文章编号:1000－2367(2018)02－0022－04　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.02.004

环状有界的 Small Nim 博弈

刘文安，周晶晶

(河南师范大学 数学与信息科学学院 河南 新乡 453007)

摘　要:提出了一种新的“环状有界的 Small Nim”模型,确定出该模型在 Normal 规则下的所有 P 位置,从而彻底解决了该模型.

关键词:公平组合博弈;有界;Small Nim

中图分类号:O225　　**文献标志码:**A

传统的公平组合博弈有两种输赢规则:在 Normal 规则下,第一个无法移动的参与者输(他的对手赢);在 Misere 规则下,第一个无法移动的参与者赢(他的对手输).一个位置称为“P 位置”如果参与者从这个位置出发采用任何策略都无法赢得比赛;一个位置称为“N 位置”如果参与者从这个位置出发存在一种策略能够赢得比赛.传统的公平组合博弈有多种模型,Nim 模型是其中一个,具体请读者参考文献 [1－6].Small Nim 是 Nim 模型的一个变化,它可以描述为:有 s 堆金币($a_1,a_2,\cdots,a_s$),两个参与者 A_1 和 A_2 轮流进行游戏,每个参与者每次必须从最小堆移走金币(至少一个,可以整堆).Nim 模型有很多扩展情形[7－9]和限制情形[10－12].本文提出一种新的“环状有界的 Small Nim”模型,它是 Small Nim 的一种限制模型.本文确定出该模型在 Normal 规则下的所有 P 位置,从而彻底解决了该模型.

定义 1　给定 3 个整数 $s \geq 0$ 及 $B > b \geq 1$. 所谓“环状有界的 Small Nim”(用 $S_N(s;b,B)$ 表示)是指:有 s 堆金币($a_1,a_2,\cdots,a_s$),两个参与者 A_1 和 A_2 轮流进行游戏,每个参与者每次必须从最小堆移走 t 个金币,这里 $b \leq t \leq B$(显然 t 不能大于最小堆金币的数量).第一个无法移动的参与者输,即采用 Normal 规则.

$S_N(s;b,B)$模型中一个“位置”可以用 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 表示,这里 a_i 满足 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_s$,因为游戏过程中金币个数为 0 的堆可以被移除.根据定义 1,从一个给定位置 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 出发,任何合法移动必然使得 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s) \to \sigma'=(a'_1,a_2,\cdots,a_s)$,其中 $a'_1=a_1-t$ 且 $b \leq t \leq \min\{B,a_1\}$.

定义 2　给定 $S_N(s;b,B)$ 中一个位置 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$,定义:

(1) 对任意 $1 \leq j \leq s$,令 $r_j := B_{B+b}(a_j)$,其中 $R_{B+b}(a_j)$ 表示 a_j 除以 $B+b$ 的余数.称 $r(\sigma)=(r_1,r_2,\cdots,r_s)$ 为位置 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 的余数向量. (2)令 $\alpha(\sigma)=\max\{1 \leq k \leq s-1 \mid r_j \in \{0,b\}, \forall j \in \{1,2,\cdots,k\}\}$.特别地,当 $r_1 \notin \{0,b\}$ 时 $\alpha(\sigma)=0$.(3) 令 $\beta(\sigma)$ 表示整数 b 在向量$(r_1,r_2,\cdots,r_{\alpha(\sigma)})$ 中出现的次数.特别地,如果 $\alpha(\sigma)=0$ 那么 $\beta(\sigma)=0$.

例如,固定 $B=t,b=1,s=5$.对 $\sigma_1=(1,7,13,14,19)$,有 $r(\sigma_1)=(1,1,1,2,1)$,$\alpha(\sigma_1)=3=\beta(\sigma_1)$;对 $\sigma_2=(1,7,12,13,20)$,有 $r(\sigma_2)=(1,1,0,1,2)$,$\alpha(\sigma_2)=4$,$\beta(\sigma_3)=3$;对 $\sigma_3=(8,12,13,19,25)$,有 $r(\sigma_3)=(2,0,1,1,1)$,$\alpha(\sigma_3)=0=\beta(\sigma_3)$.

根据定义 2,给定一个位置 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$,有 $0 \leq \alpha(\sigma) \leq \beta(\sigma) \leq s-1$,且对所有的 $j \in \{1,2,\cdots,\alpha(\sigma)\}$ 均有 $r_j \in \{0,b\}$.特别地,$r_{\alpha(\sigma)+1} \notin \{0,b\}$.

