第 44 卷 第 2 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 44 No. 2
2016 年 3 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Mar. 2016

文章编号:1000－2367(2016)02－0029－05　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.02.005

偏缠绕模的 Maschke 型定理

郭双建[1]，董丽红[2]

(1. 贵州财经大学 数学与统计学院，贵阳 550025;2. 河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘　要:设(A,C,ψ)，(A', C',ψ')为两偏缠绕结构，给定$\alpha:A\to A'$和$\gamma:C\to C'$. 引入两个偏缠绕模范畴$\mathcal{M}(\psi)_A^C$和$\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{C'}$的导出函子$F$，并证明此导出函子$F$有右伴随函子:$G:\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{C'}\to\mathcal{M}(\psi)_A^C$. 最后，引入偏正规化余积分$\theta$:$C\to A\otimes A$的概念并证明了偏缠绕模范畴的 Maschke 型定理，也就是说，假设存在偏正规化余积分，给定$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中态射$f:M\to N$，则有当单(满)态射f看作C-余模态射可分裂时，必有单(满)态射f在$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中可分裂.

关键词:偏缠绕模;伴随函子;偏正规化余积分;Maschke 型定理

中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A

在本文中，假设k是一个域，有关 Hopf 代数以及范畴方面的内容可参见文献[1－3].

群的偏作用是由文献[4]在研究 Hilbert 空间上算子代数时引入的，偏群作用在研究 Hilbert 空间偏等距生成的C^*代数时是一个强有力的工具，此概念的发展经历了交叉积[5]和偏表示[6]的研究阶段，最终成为环论中一个独立的分支. 文献[7]借助偏缠绕结构的概念引入了偏 Hopf 作用. 决定函子是否可分是一个非常棘手的问题，常用的判别准则是 Refael 定理[8]. 给定一个缠绕结构(A,C,ψ)，自然得到缠绕模范畴$\mathcal{M}_A^C(\psi)$到右A-模范畴$\mathcal{M}_A(\psi)$间的忘却函子F，在讨论忘却函子F的可分性时，文献[9]引入A-积分概念，证明了A-积分的存在性是刻画忘却函子F是否可分的标准. 受文献[9]的启发，郭双建和王栓宏[10]对偏缠绕模进行了研究，刻画了忘却函子$F:\mathcal{M}_A^C(\psi)\to M_A(\psi)$的可分性. 继续对偏缠绕模进行研究，引入两个偏缠绕模范畴之间的导出函子，并证明此导出函子有右伴随函子. 最后，作为应用引入正规化余积分的概念，并证明了偏缠绕模范畴的 Maschke 型定理.

1. 预备知识

定义 1　设C为k上的余代数，A为k上的代数，设ψ为k-线性映射$\psi:C\otimes A\to A\otimes C$，满足下列条件:

1) 对任意的$a,b\in A$和$c\in C$，

$$(ab)_\varphi\otimes c^\varphi=a_\varphi b_{\varphi'}\otimes c^{\varphi\varphi'};$$

2) 对任意的$a\in A$和$d\in C$，

$$\alpha_\varphi 1_{A_\varphi}\otimes d^\varphi_(1)^\varphi\otimes d^\varphi(2)=a_{\psi\psi}\otimes d^\varphi_{(1)}\otimes d^\varphi_{(2)};$$

3) 对任意的$c\in C,a\in A$，

$$\varepsilon(c^\varphi)a_\varphi=\varepsilon(c)a.$$

则二元组(A,C,φ)称为右-右偏缠绕结构，记为$(A,C)_\varphi$. 映射ψ称为偏缠绕映射. 对任意的$c\in C$和$a\in A$，记$\psi(c\otimes a)=\sum a_\psi\otimes c^\psi$.

给定一个右-右偏缠绕结构$(A,C)_\psi$，则可以得到一个右$(A,C)_\psi$-模范畴$\mathcal{M}_A^C(\psi)$，称向量空间M为$\mathcal{M}_A^C(\psi)$

收稿日期:2015-03-17;**修回日期**:2015-12-27.

基金项目:国家自然科学基金(11371088);国家数学天元基金(11426073);河南省基础与前沿技术研究计划(152300410086);江苏省自然科学基金(BK2012736);贵州省科技厅基金项目(2014GZ81365).

第 1 作者简介(通信作者):郭双建(1981－)，男，山东菏泽人，贵州财经大学副教授，博士，主要从事 Hopf 代数和量子群的研究，E-mail:shuangjguo@gmail.com.

