

# 4 阶导数修正全息超导体

吴健聘, 徐百成, 付国杨

(渤海大学 数理学院, 辽宁 锦州 121013)

**摘要:**构建了一个 4 阶导数引力框架下的全息超导体模型.主要研究了凝聚态形成,临界温度  $T_c$  及超导能隙  $\omega_g/T_c$  的变化规律.研究表明,高斯-博内(Gauss-Bonnet,GB)耦合阻碍凝聚的形成,促使超导能隙变大;而外尔耦合项可以使得超导能隙从接近 BCS 理论的  $\frac{\omega_g}{T_c} \approx 3.5$  到大于标准全息超导的  $\frac{\omega_g}{T_c} \approx 8$  变化.4 阶导数引力框架下的全息超导体模型给出了更丰富的物理图像,有助于研究全息对偶系统.

**关键词:** AdS/CFT 对偶; GB 引力; 黑洞; 外尔修正

**中图分类号:** O413

**文献标志码:** A

强耦合系统是凝聚态物理的一个困难问题.传统的微扰论在处理强耦合系统时,通常失效. AdS/CFT 对偶作为一种强弱耦合的对偶,为研究强耦合系统提供了一个强有力的工具.具体而言, AdS/CFT 对偶指的是:  $d$  维反德西特(anti-de Sitter, AdS)时空中的引力理论对偶于边界上  $d-1$  维时空的量子场论<sup>[1-4]</sup>.利用 AdS/CFT 对偶,可以通过研究 bulk 经典引力理论来研究强相互作用的量子场论.全息超导体的构建是 AdS/CFT 对偶在凝聚态物理中一个重要的应用<sup>[5-6]</sup>.首个全息超导模型由 Hartnoll, Herzog 和 Horowitz 提出<sup>[7]</sup>.他们在史瓦西黑洞背景时空加了一个与麦克斯韦场耦合的探测复标量场.该耦合项导致黑洞的不稳定,在低温时形成一个带有标量毛的黑洞.该带毛黑洞对偶于边界理论的超导相变.通过电导率的研究发现,全息超导模型的能隙  $\omega_g/T_c$  约为 8<sup>[8]</sup>,和某些高温超导材料的结果比较接近<sup>[5-6,9]</sup>,比 BCS 理论<sup>[10]</sup>给出的 3.5 要大.这也是强耦合系统的结果.

在弦理论得到全面理解之前,非常有必要考虑有效引力理论的框架下考虑高曲率(或高导数)作用项.从 AdS/CFT 的观点看,引力理论的高曲率相互作用对应于规范理论的有限耦合修正,从而可以研究一大类的全息对偶场论.高斯-博内(Gauss-Bonnet,GB)引力是比较简单的高阶导数引力理论,其仅仅包含曲率平方的作用项.在 GB 引力的框架下,多个全息超导模型已经构建,其性质也得到深入研究<sup>[11-20]</sup>.研究表明,GB 耦合参数  $\alpha$  会影响临界温度,当  $\alpha$  增大时,临界温度随之减小,反之亦然.直到 GB 参数  $\alpha$  达到陈西蒙斯极限时临界温度最低.这也表明随着  $\alpha$  的增加,黑洞形成凝聚也更加困难.此外 GB 全息超导体的超导能隙要比标准的全息超导模型大,并随着 GB 耦合参数变化.另一高阶导数修正的全息超导体模型是引入外尔项<sup>[21-23]</sup>.具体而言是外尔张量和麦克斯韦场耦合.研究表明,外尔修正全息超导体能隙也随着耦合参数的变化而跑动.和 GB 全息超导比较,超导能隙可以小于标准全息超导的能隙,而接近 BCS 理论给出的值.

本文构建 GB 引力框架下外尔修正全息超导模型,并研究其电导率.本文主要结构如下:首先构建带有外尔修正的 GB 全息超导模型,其次通过数值计算给出凝聚图和临界温度.最后给出电导率  $\sigma$  和在不同的 GB 参数  $\alpha$  和外尔参数  $\gamma$  的情况下的能隙值.

