文章编号:1000-2367(2016)03-0031-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.03.006

# 具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应的捕食系统的稳定性分析

梁桂珍[1], 丰莹莹[1,2]

(1.新乡学院 数学与信息科学学院,河南 新乡 453000;2.郑州大学 数学与统计学院,郑州 450000)

**摘 要**:研究了两类具有竞争关系的食饵种群被一类具有阶段结构和时滞的捕食者捕食,且具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应的捕食系统.通过比较原理获得该系统持续生存和捕食者灭绝的充分条件,并且当系统为周期系统时,获得其正周期解存在性和全局稳定性的充分条件.

**关键词**:阶段结构;时滞;竞争关系;持续生存;Beddington-DeAngelis 型功能反应

**中图分类号**:O175.13 **文献标志码**:A

捕食系统是现代生态学研究中的主要课题,大量统计研究表明,具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应的捕食系统,在低密度状态下,与生态系统的实际更加吻合.因此,国内外许多学者对该功能反应的捕食系统进行大量研究,如持久性、时滞、周期解的稳定性等[1-9].文献[2]讨论了食饵具有竞争关系的捕食系统的持久性,本文在此基础之上,引入时滞因素,研究了食饵具有竞争关系,捕食者具有时滞的捕食系统的持久性和周期解的稳定性,为此建立如下模型:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)\left(r_1(t)-b_1(t)x_1(t)-e_1(t)x_2(t)-\dfrac{c_1(t)y_2(t)}{\alpha_1(t)+\beta_1(t)x_1(t)+\gamma_1(t)y_2(t)}\right),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\left(r_2(t)-b_2(t)x_2(t)-e_2(t)x_1(t)-\dfrac{c_2(t)y_2(t)}{\alpha_2(t)+\beta_2(t)x_2(t)+\gamma_2(t)y_2(t)}\right),\\ \dot{y}_1(t)=a_1(t)y_2(t)-d_1(t)y_1(t)-a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)e^{-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\theta)d\theta},\\ \dot{y}_2(t)=a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)e^{-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\theta)d\theta}-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2^2(t)+\\ \dfrac{f_1(t)x_1(t-\tau_2)y_2(t)}{\alpha_1(t)+\beta_1(t)x_1(t-\tau_2)+\gamma_1(t)y_1(t-\tau_2)}+\dfrac{f_2(t)x_2(t-\tau_3)y_2(t)}{\alpha_2(t)+\beta_2(t)x_2(t-\tau_3)+\gamma_2(t)y_2(t-\tau_3)},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_1(t),x_2(t)$ 代表两类食饵种群的密度,$y_1(t),y_2(t)$ 代表捕食者幼年期和成熟期的种群密度,$e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 分别代表两类食饵种群间的竞争率,$r_i(t)(i=1,2)$ 代表食饵种群的内禀增长率,$b_i(t)(i=1,2,3)$ 分别代表种群的密度制约,$d_i(t)(i=1,2)$ 分别代表捕食者幼年期和成熟期的种群死亡率.

对于非自治系统(1) 的系数,设时滞 $\tau_i(i=1,2,3)$ 为固定的正常数,记 $\tau=\max\{\tau_i(i=1,2,3)\}$. $r_i(t)$, $a_1(t),b_i(t),b_3(t),c_i(t),d_i(t),e_i(t),f_i(t)$ 和 $\alpha_i(t),\beta_i(t),\gamma_i(t)$(其中 $i=1,2$) 都是连续有界的严格正函数,即当 $t\in[-\tau,+\infty)$ 时,记为:$0<f^l\triangleq\inf\limits_{t\in[-\tau,+\infty)}f(t)\le f(t)\le\sup\limits_{t\in[-\tau,+\infty)}f(t)\triangleq f^u<+\infty$.

