28335 为浮点型, 其主频达到 150 MHz, 完全满足混沌系统频率等方面的要求. DSP 的开发平台为 CCS4.2. 在 DSP 实现分数阶 Lü

混沌系统中有个关键问题:数据处理. D/A 转换数字量必选为整数且在 $0 \sim 65\ 535$, 则得出数字需要按比例放大, 然后送入 D/A 中. 为了便于计算机处理与现实一般将其混沌序列中的每一位换成 ASCII 码即十进制数加 48 即可.

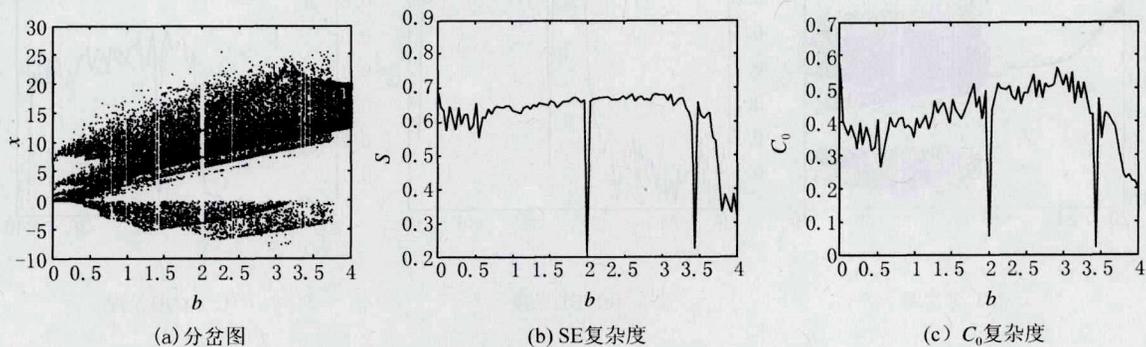


图4 b 变化时系统(1)的分岔图复杂度

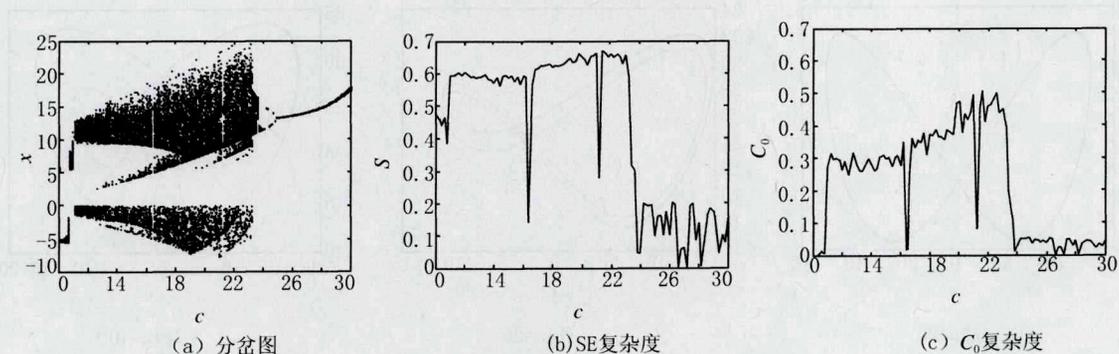


图5 c 变化时系统(1)的分岔图复杂度

将 DSP 产生的混沌序列取小数点后 4 位, 取 5000~15 000 之间的序列, 绘制出其吸引子图如图 6 所示.

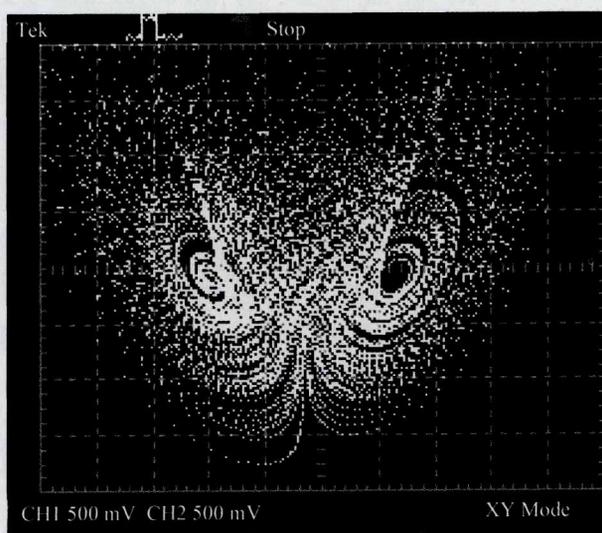


图6 示波器观察的系统吸引子

上述的 DSP 实现其分数阶混沌系统采用为 Adomian 分解法, 具体可参看式子(2)~(11), DSP 的实现为该系统应用于图像、视频等多媒体的混沌加密以及混沌通信保密提供了有力的参考价值.