## 1 4 阶全息超导体

本节构建一个 5 维的 4 阶导数框架下的全息超导模型.背景解作用量考虑到平方曲率项,称为 GB 引力,

收稿日期:2018-04-02;修回日期:2018-04-19.

基金项目:国家自然科学基金(11705161);辽宁省自然科学基金(201602013).

作者简介(通信作者):吴健聘(1978-),男,广东台山,渤海大学教授,博士,研究方向为引力与相对论天体物理,  
E-mail: jianpinwu@mail.bnu.edu.cn.

其作用量

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left( R + \frac{12}{L^2} + \frac{\alpha L^2}{2} (R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \right). \quad (1)$$

$\alpha$  为 GB 参数,无量纲. $L$  为 AdS 半径, $-6L^{-2}$  为负宇宙学常数, $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ , $R_{\mu\nu}$  和  $R$  分别为黎曼曲率张量,里奇张量和里奇标量为度规的一阶导数,故作用量(1)的高阶修正考虑到 4 阶导数项.作用量(1)可以给出如下的中性 GB 黑洞解<sup>[24]</sup>

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{L^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

其中  $f(r) = \frac{r^2}{2\alpha L^2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha \left( 1 - \frac{r_H^4}{r^4} \right)} \right)$ ,  $r_H$  为黑洞视界半径.为了避免裸奇点,要求  $0 \leq \alpha \leq 1/4$ <sup>[25]</sup>.在渐

近无穷远处,即  $r \rightarrow \infty$  时,有  $f(r) \approx \frac{r^2}{2\alpha L^2} (1 - \sqrt{1 - 4\alpha})$ .因此,可定义有效的 AdS 时空半径为  $L_{\text{eff}}^2 =$

$\frac{2\alpha L^2}{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}$ .从而在渐进无穷远处, $f(r)$  可以写为  $f(r) = \frac{r^2}{L_{\text{eff}}^2}$ .黑洞的霍金温度为  $T = \frac{1}{4\pi} f'(r) |_{r=r_H} = \frac{r_H}{\pi L^2}$ .

通过标度变换  $r \rightarrow r_H r$ ,  $(t, x^i) \rightarrow \frac{L^2}{r_H} A_t, A_i \rightarrow \frac{r_H}{L^2} A_i$ ,可以设  $r_H = L = 1$ .在 GB 黑洞背景下,加入探测复标量场、

$U(1)$  规范场以及外尔张量和麦克斯韦耦合项<sup>[7-8,21]</sup>,其作用量为

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left( -|\nabla\psi - iA\psi|^2 - m^2 |\psi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \gamma C_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} \right), \quad (2)$$

其中  $F_{\mu\nu}$  为麦克斯韦场的场强,可表示为  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . $C_{\mu\nu\sigma\rho}$  为外尔张量.采用设定  $A_\mu = (\varphi(r), 0, 0, 0, 0)$  和  $\psi = \psi(r)$ .由于外尔张量是度规的二阶导数项,而麦克斯韦场是  $U(1)$  规范场的一阶导数项,所以上面作用量中的外尔张量和麦克斯韦的耦合项是 4 阶导数项.因此,本文所研究的 GB 引力框架下的外尔修正的全息超导体模型也称为 4 阶导数全息超导体.在 GB-AdS 黑洞背景中, $\gamma$  的范围原则上需要重新确定,将在另一工作中研究此问题.本文仅考虑  $\gamma$  较小的情况.利用变分原理,可以给出运动方程

$$\psi''(r) + \left( \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{3}{r} \right) \psi'(r) + \left( \frac{\varphi(r)^2}{f(r)^2} - \frac{m^2}{f(r)} \right) \psi(r) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi''(r) + \left( \frac{r(r(2\gamma r f^{(3)}(r) + f''(r)) + 3) - 4\gamma f'(r) + 4\gamma f(r)}{r(r(2\gamma r f''(r) - 4\gamma f'(r) + r) + 4\gamma f(r))} \right) \varphi'(r) - \left( \frac{2r^2 \psi(r)^2}{f(r)(r(2\gamma r f''(r) - 4\gamma f'(r) + r) + 4\gamma f(r))} \right) \varphi(r) = 0. \quad (4)$$

接下来将数值求解上述运动方程,研究超导相变.