设系统(1) 的初始值为 $\phi$,满足条件:

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}_+^4),\mathbf{R}_+^4=\{x_i(i=1,2,3,4)\mid x_i>0(i=1,2,3,4)\}.\tag{2}$$

由系统(1) 的第 3 个方程和初始值的连续性,可得:

**收稿日期**:2015-06-16;**修回日期**:2016-04-13.

**基金项目**:河南省科技厅科技攻关项目(122102310373;132102310482);河南省高校重点科研项目(16A110021);新乡学院科技创新项目(12ZB17).

**第 1 作者简介(通信作者)**:梁桂珍(1964-),女,内蒙古临河人,新乡学院教授,研究方向为生物数学,E-mail:lgz3361@163.com.

$$y_1(0)=\int_{-\tau_1}^{0}(a_1(s)y_2(s)\mathrm{e}^{-\int_s^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}(\sigma)})\mathrm{d}(s),y_1(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}(a_1(s)y_2(s)\mathrm{e}^{-\int_s^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}(\sigma)})\mathrm{d}(s).\tag{3}$$

由(3) 可知,$y_1(t)$ 的正性完全取决于 $y_2(t)$.

## 1 预备知识

**定义 1** 如果存在正常数 $m_i,M_i(i=1,2,3,4)$ 和 $T>0$,当 $t\geq T$ 时,系统(1) 的任何解$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 满足 $m_1\leq x_1(t)\leq M_1,m_2\leq x_2(t)\leq M_2,m_3\leq y_1(t)\leq M_3,m_4\leq_4(t)\leq M_4$,则称系统(1) 是持续生存的.

**定义 2** 对于系统(1) 的任意两个正解$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 和$(x_1^*(t),x_2^*(t),y_1^*(t),y_2^*(t))$,若 $\lim\limits_{t\to+\infty}(|x_1(t)-x_1^*(t)|+|x_2(t)-x_2^*(t)|+|y_1(t)-y_1^*(t)|+|y_2(t)-y_2^*(t)|d)=0$,则称系统(1) 是全局稳定的.

**引理 1**[10] 若 $a>0,b>0,\dot{x}(t)\geq(b-a\,x(t))x(t)$,且 $x(0)>0$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\{x(t)\geq\frac{b}{a}$.

**引理 2**[10] 若 $a>0,b>0,\dot{x}(t)\leq(b-a\,x(t))x(t)$,且 $x(0)>0$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\{x(t)\leq\frac{b}{a}$.

**引理 3**[11] 若 $a>0,b>0,c>0,\dot{x}(t)=ax(t-\tau)-bx(t)-cx^2(t)$,且 $x(t)>0(-\tau\leq t\leq 0)$,(1) 如果$a>b$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\frac{a-b}{c}$;(2) 如果 $a<b$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

**引理 4**[12] 如果 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上非负且一致连续,$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$,那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

**引理 5** $\mathbf{R}_+^4$ 是系统(1) 满足条件(2) 的正向不变集.

**证明** 设$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统(1) 满足条件(2) 的任一解. 由(1) 的前两个方程和(2) 得:

$$x_1(t)=x_1(0)\exp(\int_0^t(r_1(s)-b_1(s)x_1(s)-e_1(t)x_2(t)-\frac{c_1(s)y_2(s)}{\alpha_1(s)+\beta_1(s)x_1(s)+\gamma_1(s)y_2(s)})\mathrm{d}s)>0,$$

$$x_2(t)=x_2(0)\exp(\int_0^t(r_2(s)-b_2(s)x_2(s)-e_2(t)x_1(t)-\frac{c_2(s)y_2(s)}{\alpha_2(s)+\beta_2(s)x_2(s)+\gamma_2(s)y_2(s)})\mathrm{d}s)>0.$$

结合(2) 可知,$x_1(t)>0,x_2(t)>0(t\geq-\tau)$.

当 $t\in[0,\tau]$ 时,$(t-\tau)\in[-\tau,0]$,则 $y_2(t-\tau)>0$. 由(1) 的第 4 个方程知,$\dot{y}_2\geq-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2^2(t)$,即 $y_2(t)\geq y_2(0)\exp\int_0^{\tau}\tau(-d_2(s)-b_3(s)y_2(s))\mathrm{d}s\}>0$. 故 $y_2(t)>0(t\in[0,\tau])$. 当 $t\in[\tau,2\tau]$ 时,$(t-\tau)\in[0,\tau]$,同理可证,$y_2(t)>0$.