给定整数 $s \geq 0$,用 P_s 表示 $S_N(s;b,B)$ 模型下所有的 P 位置集合.任何合法移动必然使得 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s) \to \sigma'=(a'_1,a_2,\cdots,a_s)$,其中 $a'_1=a_1-t$ 且 $b \leq t \leq \min\{B,a_1\}$.如果 $a'_1=0$,则 σ' 有 $s-1$ 堆

收稿日期:2017-06-13;**修回日期:**2017-12-25.

基金项目:国家自然科学基金(11171368);河南师范大学研究生创新基金(YL201601).

作者简介(通信作者):刘文安(1964－),男,河南偃师人,河南师范大学教授,博士,研究方向为随机模型,E-mail:liuwenan@126.com.

金币；如果 $a'_1>0$，则 σ' 有 s 堆金币.需要证明两个事实.

事实 1　对于属于 P_s 的任何一个位置 u，它的任意选择都不属于 $P_s\cup P_{s-1}$.

事实 2　对于不属于 P_s 的任何一个位置 u，存在一个合法移动使得 $u\rightarrow\nu\in P_s\cup P_{s-1}$.

1　主要定理及证明

定理 1　考虑 $S_N(s;b,B)$，(1) 当 $s=0$ 时，即 $P_0=\{(0)\}$ 空堆是一个 P 位置；(2) 当 $s=1$ 时，$P_1=\bigcup\limits_{1\le a_1}\{(a_1)\mid r_1\in\{0,1,\cdots,b-1\}\}$.

证明　(1)如果 $s=0$，则从 $\sigma=(0)$ 出发无法进行合法移动，故为 P 位置.

(2) 当 $s=1$ 时，需要证明它满足事实 1 和事实 2.

事实 1　假设 $\sigma=(a_1)\in P_1$，令 $a_1=m(B+b)+r_1>0(m\ge 0)$.当 $m=0$ 时有 $1\le a_1<b$，显然参与者无法进行合法移动，因此$\{\sigma=(a_1)\mid 1\le a_1<b\}$ 是 P 位置.当 $m>0$ 时，任何合法移动使得 $\sigma=(a_1)\rightarrow\sigma'=(a_1-t)$，这里 $b\le t\le\min\{B,a_1\}<B+b$，此时 $r'_1=R_{B+b}(a_1-t)=R_{(B+b)}(m(B+b)+r_1-t)\in\{b,b+1,\cdots,B+b+1\}$，所以 $\sigma'\notin P_1$.

事实 2　假设 $\sigma=(a_1)\notin P_1$，则 $r_1\in\{b,b+1,\cdots,B+b-1\}$.当 $r_1\in\{b,b+1,\cdots,B\}$ 时，存在一种合法移动 $\sigma=(a_1)\rightarrow\sigma'=(a_1-r_1)$ 使得 $r'_1=0$，因此 $\sigma'\in P_1\cup P_0$；当 $r_1\in\{B,B+1,\cdots,B+b-1\}$ 时，存在一种合法移动 $\sigma=(a_1)\rightarrow\sigma'=(a_1-B)$ 使得 $r'_1\in\{0,1,\cdots,b-1\}$，因此 $\sigma'\in P_1\cup P_0$.

对于 $s\ge 2$，为了求出 P_s，用 Z^o 和 Z^e 分别表示所有奇、偶自然数集合，即 $Z^o=\{2n+1\mid n\ge 0\}$ 和 $Z^e=\{2n\mid n\ge 0\}$.

定理 2　对于任何 $s\ge 2$，有 $P_s=M_1(s)\cup M_2(s)\cup M_3(s)\cup M_4(s)$，这里，

$$M_1(s)=\{\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\mid\alpha(\sigma)=s-1,\beta(\sigma)\in Z^e,0\le r_s<b\},$$
$$M_2(s)=\{\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\mid\alpha(\sigma)=s-1,\beta(\sigma)\in Z^o,b\le r_s<B+b\},$$
$$M_3(s)=\{\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\mid 0\le\alpha(\sigma)<s-1,\beta(\sigma)\in Z^e,1\le r_{\alpha(\sigma)+1}<b\},$$
$$M_4(s)=\{\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\mid 0<\alpha(\sigma)<s-1,\beta(\sigma)\in Z^o,b\le r_{\alpha(\sigma)+1}<B+b\}.$$

证明　需要证明它满足事实 1 和事实 2.