中的对象,如果存在结合 k- 线性映射 $\phi: M\otimes A\to M$ 和 k- 线性映射 $\rho^M: M\to \mathcal{M}\otimes C$(称为在 M 上的偏 C- 余作用)满足下列条件:

(C1)(M,ϕ) 是右 A- 模;

(C2) 对任意的 $m\in M$,

$$m_{[0][0]}\otimes m_{[0][1]}\otimes m_{[1]}=m_{[0]}\cdot 1_{A_{\varphi\varphi}}\otimes m_{[1](1)}{}^{\varphi}\otimes m_{[1](2)}{}^{\varphi};$$

(C3) 对任意的 $m\in M$ 和 $a\in A$,

$$\rho^M(m\cdot a)=m_{[0]}\cdot a_{\psi}\otimes m_{[1]}{}^{\psi},$$

(C4) 对任意的 $m\in M$,$\varepsilon(m_{[1]})m_{[0]}=m$.

采用下列符号:对任意的 $m\in M$,$\rho^M(m)=m_{[0]}\otimes m_{[1]}$. 在 $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ 中两个偏缠绕模 M 和 N 之间的同态 $f: M\to N$ 既是右 A- 线性映射又是右 C- 余线性映射,即满足:$f(m)_{[0]}\otimes f(m)_{[1]}=f(m_{[0]})\otimes m_{[1]}$.

定义 2 设 $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ 为两个范畴,$F: C\to D$ 为双函子. 注意到两个共变函子

$$\mathrm{Hom}_C(\cdot,\cdot): C^{op}\times C\to \underline{\mathrm{Sets}},\mathrm{Hom}_D(F(\cdot),F(\cdot)): C^{op}\times C\to \underline{\mathrm{Sets}}$$

和一个自然变换

$$\mathscr{F}:\mathrm{Hom}_C(\cdot,\cdot)\to \mathrm{Hom}_D(F(\cdot),F(\cdot)),$$

称 F 是可分的,如果 $\mathscr{F}$ 是可分裂的. 假设 $F: C\to D$ 存在右伴随函子 $G: D\to C$,设 $\eta: 1_C\to GF$,$\delta: FG\to 1_D$ 为 (F,G) 的单位与余单位.

Rafael's 定理 设 $G: D\to C$ 为 $F: C\to D$ 的右伴随函子. 则 F 是可分的当且仅当 η 可分裂的,也就是存在自然变换 $\upsilon: GF\to 1_C$ 使得 $\upsilon\circ\eta$ 为 C 上的恒等自然变换.

2 导出函子

定理 1 给定两个偏缠绕结构 (A,C,ψ) 和 (A',C',ψ'),假设存在线性映射 $\alpha: A\to A'$ 和 $\gamma: C\to C'$ 分别为代数和余代数同态,且满足:对任意的 $c\in C$,$a\in A$,

$$\alpha(a_{\psi})\otimes\gamma(c^{\psi})=\alpha(a)_{\psi'}\otimes\gamma(c)^{\psi'},\tag{1}$$

则定义函子 $F:\mathcal{M}(\psi)_A^C\to\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{C'}$ 如下:

$$F(M)=M\otimes_A A',$$

这里 A' 的左 A- 模是由 α 诱导出的,$F(M)$ 上的偏缠绕结构为:对任意的 $a',b'\in A'$,$m\in M$,

$$(m\otimes_A a')\cdot b'=m\otimes_A a'b',$$

$$\rho_{F(M)}(m\otimes_A a')=m_{[0]}\otimes_A a'_{\psi'}\otimes\gamma(m_{[1]})^{\psi'},$$

称函子 F 为导出函子.

证明 为了证明 $M\otimes_A A'$ 为 $M(\psi')_{A'}^{C'}$ 中的对象,只需证 $M\otimes_A A'$ 满足条件(C2) ~ (C4). 即注意到 $M\otimes_A A'$ 显然满足条件(C4). 下证 $M\otimes_A A'$ 满足(C2) 和(C3). 取 $m\in M$,$a',b'\in A'$,则有

$$\rho_{F(M)}((m\otimes_A a')\cdot b')=m_{[0]}\otimes_A(a'b')_{\psi'}\otimes\gamma(m_{[1]})^{\psi'}=m_{[0]}\otimes_A a'_{\psi'}b'_{\psi'}\otimes\gamma(m_{[1]})^{\psi'\varphi'}=$$
$$(m_{[0]}\otimes_A a'_{[0]})\cdot b'_{\varphi'}\otimes(\gamma(m_{[1]})\cdot a'_{[1]})^{\varphi'},$$

