第 44 卷 第 6 期 2016 年 11 月
河南师范大学学报(自然科学版) Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)
Vol. 44 No. 6 Nov. 2016

文章编号:1000－2367(2016)06－0029－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.06.005

具有 k 个悬挂点的双圈图的 Harary 指数

靳宇飞[1],雷英杰[1],侯 强[1],樊 恺[2]

(1.中北大学 理学院,太原 030051;2.东南大学 数学系,南京 211189)

摘 要:双圈图是指顶点数等于边数减 1 的连通图,Harary 指数是指图中所有顶点对的距离倒数之和.基于此,主要研究了具有 k 个悬挂点且两个圈只有一个交点的 n 阶双圈图有极大 Harary 指数的图类.

关键词:双圈图;Harary 指数;悬挂点

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

Harary 指数是 1993 年由文献[1－2]等为了刻画分子图的结构而独立引入的,Harary 指数的定义为 $H(G)=\sum_{u,v\in V(G)}\frac{1}{d(u,v)}$.

对于非连通图,因为任意两个不同连通分支上的顶点距离为无穷大,倒数即为零,因此非连通图的 Harary 指数可以定义为 $H(G)=\sum_{i=1}^{k}H(G_i)$,这里 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 表示图 G 的连通分支.

设图 G 为简单无向图,顶点集合为 $V(G)$,边集为 $E(G)$.设 $v\in V(G)$,G 中与顶点 v 关联的边的数目,称为 v 的度,记作 $d_G(v)$ 或 $d(v)$.度为 1 的顶点称为悬挂点,和悬挂点关联的边称为悬挂边.图 G 中两个顶点 u,v 的距离是指 u 和 v 之间最短路的长度,记为 $d(u,v)$.设 $u\in V(G)$,用 $N(u)$ 表示 G 中与 u 距离为 1 的点构成的集合,用 P_n,C_n 分别表示 n 阶的路和圈.用 $B^*_{n,g_1,g_2,k}$ 表示一类含有 n 个顶点,k 个悬挂点的双圈图,其中两个圈只含有一个交点,g_1 和 g_2 分别为两个圈的圈长.设 $B_{n,g_1,g_2,k}$ 是 n 阶双圈图,具体构造如下:在两个圈 C_{g_1} 和 C_{g_2} 的交点 w 处分别添加 $k(k\geq 1)$ 条 n_i 长的道路,其中 $n=g_1+g_2-1+\sum_{i=1}^{k}n_i$,$i=1,2,\cdots,k$,且 $|n_i-n_j|\leq 1,1\leq i,j\leq k$.

近年来,关于图的研究已获得很多结果,文献[3]利用差值转移规则给出 5- 临界图和 6- 临界图(不含三圈)边数的新下界.文献[4]证明沙漏图的线图是由它的(无符号)拉普拉斯谱唯一确定的.关于图的 Harary 指数研究成果可参考文献[5－9].文献[10]研究了单圈图的 Harary 指数的最大、次大和第三大值,以及对应的极图.文献[11]研究了具有 k 个悬挂点的 n 阶单圈图的 Harary 指数,并给出了具有极大 Harary 指数的图类.本文研究了具有 k 个悬挂点且两个圈只有一个交点的 n 阶双圈图有极大 Harary 指数的图类.

1 相关引理

引理 1[5] 设 H,X,Y 是 3 个两两不相交的连通图.设 u,v 是 H 的两个顶点,v_0 是 X 的一个顶点,u_0 是 Y 的一个顶点.设 G 是把 H 中 v 和 X 中的 v_0 粘贴在一起,把 H 中的 u 和 Y 中的 u_0 粘贴在一起所得到的图.

设 G_1^* 是把 H 中的 v 和 X 中的 v_0 以及 Y 中的 u_0 粘贴在一起所得到的图,G_2^* 是把 H 中的 u 和 X 中的 v_0 以及 Y 中的 u_0 粘贴在一起所得到的图,那么有

$$H(G_1^*)>H(G)\text{ 或 }H(G_2^*)>H(G).$$

收稿日期:2016-01-18;修回日期:2016-09-26.