事实 1　假设 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\in P_s$，分成两种不同的情况讨论：$\alpha(\sigma)=0$ 或 $1\le\alpha(\sigma)\le s-1$：

(1) $\alpha(\sigma)=0$ 此时只能有 $\sigma\in M_3(s)$ 而且 $1\le r_1<b$.令 $a_1=n_1(B+b)+r_1$ 其中 $n_1\ge 0,1\le r_1<b$.如果 $n_1=0$，则 $a_1=r_1\in\{1,2,\cdots,b-1\}$，参与者无法进行合法移动.如果 $n_1>0$，则 $a_1>B+b>t$ 且 $a'_1=a_1-t=(n_1-1)(B+b)+B+b+r_1-t>0$.因此 $\sigma'\notin P_{s-1}$.注意到 $b+1\le r'_1=R_{B+b}(a'_1)\le B+b-1$，知 $\alpha(\sigma')=\beta(\sigma')=0$，进一步可得 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)\cup M_4(s)$.由 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r'_1>b$ 知 $\sigma'\notin M_3(s)$.因此 $\sigma'\notin P_{s-1}\cup P_s$.

(2) $1\le\alpha(\sigma)\le s-1$.此时 $r_1\in\{0,b\}$，令 $a_1=n_1(B+b)+r_1$ 其中 $n_1\ge 0,r_1\in\{0,b\}$.

(2.1)考虑 $r_1=0$ 且 $n_1>0$.此时 $a_1=n_1(B+b)$，进而 $r'_1=B+b-t\in\{b,b+1,\cdots,B\}$.因此 σ' 有 s 堆，即 $\sigma'\notin P_{s-1}$. 如果 $r'_1\in\{b+1,b+2,\cdots,B\}$ 则 $\alpha(\sigma')=\beta(\sigma')=0$.进一步得由 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r'_1>b$ 知 $\sigma'\notin M_3(s)$；由 $\alpha(\sigma')=\beta(\sigma')=0$ 知 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)\cup M_4(s)$.因此 $\sigma'\notin P_s$.

如果 $r'_1=b$ 则 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)$，$\beta(\sigma')=\beta(\sigma)+1$.为了讨论方便，做以下分析，进而得到 $\sigma'\notin P_s$.

当 $\sigma\in M_1(s)\cup M_2(s)$ 时，有 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)=s-1$ 即 $\sigma'\notin M_3(s)\cup M_4(s)$.分别考虑若 $\sigma\in M_1(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)+1$ 是奇数，而且 $0\le r_s<b$，即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$；若 $\sigma\in M_2(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)+1$ 是偶数，而且 $b\le r_s<B+b$，即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$.

当 $\sigma\in M_3(s)\cup M_4(s)$ 时，有 $1\le\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)<s-1$ 即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$.同样地，分别考虑若 $\sigma\in M_3(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)+1$ 是奇数，且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}<b$，即 $\sigma'\notin M_3(s)\cup M_4(s)$；若 $\sigma\in M_4(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)+1$ 是偶数，且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}>b$，即 $\sigma'\notin M_3(s)\cup M_4(s)$.

(2.2) $r_1=b$ 而且 $n_1\ge b$.分成两种不同的情况讨论.

(2.2.1) $r_1=b$ 而且 $n_1=0$.此时 $a_1=t=b$，位置 $\sigma'=(a_2,a_3,\cdots,a_s)$ 有 $s'=s-1$ 堆.显然 $\sigma'\notin P_s$.注意

到 $r(\sigma')=(r_2,r_3,\cdots,r_s)$,因此 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)-1,\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$.为了讨论方便,做以下分析.

当 $\sigma\in M_1\cup M_2(s)$ 则 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)-1=s'-1$,显然 $\sigma'\notin M_3(s')\cup M_4(s')$.分别考虑若 $\sigma\in M_1(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是奇数,而且 σ' 中最后一个元素的余数为 $r_s\in\{0,1,\cdots,b-1\}$,即 $\sigma'\notin M_1(s')\cup M_2(s')$;若 $\sigma\in M_2(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是偶数,而且 $r_s\in\{b,b+1,\cdots,B+b-1\}$,即 $\sigma'\notin M_1(s')\cup M_2(s')$.因此 $\sigma'\notin P_{s-1}$.