4 结 论

应用分数阶微积分基本理论,基于 Adomian 分解法研究了一类分数阶 Lü 混沌系统.以 Adomian 分解法分析研究系统吸引子,根据此算法采用分岔图、SE 复杂度以及 C_0 复杂度等数值仿真分析 0.9 阶次 Lü 混沌系统基本动力学行为.为了使得系统更好应用到实际工程项目中,从数字方面实现了分数阶 Lü 混沌系统,示波器得出结果与理论分析具有一致性,从而说明了分数阶 Lü 混沌系统的可实现性.当然为分数阶 Lü 混沌系统的控制及其在混沌通信保密等方面的应用提供了新的思路.

参 考 文 献

- [1] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics[M]. New Jersey: World scientific, 2001.
- [2] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: Freeman, 1983.
- [3] Lu J G. Nonlinear observer design to synchronize fractional-order chaotic system via a scalar transmitted signal[J]. Physica A, 2006, 359: 107-118.
- [4] 王震, 孙卫. 分数阶 Chen 混沌系统同步及 Multisim 电路仿真[J]. 计算机工程与科学, 2012, 34(1): 187-192.
- [5] Wu X J. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization[J]. Chinese Physics, 2007, 16(7): 392-401.
- [6] 崔力, 欧青立, 徐兰霞. 分数阶 Lorenz 超混沌系统及其电路仿真[J]. 电子测量技术, 2011, 23(5): 13-16.
- [7] 闵富红, 余杨, 葛曹君. 超混沌分数阶 Lü 系统电路实验与追踪控制[J]. 物理学报, 2009, 58(3): 1456-1461.
- [8] 刘崇新. 一个超混沌系统及其分数阶电路仿真实验[J]. 物理学报, 2007, 56(12): 6865-6873.
- [9] 赵品栋, 张晓丹. 一类分数阶混沌系统的研究[J]. 物理学报, 2008, 57(5): 2791-2798.
- [10] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [11] Li C P, Deng W H. Remarks on fractional derivatives[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187(2): 777-784.
- [12] 贾红艳, 陈增强, 薛薇. 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现[J]. 物理学报, 2013, 62(14): 140503.
- [13] 陈恒, 雷腾飞, 王震, 等. 分数阶 Chen 混沌系统的动力学分析与电路实现[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2015, 39(3): 208-215.
- [14] 陈恒, 雷腾飞, 王震, 等. 分数阶 Lorenz 超混沌系统的动力学分析与电路设计[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(1): 59-63.
- [15] 梁松, 张云雷, 吴然超. 分数阶多时滞混沌的同步[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2015, 43(2): 25-29.
- [16] 贺少波, 孙克辉, 王会海. 分数阶混沌系统的 Adomian 分解法求解及其复杂性分析[J]. 物理学报, 2014, 63(3): 030502.
- [17] 廖晓峰, 陈勇. 混沌密码学原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [18] Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [19] 禹思敏. 混沌系统与混沌电路: 原理、设计及其在通信中的应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011.

Dynamics Analysis and Digital Implementation of Fractional-order Lü Chaotic System Based on Adomian Decomposition

CHEN Heng¹, LEI Tengfei², YIN Jinsong¹

(1. School of Control Engineering, Xijing University, Xi'an 710123, China;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Qilu Institute of Technology Shandong, Jinan 250200, China)

Abstract: Based on decomposition method of Adomian fractional order Lü chaotic system is studied. The rich characteristics of 0.9 order Lü chaotic system are analyzed and validated according to the numerical simulation analysis of the system bifurcation diagram of the system, SE algorithm complexity and C_0 algorithm complexity. And based on Adomian decomposition, with TMS320F28335 DSP digital chip to design program and peripheral hardware circuit, fractional order Lü chaotic systems are realized. The experimental results are consistent with the numerical calculation through the oscilloscope observation, which reveals the abundant dynamics characteristic and realization of the chaotic system to the further.

Keywords: Adomian decomposition; SE algorithm; C_0 algorithm; Complexity; fractional-order chaotic system; DSP