## 2 凝 聚

取  $m^2 = -3$ .为解(3)(4)这两个耦合的非线性微分方程组,需要在视界处( $r \rightarrow r_H$ )及边界处( $r \rightarrow \infty$ )给出方程的边界条件<sup>[26]</sup>.视界处  $\varphi(r_H) = 0, f'(r_H) \psi'(r_H) = m^2 \psi(r_H)$ ;边界处  $\varphi(r) = \mu - \frac{\rho}{r^2}, \psi = \frac{\psi_-}{r^{\lambda_-}} + \frac{\psi_+}{r^{\lambda_+}}$ ,其

中  $\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 \left( \frac{L_{\text{eff}}}{L} \right)^2}$ . $\mu, \rho$  分别为对偶边界场论的化学势和电荷密度.根据 AdS/CFT 对偶词典可知,

bulk 时空中的标量场  $\psi$  对偶于边界理论上的凝聚算符  $\langle O \rangle$ .根据 Breitenlohner-Freedman 稳定性条件可知<sup>[27]</sup>,存在两种量子化方案.在此,选择标准量子化方案,即  $\psi_-$  为源,而  $\psi_+$  为凝聚算符的真空期待值,记为  $\langle O_+ \rangle = \psi_+$ .由于考虑无源的凝聚相变,所以设  $\psi_- = 0$ .数值解运动方程(3)和(4),根据对偶词典,得到凝聚图的临界温度(见表 1 和图 1).

凝聚的形成及临界温度的变化规律总结如下:

1) 固定外尔耦合参数,随着 GB 耦合参数  $\alpha$  的增大,临界温度减小,凝聚的形成变得困难.但在允许的参

数范围内,4 阶导数项并没有破坏凝聚的形成.这与文献[28]的结论一致.

2)固定 GB 参数,当  $\gamma > 0$  时,临界温度变大,凝聚容易形成;而  $\gamma < 0$  时,临界温度变小,凝聚形成变得困难.这与之前<sup>[22]</sup>的观察是一致的,也反映了随着  $\gamma$  的变化,对偶场论的耦合强度的变化.

表 1 临界温度

$\gamma$	$T_c \rho^{-1/3}$			
	$\alpha=0$	$\alpha=0.000\ 1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$
1/48	0.220 579	0.220 562	0.203 341	0.182 328
0	0.197 969	0.197 958	0.186 116	0.171 055
-1/48	0.185 021	0.185 011	0.174 776	0.162 450