当 $\sigma\in M_3(s)\cup M_4(s)$,则 $1\leq\alpha(\sigma)<s-1$.不得不进一步分两种情况讨论:如果 $\alpha(\sigma)=1$,则 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)-1=0$,即 $\sigma'\notin M_1(s')\cup M_2(s')\cup M_4(s')$;如果 $1<\alpha(\sigma)<s-1$,则 $1\leq\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)-1<s'-1$,即 $\sigma'\notin M_1(s')\cup M_2(s')$.同样地,分别考虑若 $\sigma\in M_3(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是奇数,且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}<b$,即 $\sigma'\notin M_3(s')\cup M_4(s')$;若 $\sigma\in M_4(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是偶数,且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}>b$,即 $\sigma'\notin M_3(s')\cup M_4(s')$.因此 $\sigma'\notin P_{s-1}$.

(2.2.2) $r_1=b$ 而且 $n_1>0$.此时 $a_1=n_1(B+b)+b>B,b\leq t\leq B$.因此 $a'_1=(n_1-1)(B+b)+B+2b-t\geq 2b,r'_1=R_{B+b}(a'_1)\in\{0,2b,2b+1,\cdots,B+b-1\}$.位置 $\sigma'=(a'_1,a_2,a_3,\cdots,a_s)$ 有 s 堆,因此 $\sigma'\notin P_{s-1}$.同时有 $r(\sigma')=(r'_1,r_2,r_3,\cdots,r_s)$.如果 $r'_1\in\{2b,2b+1,\cdots,B+b-1\}$ 则 $\alpha(\sigma')=0$,即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)\cup M_4(s)$.由 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r'_1>b$ 知 $\sigma'\notin.M_3(s)$.因此 $\sigma'\notin P_s$.

如果 $r'_1=0$ 则 $\alpha('\sigma)=\alpha(\sigma),\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$.为了讨论方便,做以下分析.

当 $\sigma\in M_1(s)\cup M_2(s)$,则 $\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)=s-1$,显然 $\sigma'\notin M_3(s)\cup M_4(s)$.分别考虑如果 $\sigma\in M_1(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是奇数,而且 σ' 中最后一个元素的余数为 $r_s\in\{0,1,\cdots,b-1\}$,即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$;如果 $\sigma\in M_2(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是偶数,而且 σ' 中最后一个元素的余数为 $r_s\in\{b,b+1,\cdots,B+b-1\}$ 即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$.因此 $\sigma'\notin P_s$.

当 $\sigma'\in M_3(s)\cup M_4(s)$,则 $1\leq\alpha(\sigma')=\alpha(\sigma)<s-1$,即 $\sigma'\notin M_1(s)\cup M_2(s)$.同样地,分别考虑如果 $\sigma\in M_3(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是奇数,且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}<b$,即 $\sigma'\notin M_3(s)\cup M_4(s)$;如果 $\sigma\in M_4(s)$ 则 $\beta(\sigma')=\beta(\sigma)-1$ 是偶数,且 $r_{\alpha(\sigma')+1}=r_{\alpha(\sigma)+1}>b$,即 $\sigma'\notin M_3(s')\cup M_4(s')$.因此 $\sigma'\notin P_s$.

事实 2 对任意位置 $\nu=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\notin P_s$,则 $\nu\in T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$,这里 $T_1(s)=\{\nu\mid\alpha(\nu)=s-1,\beta(\nu)\in Z^e,b\leq r_s\leq B+b-1\}$,$T_2(s)=\{\nu\mid\alpha(\nu)=s-1,\beta(\nu)\in Z^o,0\leq r_s\leq b-1\}$,$T_3(s)=\{\nu\mid 0\leq\alpha(\nu)<s-1,\beta(\nu)\in Z^e,b<r_{\alpha(\nu)+1}\leq B+b-1\}$,$T_4(s)=\{\nu\mid 0<\alpha(\nu)<s-1,\beta(\nu)\in Z^o,1\leq r_{\alpha(\nu)+1}\leq b\}$.

分成两种不同的情况讨论:$\alpha(\nu)=0$ 或 $1\leq\alpha(\nu)\leq s-1$.