依次类推,可证得 $y_2(t)>0(t\in[0,+\infty])$. 结合(2) 可知,$y_2(t)>0(t\geq-\tau)$. 由(3) 可知,$y_1(t)>0(t\geq-\tau)$. 故 满足条件(2) 的系统(1) 的任一解都为正,集合 $\mathbf{R}_+^4$ 是系统(1) 的正向不变集.

## 2 系统的持续生存

**定理 1** 设$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统(1) 满足初始条件(2) 的任一正解,若以下条件成立:

$$r_1^l>e_1^uM_2+\frac{c_1^u}{\beta_1^l},\ r_2^l>e_2^uM_1+\frac{c_2^u}{\beta_2^l},d_2^l<a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)+\frac{f_1^u}{\beta_1^l}+\frac{f_2^u}{\beta_2^l},\tag{4}$$

$$d_2^u<a_1^l\exp(-d_1^u\tau_1)+\frac{f_1^lm_1}{\alpha_1^u+\beta_1^uM_1+\gamma_1^uM_4}+\frac{f_2^lm_2}{\alpha_2^u+\beta_2^uM_2+\gamma u_2M_4},\tag{5}$$

则系统(1) 是持续生存的. 其中 $0<M_i^*<M_i,0<m_i<m_i^*(i=1,2,3,4)$.

$$M_1^*=\frac{r_1^u}{b_1^l},M_2^*=\frac{r_2^u}{b_2^l},M_4^*=\frac{a_1^u\beta_1^l\beta_2^l\exp(-d_1^l\tau_1)+f_1^u\beta_2^l+f_2^u\beta_1^l-d_2^l\beta_1^l\beta_2^l}{b_3^l\beta_1^l\beta_2^l},$$

$$m_1^*=\frac{r_1^l\beta_1^l-e_1^uM_2\beta_1^l-c_1^u}{b_1^u\beta_1^l},m_2^*=\frac{r_2^l\beta_2^l-e_2^uM_1\beta_2^l-c_2^u}{b_2^u\beta_2^l},$$

$$m_4^* = \frac{a_1^l\exp(-d_1^u\tau_1)-d_2^u}{b_3^u}+\frac{f_1^l m_1}{\alpha_1^u+\beta_1^u M_1+\gamma_1^u M_4)b_3^u}+\frac{f_2^l m_2}{(\alpha_2^u+\beta_2^u M_2+\gamma_2^u M_4)b_3^u}.$$

**证明**　系统(1) 的第 1,2,4 方程中，都不含有 $y_1(t)$ 项，因此，先研究以下模型：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)(r_1(t)-b_1(t)x_1(t)-e_1(t)x_2(t)-\dfrac{c_1(t))y_2(t)}{\alpha_1(t)+\beta_1(t)x_1(t)+\gamma_1(t)y_2(t)}),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)(r_2(t)-b_2(t)x_2(t)-e_2(t)x_1(t)-\dfrac{c_2(t))y_2(t)}{\alpha_2(t)+\beta_2(t)x_2(t)+\gamma_2(t)y_2(t)}),\\ \dot{y}_2(t)=a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)\mathrm{e}^{-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\theta)\mathrm{d}\theta}-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2^2(t)+\\ \dfrac{f_1(t)x_1(t-\tau_2)y_2(t)}{\alpha_1(t)+\beta_1(t)x_1(t-\tau_2)+\gamma_1(t)y_1(t-\tau_2)}+\dfrac{f_2(t)x_2(t-\tau_3)y_2(t)}{\alpha_2(t)+\beta_2(t)x_2(t-\tau_3)+\tau_2(t)y_2(t-\tau_3)}.\end{cases}\tag{6}$$