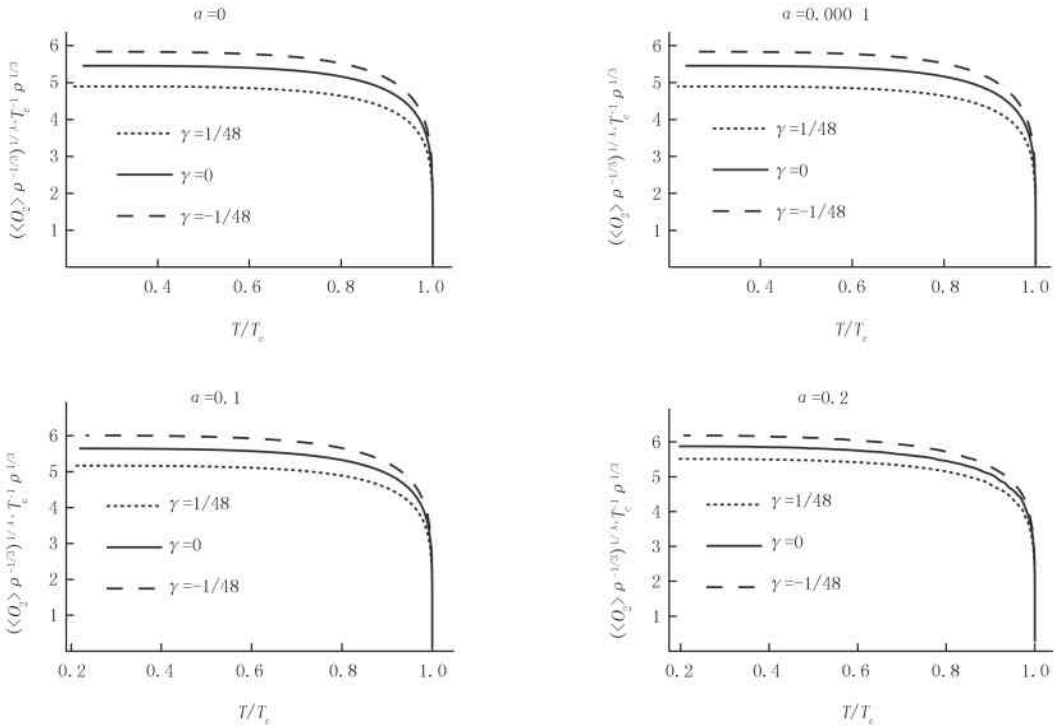


图 1 全息超导凝聚图

### 3 电导率

首先,打开沿  $x$  方向的规范场的扰动  $A_x$ ,做傅里叶变换, $A_k(t, r, x) = A_x(r) e^{ikx - i\omega t}$ .考虑零动量的情况,可导出规范场扰动方程为

$$\begin{aligned}
 Ax''(x) + & \left( \frac{r^2 f'(r)(r(2\gamma f''(r) - 3) - 4\gamma f'(r))}{rf(r)(r(r(2\gamma f''(r) - 3) - 4\gamma f'(r)) + 4\gamma f(r))} \right) Ax'(r) + \\
 & \left( \frac{rf(r)(8\gamma f'(r) + r(2\gamma r f^{(3)}(r) - 2\gamma f''(r) - 3)) - 4\gamma f(r)^2}{rf(r)(r(r(2\gamma f''(r) - 3) - 4\gamma f'(r)) + 4\gamma f(r))} \right) Ax'(r) + \\
 & \left( \frac{r\omega^2(r(2\gamma f''(r) - 3) - 4\gamma f'(r)) + f(r)(4\gamma\omega^2 + 6r^2\psi(r)^2)}{f(r)^2(r(r(2\gamma f''(r) - 3) - 4\gamma f'(r)) + 4\gamma f(r))} \right) Ax(r) = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

求解方程(5)需要给定边界条件.

$$\text{视界处 } A(r) \sim f(r)^{-\frac{\omega}{4r_H}};$$

$$\text{边界处 } A(r) \sim A^{(0)} + \frac{A^{(2)}}{r^2} + \frac{A^{(0)}(\omega^2 - k^2)L_{\text{eff}}^2 \ln(\Delta r)}{2r^2} + \dots, \tag{6}$$

其中  $A^{(0)}$ ,  $A^{(2)}$  以及  $\Delta$  为积分常数.根据 AdS/CFT 对偶词典给出,规范场  $A_\mu$  对偶于边界场论中的 4 维流

$J_\mu$ . 由于线性响应理论, 电导率<sup>[8]</sup>

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{i\omega} G^R(\omega, k=0), \tag{7}$$

其中  $G^R$  为延迟格林函数, 通过 AdS/CFT 对偶可以给出其表达式<sup>[26]</sup>

$$G^R = -\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) r A A'. \tag{8}$$

将(6)式代入(8)式, 得到格林函数

$$G^R(\omega) = 2 \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} + \omega^2 \left( \ln(\Delta r) - \frac{1}{2} \right).$$

因为对数项将会导致格林函数发散, 故需要对其进行全息重整化去掉发散项<sup>[29]</sup>. 再通过加入抵消项  $\ln(\Delta r)$  后, 延迟格林函数可以被重写为

$$G^R(\omega) = 2 \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} - \frac{\omega^2}{2}.$$

因此, 电导率的表达式为

$$\sigma(\omega) = -\frac{iA^{(2)}}{\omega A^{(0)}} + \frac{i\omega}{2}.$$

通过数值计算可以给出电导率如图 2 和图 3 所示. 4 阶导数全息超导电性的特点总结如下:

- 1) 电导率虚部在零频处发散. 根据 Kramers-Kronig 关系, 电导率实部在零频时存在一个  $\delta$  函数, 这是典型的超导行为.
- 2) 超导电能随着耦合参数跑动. GB 耦合强度使得能隙增大; 而外尔耦合参数为负的时候, 能隙增大; 但正的时候, 能隙减小, 接近弱耦合 BCS 理论的能隙值.