即(C3) 成立. 对于(C2),对任意 $m\in M$,$a'\in A'$,便有

$$\rho^2_{F(M)}(m\otimes_A a')=m_{[0][0]}\otimes_A a'_{\psi\varphi'}\otimes\gamma(m_{[0][1]})^{\varphi'}\otimes\gamma(m_{[1]})^{\psi'}=$$
$$m_{[0]}\cdot 1_{A_{\psi\varphi}}\otimes_A a'_{\psi'\varphi'}\otimes\gamma(m^{\varphi}_{[1]1})^{\varphi'}\otimes\gamma(m^{\psi}_{[1]2})^{\psi'}=$$
$$m_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_{\psi\varphi}})a'_{\psi'\varphi'}\otimes\gamma(m^{\varphi}_{[1]1})^{\varphi'}\otimes\gamma(m^{\psi}_{[1]2})^{\psi'}=$$
$$m_{[0]}\otimes_A 1_{A'_{\psi'\varphi'}}a'_{\psi'\varphi'}\otimes\gamma(m_{[1]1})^{\varphi'\varphi'}\otimes\gamma(m_{[1]2})^{\psi'\psi'}=$$
$$m_{[0]}\otimes_A a'_{\psi'\varphi'}\otimes\gamma(m_{[1]1})^{\varphi'}\otimes\gamma(m_{[1]2})^{\psi'}=$$
$$m_{[0]}\otimes_A a'_{\psi'}1_{A'_{\psi'\varphi'}}\otimes(\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_1{}^{\psi'}\otimes(\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_2{}^{\varphi'}=$$
$$(m_{[0]}\otimes_A a'_{\psi'})\cdot 1_{A'_{\psi'\varphi'}}\otimes(\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_1{}^{\psi'}\otimes(\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_2{}^{\varphi'}.$$

定理 2 如定理 1 假设,则导出函子 F 有右伴随函子:$G:\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{C'}\to\mathcal{M}(\psi)_A^C$ 定义如下:对任意 $M'\in\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{C'}$,

$$G(M')=\overline{M'\square_C C}=\{m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi\},$$

这里 $m'\otimes c\in M'\otimes C$ 满足下列条件：

$$m'_{[0]}\cdot\alpha(1_{A_{\psi_\varphi}})\otimes m'_{[1]}\otimes c^\varphi=m'\cdot\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes\gamma(c_1)^\psi\otimes c_2{}^\varphi.\tag{2}$$

$G(M')$ 上的结构映射为：对任意的 $a\in A,m'\in M',c\in C$，

$$\begin{cases}\rho_G(M')(m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi)=m'\cdot\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes c_1{}^\psi\otimes c_2{}^\psi,\\(m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi)\cdot a=m'\cdot\alpha(a_\psi)\otimes c^\psi.\end{cases}$$

证明　首先证明 $G(M')$ 为 $\mathscr{M}(\psi)_A^C$ 中的对象. 容易验证 $G(M')$ 为右 C- 余模. 为了证明 M 为右 A- 模，需要证明 $m'\cdot\alpha(a_\psi)\otimes c^\psi\in\overline{M'\square_C C},\forall a\in A$. 事实上，

$$\begin{aligned}&(m'\cdot\alpha(a_\psi))_{[0]}\cdot\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes(m'\cdot\alpha(a_\psi))_{[1]}{}^\psi\otimes c^{\psi\varphi}=\\&m'_{[0]}\cdot\alpha(a_\psi)_\psi(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes m'_{[1]}{}^{\psi\psi}\otimes c^{\psi\varphi}=\\&m'_{[0]}\cdot\alpha(a_{\varphi\psi})\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes m'_{[1]}{}^{\psi\psi}\otimes c^{\varphi\varphi}=\\&m'_{[0]}\cdot\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\alpha(a_{\varphi\psi})\otimes m'_{[1]}{}^{\psi\psi}\otimes c^{\varphi\varphi}=\\&m'\cdot\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\alpha(a_{\varphi\psi})\otimes\gamma(c_1)^{\psi\psi}\otimes c_2{}^{\varphi\varphi}=\\&m'\cdot\alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes\gamma(c_1)^\psi\otimes c_2{}^{\varphi\varphi}=\\&m'\cdot\alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_{\varphi\psi}})\otimes\gamma((c^\psi)_1)^\psi\otimes(c^\psi)_2{}^\varphi.\end{aligned}$$