由(6) 的前两个方程，可得：

$$\dot{x}_1(t)\le x_1(t)(r_1^u-b_1^l x_1(t))=x_1(t)b_1^l(\frac{r_1^u}{b_1^l}-x_1(t))=x_1(t)b_1^l(M_1^*-x(t)),$$

$$\dot{x}_2(t)\le x_2(t)(r_2^u-b_2^l x_2(t))=x_2(t)b_2^l(\frac{r_2^u}{b_2^l}-x_2(t))=x_2(t)b_2^l(M_2^*-x(t)).$$

由引理 2 和 $0<M_i^*<M_i$ 可知，$\exists\, T_3=\max[T_1,T_2]>0$，使得当 $t>T_3$ 时，$x_1(t)<M_1$，$x_2(t)<M_2$.

由(6) 的第 3 个方程，可得：

$$\dot{y}_2(t)\le a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)y_2(t-\tau_1)-y_2(t)(d_2^l+b_3^l y_2(t)-\frac{f_1^u}{\beta_1^l}-\frac{f_2^u}{\beta_2^l}).$$

由比较定理、条件(4) 和引理 3，可得：$\limsup\limits_{t\to+\infty} y_2(t)\le M_4^*$，即 $\exists\, T_4>0$，使得当 $t>T_4$ 时，$y_2(t)<M_4$.

故 $\exists\, T=\max\{T_3,T_4\}>0$，使得当 $t>T$ 时，$x_1(t)<M_1$，$x_2(t)<M_2$，$y_2(t)<M_4$.

由(6) 的前两个方程，可得：

$$\dot{x}_1(t)\ge x_1(t)(r_1^l-b_1^u x_1(t)-e_1^u M_2-\frac{c_1^u}{\beta_1^l})=b_1^u x_1(t)(m_1^*-x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t)\ge x_2(t)(r_2^l-b_2^u x_2(t)-e_2^u M_1-\frac{c_2^u}{\beta_2^l})=b_2^u x_2(t)(m_2^*-x_2(t)).$$

由条件(5)，引理 2 和 $0<m_i<m_i^*$，可得：$\exists\, T_5=\max\{T_6,T_7\}>0$，使得当 $t>T_5$ 时，$x_1(t)>m_1$，$x_2(t)>m_2$.

由(6) 的第 3 个方程，可得：

$$\dot{y}_2(t)\ge a_1^l\exp(-d_1^u\tau_1)y_2(t-\tau_1)-y_2(t)(d_2^u+b_3^u y_2(t)-\frac{f_1^l m_1}{\alpha_1^u+\beta_1^u M_1+\gamma_1^u M_4}-\frac{f_2^l m_2}{\alpha_2^u+\beta_2^u M_2+\gamma_2^u M_4)}.$$

由比较定理、条件(6) 和引理 3，可得：$\liminf\limits_{t\to+\infty} y_2(t)\ge m_4^*$，即 $\exists\, T_8>0$，使得当 $t>T_8$ 时，$y_2(t)>m_4$. 由(2)，(3) 以及 $y_2(t)$ 的正有界性，可知，当 $t$ 充分大时，$\exists\, m_3>0, M_3>0$，使得，$m_3<y_1(t)<M_3$. 令 $D=\{(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))\mid m_1\le x_1(t)\le M_1, m_2\le x_2(t)\le M_2, m_3\le y_1(t)\le M_3, m_4\le y_2(t)\le M_4(m_i>0, M_i>0, i=1,2,3,4)\}$，则满足初始条件(2) 的系统(1) 的任一正解最终将停留在 $D$ 内，故系统(1) 的是持续生存的.

**定理 2**　设$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统(1) 满足初始条件(2) 的任一正解，若以下条件成立：

$$r_1^l>e_1^u M_2+\frac{c_1^u}{\beta_1^l},\ r_2^l>e_2^u M_1+\frac{c_2^u}{\beta_2^l},\ d_2^l>a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)+\frac{f_1^u}{\beta_1^l}+\frac{f_2^u}{\beta_2^l},$$

则食饵种群仍持续生存，但捕食者将灭绝.