(1)$\alpha(\nu)=0$.此时 $\nu\in T_3(s),\beta(\nu)=0,r_1\in\{b+1,b+2,\cdots,B+b-1\}$.

(1.1)当 $r_1\in\{b+1,b+2,\cdots,B\}$,存在一种合法移动 $a_1\to a_1-(r_1-1)$ 使得 $\nu\to\nu'=(a_1-(r_1-1),a_2,\cdots,a_s)$.由 $r'_1=R_{B+1}(a_1-(r_1-1))=1\notin\{0,b\}$ 得 $\alpha(\nu')=\beta(\nu')=0$.因此 $r_{\alpha(\nu')+1}=r'_1=1<b$,故 $\nu'\in M_3(s)$. (1.2)当 $r_1\in\{B+1,B+2,\cdots,B+b-1\}$,存在一种合法移动 $a_1\to a_1-B$ 使得 $\nu\to\nu'=(a_1-B,a_2,\cdots,a_s)$.注意到 $r'_1=R_{B+1}(a_1-B)\in\{1,2,\cdots,b-1\}$ 即 $\alpha(\nu')=\beta(\nu')=0$.因此 $1\leq r_{\alpha(\nu')+1}=r'_1<b$,故 $\nu'\in M_3(s)$.

(2) $1\leq\alpha(\nu)\leq s-1$.此时 $r_1\in\{0,b\}$.令 $a_1=n_1(B+b)+r_1,n_1\geq 0,r_1\in\{0,b\}$.

(2.1)考虑 $r_1=0$ 且 $n_1>0$.此时 $a_1=n_1(B+b)>B$,存在一种合法移动 $a_1\to a_1-B$ 使得 $\nu\to\nu'=(a_1-B,a_2,\cdots,a_s)$.注意到 $r(\nu')=(r'_1,r_2,r_3,\cdots,r_s)$ 且 $r'_1=R_{B+1}(a_1-B)=b$,故 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu),\beta(\nu')=\beta(\nu)+1$. 如果 $\nu\in T_1(s)$,那么 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)=s-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)+1\in Z^o$ 而且 ν' 中最后一个元素的余数为 $r_s\in\{b,b+1,b+2,\cdots,B+b-1\}$,故 $\nu'\in M_2(s)$;如果 $\nu\in T_2(s)$,则 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)=s-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)+1\in Z^e$,而且 $r_s\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}$,故 $\nu'\in M_1(s)$;如果 $\nu\in T_3(s)$,有 $1\leq\alpha(\nu')=\alpha(\nu)<s-1$,$\beta(\nu')=\beta(\nu)+1\in Z^o$,而且 $b<r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}<B+b$,故 $\nu'\in M_4(s)$;若 $\nu\in T_4(s)$,则 $1\leq\alpha(\nu')=\alpha(\nu)<s-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)+1\in Z^e$,而且 $1\leq r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}<b$,故 $\nu'\in M_3(s)$.

(2.2) $r_1=b$ 而且 $n_1\geq 0$.此时 $a_1=n_1(B+b)+b$.存在一种合法移动 $a_1\to a_1-b$ 使得 $\nu\to\nu'=(a_1-b,a_2,\cdots,a_s)$.有必要分以下两种情况讨论.

(2.2.1) $r_1=b$ 而且 $n_1=0$.此时 $\nu'=(a_2,a_3,\cdots,a_s)$ 有 $s'=s-1$ 堆.注意到 $r(\nu')=(r_2,r_3,\cdots,r_s)$,因此

$\alpha(\nu')=\alpha(\nu)-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)-1$. 如果 $\nu\in T_1(s)$，则 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)-1=s'-1,1\leq\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^o$，而且 $r_s\in\{b,b+1,b+2,\cdots,B+b-1\}$.因此 $\nu'\in M_2(s-1)$；如果 $\nu\in T_2(s)$，那么 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)-1=s'-1,0\leq\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^e$ 而且 $r_s\in\{0,1,\cdots,b-1\}$.因此 $\nu'\in M_1(s-1)$；若 $\nu\in T_3(s)$ 则 $0<\alpha(\nu')=\alpha(\nu)-1<s'-1,1\leq\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^o$ 且 $r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}\in\{b+1,b+2,\cdots,B+b-1\}$，故 $\nu'\in M_4(s-1)$；如果 $\nu\in T_4(s)$ 那么 $0\leq\alpha(\nu')=\alpha(\nu)<s-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^e$ 而且 $1\leq r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}<b$，故 $\nu'\in M_3(s-1)$.