接着证明 G 为 F 的右伴随. 取 $M\in\mathscr{M}(\psi)_A^C$，定义 $\eta_M:M\to GF(M)=\overline{(M\otimes_A A')\square_C C}$ 如下：对任意的 $m\in M$，

$$\eta_M(m)=m_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[1]}{}^\psi.$$

对任意的 $a\in A$，便有

$$\begin{aligned}&\eta_M(m\cdot a)=(m\cdot a)_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes(m\cdot a)_{[1]}{}^\psi=m_{[0]}\cdot a_\varphi\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[1]}{}^{\varphi\psi}=\\&m_{[0]}\otimes_A\alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[1]}{}^{\varphi\psi}=m_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\alpha(a_\varphi)\otimes m_{[1]}{}^{\varphi\psi}=\\&(m_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[1]}{}^\psi)\cdot a,\\&(\eta_M\otimes id_C)\circ\rho_M(m)=m_{[0][0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[0][1]}{}^\psi\otimes m_{[1]}=m_{[0]}\cdot 1'_{A_{\psi'}}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes\\&m_{[1]}1^{\psi'\psi}\otimes m_{[1]2}=m_{[0]}\otimes_A\alpha(1'_{A_{\psi'}}1_{A_{\psi'}})\otimes m_{[1]1}{}^{\psi'\psi}\otimes m_{[1]2}=\\&m_{[0]}\otimes_A\alpha(1_{A_\psi})\otimes m_{[1]1}{}^{\psi'\psi}\otimes m_{[1]2}=\rho_{GF(M)}\circ\eta_M(m).\end{aligned}$$

即证明了 $\eta_M\in\mathscr{M}(\psi)_A^C$.

取 $M'\in\mathscr{M}(\psi')_{A'}^{C'}$，定义 $\delta_{M'}:FG(M')\to M'$，这里

$$\delta_{M'}((m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi)\otimes_A a')=\varepsilon_C(c)m'\cdot a'.$$

注意到 $\delta_{M'}$ 是 A'- 线性的. 下面验证 δ_N 是 C'- 余线性的. 事实上，

$$\begin{aligned}&(\delta_{M'}\otimes id_{C'})\circ(\rho_{FG(M')})(m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi)\otimes_A a')=\delta_{M'}((m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c_1{}^\psi)\otimes_A a'_{\psi'})\otimes\\&\gamma(c_2{}^{\varphi\psi'})=m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})a'_{\psi'}\otimes\gamma(c^\psi)^{\psi'},\end{aligned}$$

把 $id_{M'}\otimes id_C\otimes\varepsilon_C$ 作用到等式(2)两边上，可得

$$\begin{aligned}&m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes\gamma(c^\psi)=\varepsilon(c)m'_{[0]}\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes m'_{[1]}{}^\psi=\\&\varepsilon(c)m'_{[0]}\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes m'_{[1]}{}^\psi,\end{aligned}$$

利用上面等式可以推出

$$\begin{aligned}&m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})a'_{\psi'}\otimes\gamma(c^\psi)^{\psi'}=\varepsilon(c)m'_{[0]}\cdot\beta(1_{A_\psi})a'_{\psi'}\otimes m'_{[1]}{}^{\psi\psi'}=\varepsilon(c)m'_{[0]}\cdot 1'_{A_{\psi'}}a'_{\varphi'}\otimes m'_{[1]}{}^{\psi'\varphi'}\\&=\varepsilon(c)m'_{[0]}\cdot a'_{\psi'}\otimes m'_{[1]}{}^{\psi'}=\rho_{M'}\circ\delta_{M'}((m'\cdot\alpha(1_{A_\psi})\otimes c^\psi)\otimes_A a'),\end{aligned}$$

常规计算可以证明 η,δ 均是自然变换，且满足如下关系

$$G(\delta_{M'})\cdot\eta_G(M')=I,\delta_{F(M)}\circ F(\eta_M)=I,$$

对所有的 $M\in\mathscr{M}(\psi)_A^C,M'\in\mathscr{M}(\psi')_{A'}^{C'}$.