**证明**　由定理 1 的证明可知：$\dot{y}_2(t)\le a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)y_2(t-\tau_1)-y_2(t)(d_2^l+b_3^l y_2(t)-\frac{f_1^u}{\beta_1^l}-\frac{f_2^u}{\beta^l})$，由引理(3)，知：$\limsup\limits_{t\to+\infty} y_2(t)\le 0$. 故 $M_4^*=0$，对于充分小的 $\forall\,\varepsilon>0$，当 $t$ 充分大时，$y_2(t)<\varepsilon$. 可令 $M_4=\varepsilon$.

通过定理 1 的证明，可知：当 $t$ 充分大时，$m_i<x_i(t)<M_i(i=1,2)$.

由(1)的第 4 个方程,可得:

$$\dot{y}_2(t) \geq a_1^l \exp(-d_1^u\tau_1)y_2(t-\tau_1) - y_2(t)(d_2^u + b_3^u y_2(t) - \frac{f_1^l m_1}{\alpha_1^u + \beta_1^u M_1 + \gamma_1^u \varepsilon} - \frac{f_2^l m_2}{\alpha_2^u + \beta_2^u M_2 + \gamma^u \varepsilon}).$$

由于 $d_2^l > a_1^u \exp(-d_1^l\tau_1) + \frac{f_1^u}{\beta_1^l} + \frac{f_2^u}{\beta_2^l}$,则 $d_2^u > a_1^l \exp(-d_1^u\tau_1) + \frac{f_1^l m_1}{\alpha_1^u + \beta_1^u M_1 + \gamma_1^u \varepsilon} + \frac{f_2^u m_2}{\alpha_2^u + \beta_2^u M_2 + \gamma_2^u \varepsilon}$. 由引理 1,引理 3 可知:$\liminf\limits_{t\to+\infty} y_2(t) \geq 0$. 由于 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y_2(t) \leq 0$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty} y_2(t)\} = 0$. 对(3)求极限,可知:$\lim\limits_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$. 故食饵种群持续生存,但捕食者将灭绝.

## 3 正周期解的全局稳定性

在这一部分中,假设系统(1)的所有系数是关于 $t$ 的 $\omega$ 周期的正的连续有界的周期函数,则系统(1)是 $\omega$ 周期系统.

**定理 3** 若满足初始条件(2)的周期系统(1)满足条件(4)、(5),则周期系统(1)至少存在一个正周期解.

**证明** 设 $Z(t,\phi) = (x_1(t,\phi_1), x_2(t,\phi_2), y_1(t,\phi_3), y_2(t,\phi_4))$ 是系统(1)满足条件(2)的任一正解. 通过定理 1 的证明可知,$D$ 是周期系统(1)的正不变集,且是 $\mathbf{R}_+^4$ 内的有界的、闭的凸子集.

定义 Poincare 映射 $P:\mathbf{R}_+^4 \to \mathbf{R}_+^4$,且 $P(\theta) = Z(\omega,\theta)$,则 $P(\phi) = Z(\omega,\phi)$.

由于 $D \subsetneq \mathbf{R}_+^4$,$D$ 是周期系统(1)正不变集,则 $P(D) \subseteq D$.

由解对初值的连续依赖性可知,$P:D \to D$ 是连续映射.

由 Brouwer 不动点定理知,至少存在一点 $z \in D$,使得 $Z(t,z)$ 是系统(1)的周期为 $\omega$ 的正周期解.