表 2 能隙值

$\gamma$	$\omega_g/T_c$			
	$\alpha=0$	$\alpha=0.0001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$
1/48	6.911	6.911	8.182	10.351
0	7.764	7.764	8.873	10.902
-1/48	8.239	8.239	9.381	11.482

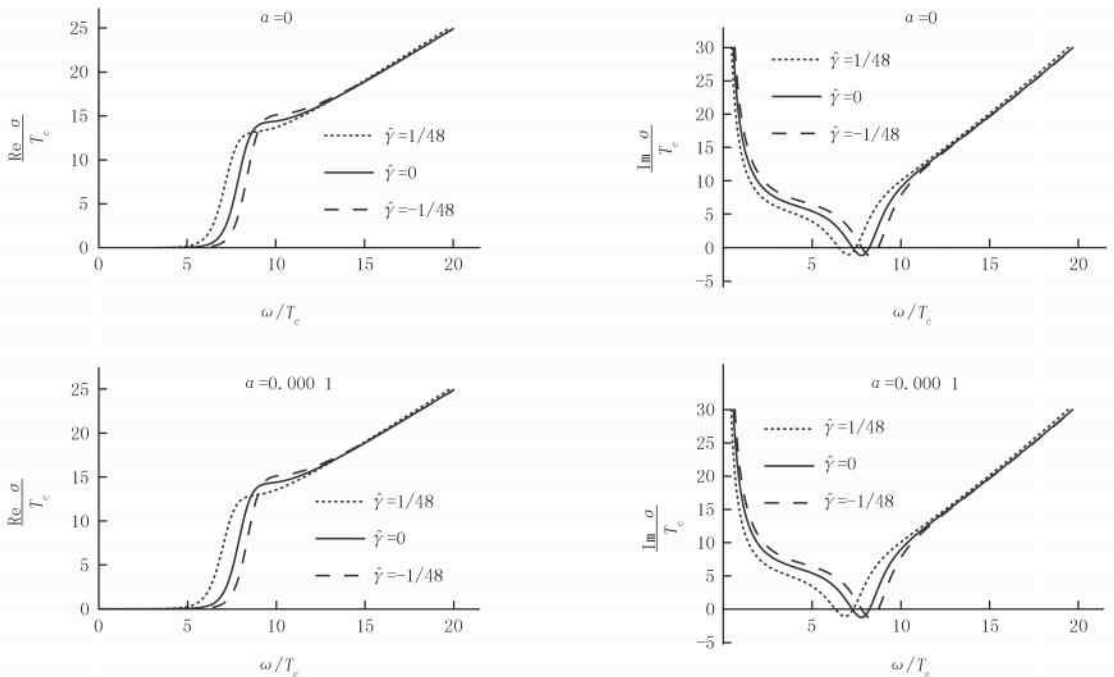
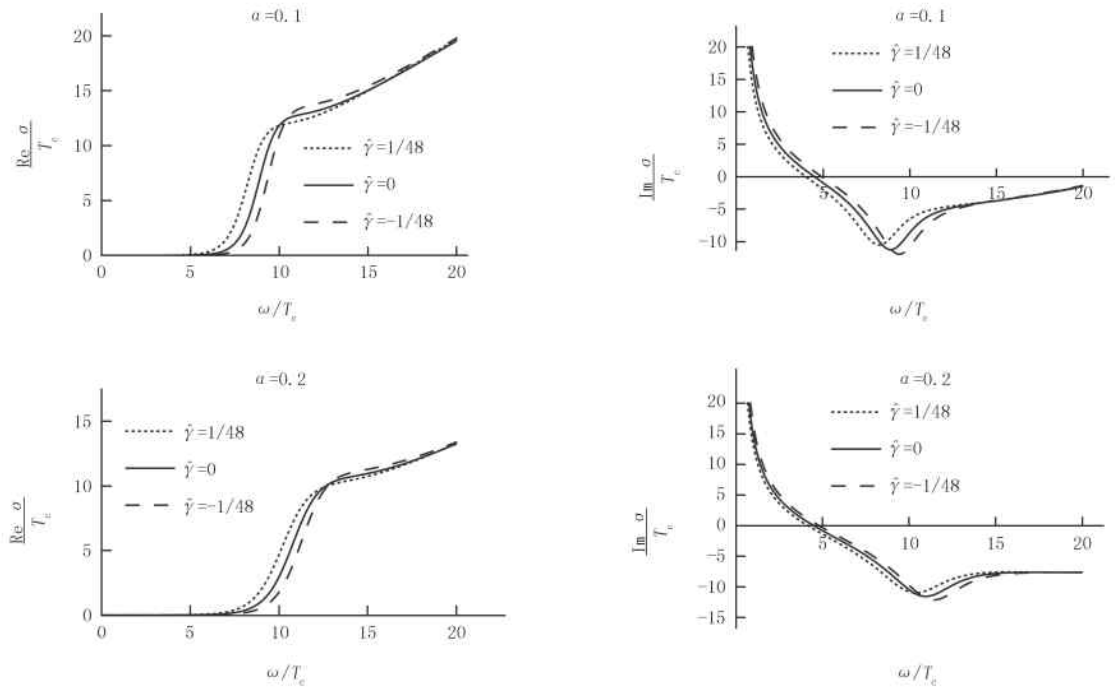