注记 1　考虑偏缠绕结构 (k,C) 及同态 id_C 和 $\eta_A:k\to A'$. 则范畴 $\mathscr{M}(\psi)^C$ 是 C- 余模构成的范畴，导出函子 G 就是忘却函子. 由定理 2 可知，$F(M')=M'\otimes A$ 其上的偏缠绕模结构为：对任意的 $a\in A',M'\in\mathscr{M}(\psi)^C$，

$$(m\otimes a')\cdot b'=m\otimes a'b',$$

$$\rho_{F(M)}(m \otimes a') = m_{[0]} \otimes a'_{\psi} \otimes m^{\psi}_{[1]}.$$

注记 2 考虑偏缠绕结构(A,k)及同态id_A和$\varepsilon_C:C \to k$.则范畴$\mathcal{M}(\psi)_A$是A-模构成的范畴,导出函子F就是忘却函子.由定理2可知,$G(M') = \overline{M' \otimes C} = \{m' \cdot 1_{A_\psi} \otimes c^{\psi}\}$其上的偏缠绕模结构为:对任意的$a \in A, M' \in \mathcal{M}(\psi)_A$,

$$\rho_G(M')(m' \cdot 1_{A_\psi} \otimes c^{\psi}) = m' \cdot 1_{A_{\varphi\psi}} \otimes c_1{}^{\varphi} \otimes c_2{}^{\psi},$$
$$(m' \cdot 1_{A_\psi} c^{\psi}) \cdot a = m' \cdot a_{\psi} \otimes c^{\psi}.$$

定义 3 设$(A,C)_\psi$是偏缠绕结构.k-线性映射

$$\theta: C \to A \otimes A,$$

称为偏正规化余积分,如果θ满足下列条件(其中$\theta(c) = \theta^1(c) \otimes \theta^2(c) \in A \otimes A$):

1) 对任意的$c \in C$和$a \in A$,

$$\theta^1(c) \otimes \theta^2(c) a = a_{\psi} \theta^1(c^{\psi}) \otimes \theta^2(c^{\psi});$$

2) 对任意的$c \in C$,

$$\theta^1(c)\theta^2(c) = \varepsilon(c)1_A;$$

3) 对任意的$c \in C$,

$$1_{A_{\psi\psi}}\theta^1(c_{(1)}{}^{\psi}) \otimes \theta^2(c_{(1)}{}^{\psi}) \otimes c_{(2)}{}^{\psi} = 1_{A_{\psi\psi}}\theta^1(c_{(2)}{}^{\psi})_{\psi} \otimes \theta^2(c_{(2)}{}^{\psi})_{\psi} \otimes c_{(1)}{}^{\psi\psi\psi}.$$

引理 1 设$(A,C)_\psi$是偏缠绕结构,$M,N \in \mathcal{M}_A^C(\cdot)$.设$M,N \in \mathcal{M}_A^C(\psi)$,$g \in \mathrm{Hom}^C(N,M)$,假设存在偏正规化余积分$\theta: C \to A \otimes A$.则$\hat{g}$是范畴$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中的态射,其中

$$\hat{g}: N \to M, \hat{g}(n) = g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}).$$

证明 欲证$\hat{g}$是右A-模同态,对任意的$n \in N$和$a \in A$,可得

$$\hat{g}(n \cdot a) = g((n_{[0]} \cdot a_{\psi}) \cdot \theta^1(n^{\psi}_{[1]})) \cdot \theta^2(n^{\psi}_{[1]}) =$$
$$g((n_{[0]}) \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}) \cdot a = \hat{g}(n) \cdot a.$$

对任意的$n \in N$,可得

$$\rho \circ \hat{g}(n) = \rho(g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]})) = g(n_{[0]} \cdot$$
$$\theta^1(n_{[1]}))_{[0]} \cdot \theta^2(n_{[1]})_{\psi} \otimes g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]}))^{\psi}_{[1]} = g(n_{[0][0]} \cdot$$
$$\theta^1(n_{[1]})_{\psi}) \cdot \theta^2(n_{[1]})_{\psi} \otimes n_{[0][1]})^{\psi\varphi} = g(n_{[0]} \cdot 1_{A_{\varphi\psi}}\theta^1(n^{\varphi}_{[1](2)})_{\psi}) \cdot$$
$$\theta^2(n^{\varphi}_{[1](2)})_{\psi} \otimes n_{[1](1)})^{\psi\varphi\varphi} = g(n_{[0]} \cdot 1_{A_{\varphi\varphi}}\theta^1(n^{\varphi}_{[1](1)})) \cdot$$
$$\theta^2(\theta^1(n_{[1](1)}{}^{\varphi})) \otimes n_{[1](2)}{}^{\varphi} = g(n_{[0][0]} \cdot \theta^1(n_{[0][1]})) \cdot$$
$$\theta^2(n_{[0][1]}) \otimes n_{[1]} = (\hat{g} \otimes id_C) \circ (n),$$

于是$\hat{g}$是右C-余线性的.