**定理 4** 若满足初始条件(2)的周期系统(1)满足条件(4)、(5)以及以下条件时:$A_i > 0$,$(i = 1,2,3)$ 其中

$$A_1 = b_1^l - e_2^u - \frac{c_1^u\beta_1^u M_4 + f_1^u\alpha_1^u + f_1^u\gamma_1^u M_4}{(\alpha_1^l + \beta_1^l m_1 + \gamma_1^l m_4)^2},\ A_2 = b_2^l - e_1^u - \frac{c_2^u\beta_2^u M_4 + f_2^u\alpha_2^u + f_2^u\gamma_2^u M_4}{(\alpha_2^l + \beta_2^l m_2 + \gamma_2^l m_4)^2},$$

$$A_3 = b_3^l - a_1^u - a_1^u(1+\frac{1}{m_4})\exp(-d_1^l\tau_1) - \frac{c_1^u\alpha_1^u + c_1^u\beta_1^u M_1 + f_1^u\gamma_1^u M_1}{(\alpha_1^l + \beta_1^l m_1 + \gamma_1^l m_4)^2} - \frac{c_2^u\alpha_2^u + c_2^u\beta_2^u M_2 + f_2^u\gamma_2^u M_2}{(\alpha_2^l + \beta_2^l m_2 + \gamma_2^l m_4)^2}.$$

且 $B_1 = a_1^u(1+\frac{1}{m_4})\exp(-d_1^l\tau_1)$,$B_2 = \frac{f_1^u\alpha_1^u + f_1^u\gamma_1^u M_4}{(\alpha_1^l + \beta_1^l m_1 + \gamma_1^l m_4)^2}$,$B_3 = \frac{f_1^u\gamma_1^u M_1}{(\alpha_1^l + \beta_1^l m_1 + \gamma_1^l m_4)^2}$,$B_4 = \frac{f_2^u\alpha_2^u + f_2^u\gamma_2^u M_4}{(\alpha_2^l + \beta_2^l m_2 + \gamma_2^l m_4)^2}$,$B_5 = \frac{f_2^u\gamma_2^u M_2}{(\alpha_2^l + \beta_2^l m_2 + \gamma_2^l m_4)^2}$. 则周期系统(1)是全局稳定的.

**证明** 设 $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ 是系统(1)满足初始条件(2)的任一正解,由定理 3,令 $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 是系统(1)满足初始条件(2)的正的周期解,且 $(x_1, x_2, y_1, y_2), (x^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \in D(t \geq 0)$.

设 $V(t) = |\ln x_1 - \ln x_1^*| + |\ln x_1 - \ln x_1^*| + |y_1 - y_1^*| + |\ln y_2 - \ln y_2^*| + B_1\int_{t-\tau_1}^t |y_2(s) - y_2^*(s)|\mathrm{d}s + B_2\int_{t-\tau_2}^t |x_1(s) - x_1^*(s)|\mathrm{d}s + B_3\int_{t-\tau_2}^t |y_2(s) - y_2^*(s)|\mathrm{d}s + B_4\int_{t-\tau_3}^t |x_2(s) - x_2^*(s)|\mathrm{d}s + B_5\int_{t-\tau_3}^t |y_2(s) - y_2^*(s)|\mathrm{d}s$. 显然,$V(t)$ 是正定函数.

结合系统(1),对 $V(t)$ 求导并利用不等式性质,整理可得:$D^+V(t) \leq -A_1|x_1 - x_1^*| - A_2|x_2 - x_2^*| - d_1^l|y_1 - y_1^*| - A_3|y_2 - y_2^*| - \frac{a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)}{m_4}|y_2(t-\tau_1) - y_2^*(t-\tau_1)| + D_1$.

当 $y_2 > y_2^*$ 时,$D_1 = a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^t d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)(\frac{y_2(t-\tau_1)}{y_2} - \frac{y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*}) < a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^t d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)\frac{y_2(t-\tau_1) - y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*}$;

当 $y_2 < y_2^*$ 时,$D_1 = a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^t d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)(\frac{y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*} - \frac{y_2(t-\tau_1)}{y_2}) < a_1(t-\tau_1)\exp(-$

$\int_{t-\tau_1}^{t} d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)\ \dfrac{y_2^*(t-\tau_1)-y_2(t-\tau_1)}{y_2}$. 故 $D_1 \leq \dfrac{a_1^u\exp(-d_1^l\tau_1)}{m_4} \mid y_2(t-\tau_1)-y_2^*(t-\tau_1)\mid$.