图 2 电导率 ( $T=0.4T_c$ ,  $a$  较小)

图 3 电导率 ( $T=0.4T_c$ ,  $a$  较大)

## 4 结 论

本文构建了一个 4 阶导数引力框架下的全息超导体模型.该模型背景几何为 GB-AdS 黑洞,然后加上探测的复标量场, $U(1)$ 规范场及外尔修正项.主要研究了凝聚态形成,临界温度及超导能隙的变化规律.研究结果表明:GB 耦合阻碍凝聚的形成,促使超导能隙变大;而外尔耦合项可以使得超导能隙从接近 BCS 理论的  $\omega_g/T_c \approx 3.5$  到大于标准全息超导的  $\omega_g/T_c \approx 8$  变化.

## 参 考 文 献

- [1] MALDACENA J. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1999, 38(4): 1113-1133.
- [2] GUBSER S S, KLEBANOV I R, POLYAKOV A M. Gauge theory correlators from non-critical string theory[J]. Physics Letters B, 1998, 428(1/2): 105-114.
- [3] WITTEN E. Anti-de Sitter space and holography[J]. Advances in Theoretical & Mathematical Physics, 1998, 2(2): 253-291.
- [4] AHARONY O, GUBSER S S, MALDACENA J, et al. Large N Field Theories, String Theory and Gravity[J]. Physics Reports, 1999, 323(3/4): 183-386.
- [5] HARTNOLL S A. Lectures on holographic methods for condensed matter physics[J]. Classical & Quantum Gravity, 2009, 26(22): 1913-1941.
- [6] HERZOG C P. Lectures on holographic superfluidity and superconductivity[J]. Journal of Physics A Mathematical & Theoretical, 2009, 42(34): 343001.
- [7] HARTNOLL S A, HERZOG C P, HOROWITZ G T. Building an AdS/CFT superconductor[J]. Physics, 2008, 59(10): 1750-1753.
- [8] HOROWITZ G T, ROBERTS M M. Holographic Superconductors with Various Condensates[J]. Physical Review D, 2008, 78(12): 2008.
- [9] HOROWITZ G T. Introduction to Holographic Superconductors[J]. Lecture Notes in Physics, 2010, 828: 313-347.
- [10] BARDEEN J, COOPER L N, SCHRIEFFER J R. Microscopic Theory of Superconductivity[M]// Fundamentals of the Physics of Solids. Berlin: Springer, 2010: 162-164.
- [11] GREGORY R, KANNO S, SODA J. Holographic Superconductors with Higher Curvature Corrections[J]. Journal of High Energy Physics, 2009, 2009(10): 1401-1407.
- [12] PAN Q, JING J, WANG B. Analytical investigation of the phase transition between holographic insulator and superconductor in Gauss-Bonnet gravity[J]. Journal of High Energy Physics, 2011, 2011(11): 1-17.