定理 3 设$(A,C)_\psi$是偏缠绕结构,$M,N \in \mathcal{M}_A^C(\psi)$.假设存在偏正规化余积分$\theta: C \to A \otimes A$.给定$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中态射$f: M \to N$,则有

1) 当单态射f看作C-余模态射可分裂时,必有单态射f在$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中可分裂;

2) 当满态射f看作C-余模态射可分裂时,必有满态射f在$\mathcal{M}_A^C(\psi)$中可分裂.

证明 已知单态射f看作C-余模态射可分裂的,存在f看作C-余模态射$g: N \to M$满足$g \circ f = id_M$,定义k-线性映射$\hat{g}: N \to M$如下:

$$\hat{g}g(n) = g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}).$$

由引理1可知$\hat{g}$是右A-线性的和右C-余线性,对任意的$m \in M$,可得

$$\hat{g} \circ f(m) = \hat{g}(f(m)) = g(f(m)_{[0]} \cdot \theta^1(f(m)_{[1]})) \cdot \theta^2(f(m)_{[1]}) =$$
$$g(f(m_{[0]}) \cdot \theta^1(m_{[1]})) \cdot \theta^2(m_{[1]}) = m_{[0]} \cdot \theta^1(m_{[1]})) \cdot \theta^2(m_{[1]}) = m.$$

于是$\hat{g} \circ f = id_M$.

2) 已知满态射f作为C-余模态射可分裂的,存在C余模态射$g: N \to M$满足$f \circ g = id_N$,定义k-线性映射如上,由引理1可知$\hat{g}$是右A-线性的和右C-余线性,对任意的$n \in N$,可得

$$f \circ \hat{g}(n) = f(g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]})) = (n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}) = n.$$

参　考　文　献

[1] Sweedler M E. Hopf Algebras [M]. New York: Benjamin, 1969.

[2] Caenepeel S, Militaru G, Zhu S L. A Maschke type theorem for Doi-Hopf modules and applications [J]. J Algebra, 1997, 187: 388-412.

[3] Caenepeel S, Militaru G, Zhu S L. Frobenius and Separable Functorsfor Generalized Module Categories and Nonlinear Equations [M]. Berlin: Springer Verlag, 2002.

[4] Exel R. Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences[J]. J Funct Anal, 1994, 122: 361-401.

[5] Dokuchaev M, Exel R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations[J]. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 1931-1952.

[6] Dokuchaev M, Ferrero M, Paques A. Partial actions and Galois theory[J]. J Pure Appl Algebra, 2007, 208: 77-87.

[7] Caenepeel S, Janssen K. Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory[J]. Comm Algebra, 2008, 36: 2923-2946.

[8] Rafael M D. Separable functors revised [J]. Comm Algebra, 1990, 18: 1445-1459.

[9] Brezi'nski T. Frobenius properties and Maschke-type theorems for entwinedmodules [J]. P Am Math Soc, 1999, 128(8): 2261-2270.

[10] Guo S J, Wang S H. Separable functors for the category of partial entwined modules[J]. J Algebra Appl, 2012, 11(5): 1250101.

A Maschke Type Theorem of Partial Entwined Modules

GUO Shuangjian[1], DONG Lihong[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Let (A, C, ψ), (A', C', ψ') be two partial entwining structures. Given $\alpha: A \to A'$ and $\gamma: C \to C'$, we define an induction functor F between the category $\mathscr{M}(\psi')_A^C$ of all partial entwined modules and the category $\mathscr{M}(\psi')_{A'}^{C'}$, and we prove that this functor has a right adjoint $G: \mathscr{M}(\psi')_{A'}^{C'} \to \mathscr{M}(\psi)_A^C$. Finally, we introduce the definition of partial conormalized cointegral θ: $C \to A \otimes A$ and prove a Maschke type theorem for the category of partial entwined modules, that is, suppose that there exists a partial normalized cointegral. Then $f: M \to N$ in $\mathscr{M}_A^C(\psi)$ has a section(respectively, retraction) if f has a section(respectively, retraction) as a C-comodule morphism.

Keywords: partial entwined modules; adjoint functor; partial normalized cointegral; Maschke type theorem