因此，$D^+V(t) \leq -A_1 \mid x_1-x_1^* \mid - A_2 \mid x_2-x_2^* \mid - d_1^l \mid y_1-y_1^* \mid - A_3 \mid y_2-y_2^* \mid$.

由于 $A_i>0(i=1,2,3)$，故 $\exists\lambda=\min\{A_1,A_2,A_3,d_1^l\}>0$，使得：

$$D^+V(t) \leq -\lambda(\mid x_1-x_1^*\mid + \mid x_2-x_2^*\mid + \mid y_1-y_1^*\mid + \mid y_2-y_2^*\mid).$$

对上式两边进行积分，整理可得：

$$\int_0^{+\infty}(\mid x_1-x_1^*\mid + \mid x_2-x_2^*\mid + \mid y_1-y_1^*\mid + \mid y_2-y_2^*\mid) \leq \frac{V(0)-V(+\infty)}{\lambda} \leq \frac{V(0)}{\lambda} < +\infty.$$

由解及解的导数的有界性可知，$\mid x_1-x_1^*\mid + \mid x_2-x_2^*\mid + \mid y_1-y_1^*\mid + \mid y_2-y_2^*\mid$ 是一致有界的. 由引理 4 知，$\lim\limits_{t\to+\infty}(\mid x_1-x_1^*\mid + \mid x_2-x_2^*\mid + \mid y_1-y_1^*\mid + \mid y_2-y_2^*\mid)=0$.

因此，周期系统(1) 的正周期解是全局稳定的.

## 4 举　例

通过上面的研究，如果周期系统(1) 的系数满足定理 4 的条件，则系统(1) 的正周期解是全局稳定的. 为了更加直接的说明正周期解的全局稳定性，给出以下例子：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_1(t)\Big(6+\cos(t)-3x_1(t)-\dfrac{1}{4}x_2(t)-\dfrac{(0.1+0.05\sin(t))y_2(t)}{\dfrac{2+\sin(t)}{18}+x_1(t)+\dfrac{1}{18}y_2(t)}\Big), \\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\Big(8+\sin(t)-3x_2(t)-\dfrac{1}{4}x_1(t)-\dfrac{(0.1+0.05\cos(t))y_2(t)}{\dfrac{2+\cos(t)}{18}+x_2(t)+\dfrac{1}{18}y_2(t)}\Big), \\ \dot{y}_1(t)=y_2(t)-y_1(t)-y_2(t-0.3)\exp(-0.3), \\ \dot{y}_2(t)=y_2(t-0.3)\exp(-0.3)(\mathrm{t})-0.1y_2(t)-5y_2^2(t)+\mathrm{I}+\mathrm{II}, \end{cases} \tag{7}$$

其中，

$$\mathrm{I}=\frac{(6+\sin(t))x_1(t-0.1)\times y_2(t)}{\dfrac{2+\sin(t)}{18}+x_1(t-0.1)+\dfrac{1}{18}y_2(t-0.1)},$$

$$\mathrm{II}=\frac{(6+\cos(t))x_2(t-0.2)\times y_2(t)}{\dfrac{2+\cos(t)}{18}+x_2(t-0.2)+\dfrac{1}{18}y_2(t-0.2)}.$$

验证可得，该系统的系数满足定理 4 的条件，取定初始条件 $x_1(0)=2,x_2(0)=2.5,y_1(0)=1,y_2(0)=2$，在此模型中，通过 MATLAB 可得相应的轨迹图，如图 1 所示.