(2.2.2) $r_1=1$ 而且 $n_1>0$.此时 $\nu'=(a_1-b,a_2,a_3,\cdots,a_s)$ 有 s 堆.注意到 $r(\sigma')=(r'_1,r_2,r_3,\cdots,r_s)$ 且 $r'_1=R_{B+b}(a_1-b)=0$，因此 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu),\beta(\nu')=\beta(\nu)-1$.

如果 $\nu\in T_1(s)$，则 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)=s-1,\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^o$，而且 $r_s\in\{b,b+1,b+2,\cdots,B+b-1\}$，故 $\nu'\in M_2(s)$；若 $\nu\in T_2(s)$ 则 $\alpha(\nu')=\alpha(\nu)=s-1$ 并且 $\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^e$ 及 $r_s\in\{0,1,\cdots,b-1\}$，故 $\nu'\in M_1(s)$；如果 $\nu\in T_3(s)$ 那么 $0<\alpha(\nu')=\alpha(\nu)<s-1$ 且 $\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^o$ 以及 $r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}\in\{b+1,b+2,\cdots,b+B-1\}$，故 $\nu'\in M_4(s)$；若 $\nu\in T_4(s)$ 则 $0<\alpha(\nu')=\alpha(\nu)<s-1$ 以及 $\beta(\nu')=\beta(\nu)-1\in Z^e$ 而且 $1\leq r_{\alpha(\nu')+1}=r_{\alpha(\nu)+1}<b$，故 $\nu'\in M_3(s)$.

2　结　论

本文提出了一种新的“环状有界的 Small Nim”模型 $S_N(s;b,B)$，针对参数 $B>b\geq1$ 以及 $s\geq1$，确定出该模型在 Normal 规则下的所有 P 位置.特别地，当下界 $b=1$ 时，所有 P 位置形成的集合具有更简单的结构：当 $s=1$ 时，$P_1=\bigcup_{1\leq a_1}\{(a_1)\mid r_1=0\}$ 即 a_1 是 $B+1$ 的整倍；当 $s\geq2$ 时，有 P_s 满足定理 2.

参　考　文　献

[1]　范如国，韩民春.博弈论[M].武汉：武汉大学出版社，2006.
[2]　张影.博弈论的智慧[M].北京：中国致公出版社，2009.
[3]　邬锐.博弈论在戏剧冲突中的应用研究[D].上海：上海戏剧学院，2013.
[4]　白波，郭兴文.博弈关于策略的 63 个有趣话题[M].哈尔滨：哈尔滨出版社，2005.
[5]　郑延斌，陶雪丽.基于博弈论及惩罚机制的多 Agent 协作控制算法[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(6)：85-185.
[6]　Bouton C L，Nim，a game with a complete mathematical theory [J].Ann Math，1905，3：35-39.
[7]　Fraenkel A S.New games related to old and new sequences [J].Applied Mathematics，2004，4：1-18.
[8]　Allen M R.Impartial Combinatorial Misere game [M].Halifax：Dalhousie University Press，2006.
[9]　Fraenkel A S.How to beat your Wythoff's games opponent on three fronts [J].Amer Math Monthly，1982，89：353-361.
[10]　Liu W A ，Zhao X .Nim with one or two dynamic restrictions [J].Discrete Applied Mathematics，2016，198：48-64.
[11]　Liu W A ，Li H F，Li B.A restricted version of Wythoff's game [J]. Electronic Journal of Combinatorics，2011，18：545-567.
[12]　Berlekamp E R，Conway J H，Guy R K.Winning Ways for Your Mathematical Plays [D].Pittsburgh：Academic Press，1982.
[13]　Liu W A，Wang M Y.Multi-player subtraction games [J].Theoretical Computer Science，2017，659：14-35.

Ring-Bounded Small Nim games

Liu Wenan，Zhou Jingjing

(College of Mathematics and Information Science，Henan Normal University，Xinxiang 453007，China)

Abstract：In this paper，we propose a new model "Ring-Bounded Small Nim games". The set of all P-positions is determined under the normal play convention.

Keywords：impartial combinatorial games； bounded； Small Nim

［责任编校　陈留院］