- [13] BARCLAY L, GREGORY R, KANNO S, et al. Gauss-Bonnet holographic superconductors[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2010, 2010(12): 1-18.
- [14] KUANG X M, LI W J, LING Y. Holographic superconductors in quasi-topological gravity[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2010, 2010(12): 69.
- [15] SIANI M. Holographic superconductors and higher curvature corrections[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2010, 2010(12): 1-16.
- [16] CAI R G, NIE Z Y, ZHANG H Q. Holographic p-wave superconductors from Gauss-Bonnet gravity[J]. *Physical Review D*, 2010, 82(6): 2611-2619.
- [17] BRIHAYE Y, HARTMANN B. Holographic Superconductors in 3+1 dimensions away from the probe limit[J]. *Physical Review D*, 2010, 81(12): 2917-2932.
- [18] LIU Y, PAN Q, WANG B, et al. Dynamical perturbations and critical phenomena in Gauss-Bonnet AdS black holes[J]. *Physics Letters B*, 2010, 693(3): 343-350.
- [19] WU J P. Holographic fermions in charged Gauss-Bonnet black hole[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2011, 2011(7): 1-18.
- [20] KUANG X M, WANG B, WU J P. Dipole coupling effect of holographic fermion in the background of charged Gauss-Bonnet AdS black hole[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2012, 2012(7): 1-18.
- [21] RITZ A, WARD J. Weyl corrections to holographic conductivity[J]. *Physical Review D*, 2009, 79: 289-292.
- [22] WU J P, CAO Y, KUANG X M, et al. The 3+1 holographic superconductor with Weyl corrections[J]. *Physics Letters B*, 2010, 697(2): 153-158.
- [23] WU J P, LIU P. Holographic superconductivity from higher derivative theory[J]. *Physics Letters B*, 2017, 774: 527-532.
- [24] CAI R G. Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces[J]. *Physical Review D*, 2001, 65(8): 381-399.
- [25] SHEYKHI A, SALAH I H R, MONTAKHAB A. Analytical and numerical study of Gauss-Bonnet holographic superconductors with Power-Maxwell field[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2016, 2016(4): 58.
- [26] SON D T, STARINETS A O. Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: recipe and applications[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2002, 2002(9): 042-065.
- [27] BREITENLOHNER P, FREEDMAN D Z. Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity[J]. *Physics Letters B*, 1982, 115(3): 197-201.
- [28] JIA C, BERAKDAR J. Electrically controlled persistent spin currents at the interface of multiferroic oxides[J]. *Physics Letters B*, 2012, 80(1): 014432.
- [29] HOROWITZ G T, ROBERTS M M. Holographic Superconductors with Various Condensates[J]. *Physical Review D*, 2008, 78(12): 2008.

## Holographic superconductors with four-order derivative correction

Wu Jianpin, Xu Baicheng, Fu Guoyang

(Bohai University School of Mathematics and Physics Liaoning Jinzhou 121013, China)

**Abstract:** In this paper, a holographic superconductor model under four-order derivative gravity frame is constructed. We mainly study the variation of condensation, critical temperature and superconducting energy gap with the coupling parameters. The results show that the GB coupling hinders the formation of condensation, which causes the superconducting energy gap to become larger, and the Weyl coupling term drives the superconducting energy gap changing from the value of approaching 3.5 to the one beyond the standard holographic superconductor. The holographic superconductor model from the four-order derivative gravitational frame can help us to study a large class of holographic dual systems, which provides a richer phenomenon.

**Keywords:** AdS/CFT duality; GB gravity; black hole; Weyl correction

[责任编辑 杨浦]