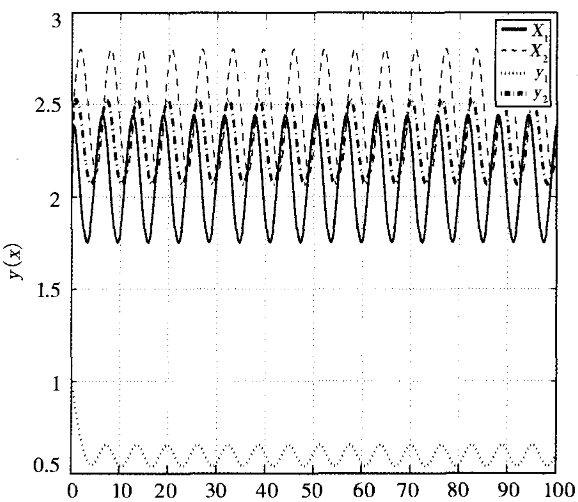

图1 系统(7)的全局稳定性

## 5 结束语

本文研究了一类具有 Beddington-DeAnglis 功能反应的非自治的 3 种群捕食系统，其中两类食饵种群具有竞争关系，捕食者具有时滞和阶段结构. 在文中的第 3 部分，得到了种群持续生存和捕食者灭绝的充分条件，因此只有当捕食者成年和幼年的种群密度达到一定程度时，才不会灭绝. 文中第 4 部分，通过 Brouwer 不动点定理，证明了周期系统的正周期解的存在性，通过 Lyapunov 函数的构造，获得了周期解的全局稳定性的充分条件，该条件与 $\tau_2,\tau_3$ 无关.

## 参 考 文 献

[1] 熊友兵.具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的时滞捕食者-食饵模型的周期解[J].天津工业大学学报,2007,26(3):81-85.

[2] 陈 婷,魏凤英.具年龄结构一捕食两竞争食饵生态系统的持久性[J].福建师范大学福清分校学报,2009(5):1-5.

[3] 王 烈,陈斯养,石 茂.带有 Beddington-DeAngelis 功能反应、脉冲、连续时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统的定性分析[J].工程数学学报,2011,28(3):323-334.

[4] 吴丽萍.一个具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的离散捕食者-食饵系统的持久性[J].北华大学学报,2013,14(6):626-630.

[5] 晋金才,窦霁虹,杨建飞.一类阶段结构和 B-D 功能性反应的三种群顺环捕食系统[J].商洛学院学报,2013,27(2):8-11.

[6] 陆地成,王 奇,张友梅.一类捕食-食饵系统的八个正周期解问题[J].佳木斯大学学报(自然科学版),2014,32(1):143-146.

[7] 徐昌进,姚凌云.具有 Beddington-DeAngelis 反应的食物链模型的渐近周期解[J].中北大学学报(自然科学版),2014,35(6):628-632.

[8] Zheng Xiuliang, Gao Yaping, Li Bol, et al. Study on A Non-Autonomous Predator-Prey Dispersion-Delay Model with Beddington-DeAngelis Functional Response[J].生物数学学报,2014,29(14):231-247.

[9] 张莉敏,郑宗剑.一类具有阶段结构和时滞的非自治捕食系统的持久性与周期性[J].北华大学学报(自然科学版),2015,16(2):145-149.

[10] 徐 瑞,陈兰荪.具有时滞和基于比率的三种群捕食系统的持久性与全局渐进稳定性[J].系统科学与数学,2001,21(2):204-212.

[11] 梁桂珍,李 坤.非自治的具有阶段结构和时滞的捕食系统的动力学行为(英)[J].数学杂志,2011,31(3):415-422.

[12] 田宝丹,王海玲.具有 Holling IV 类功能性反应的非自治扩散系统的持久生存[J].四川师范大学学报(自然科学版),2004,27(6):610-613.

# Stability Analysis of a Predator-Prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response

LIANG Guizhen[1], FENG Yingying[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453003, China;
2. College of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450000, China)

**Abstract**: In this paper, a predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response consisting of two competitive prey population and a stage structure and delays for predator has been investigated. According to the comparative principle, some sufficient conditions are obtained for permanence of the system and extinction of predator, and some sufficient conditions are gotted for existence and global stability of positive periodic solution when this system turns out to be a periodic system.

**Keywords**: stage structure; delay; competitive; persistence; Beddington-DeAngelis functional response