基金项目:国家自然科学基金(11501528)

第 1 作者简介(通信作者):靳宇飞(1991－)男,山西长治人,中北大学硕士研究生,主要从事图论研究,E-mail:1648907507@qq.com.

引理 2[9] 设 G 是阶数 $n \geq 2$ 的连通图，u 是 G 的顶点. 设 $G_{k,l}$ 是 G 在 u 处分别添加两条长为 k 和 l 的路 P 和 Q 后得到的图，其中 $P: uv_1v_2\cdots v_k$ 和 $Q: uu_1u_2\cdots u_l$，$u_1,\cdots,u_l$ 和 $v_1,\cdots,v_k$ 是不同的点(见图 1). 如果 $k \geq l \geq 1$，那么 $H(G_{k,l}) > H(G_{k+1,l-1})$.

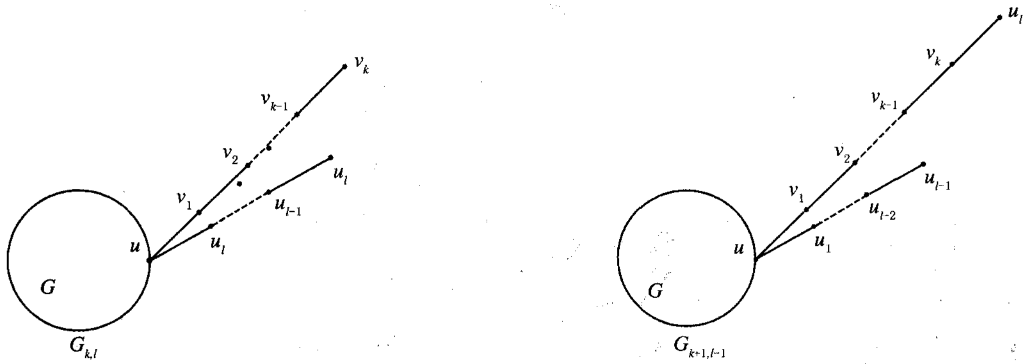


图1 图$G_{k,l}$和$G_{k+1,l-1}$

引理 3 设 $G \in B^*_{n,g_1,g_2,k}$，G 是 $B^*_{n,g_1,g_2,k}$ 中 Harary 指数最大的双圈图，则双圈图 G 的两个圈上存在唯一的顶点 w，使得 $d_G(w) \geq 3$，并且该点就是两个圈的交点.

证明 假设 w 是两个圈的交点，圈上存在一个点 u_i 使得 $u_i \neq w$ 且 $d(u_i) \geq 3$. 令 $N(u_i) = \{u_{i+1}, u_{i-1}, x_1, \cdots, x_r\}$，$N(w) = \{t_1, \cdots, t_s\}$，$u_{i+1}, u_{i-1}$ 分别是圈上的点，设 $G_1 = G - \{u_ix_1, u_ix_2, \cdots, u_ix_r\} + \{wx_1, wx_2, \cdots, wx_r\}$，由引理 1 可知，$H(G_1) > H(G)$，这与已知 G 的 Harary 指数是最大的矛盾，原命题得证.

引理 4[10]

$$H(P_n) = 1 + n\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i},\ H(C_n) = \begin{cases} n\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{i} + 1, & n \text{ 是偶数}, \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{i}, & n \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

引理 5 设 $G \in B_{n,g_1,g_2,k}$，G 中包含圈 $C_{g_1}: v_1v_2\cdots v_{g_1}v_1$ 与圈 $C_{g_2}: u_1u_2\cdots u_{g_2}u_1$，将圈 C_{g_1} 上的点 v_1 和圈 C_{g_2} 上的点 u_1 黏合成一点，记作 w，然后在 w 处添加 k 条几乎一样长的路得到的图记作 G，$\widetilde{G} = G - \{v_sv_{s-1}, v_sv_{s+1}, u_tu_{t+1}\} + \{v_{s-1}v_{s+1}, v_su_t, v_su_{t+1}\}$，其中 s 和 t 满足 $s = \lceil\frac{g_1+1}{2}\rceil$，$t = \lceil\frac{g_2+1}{2}\rceil$. G 和 $\widetilde{G}$ 如图 2 所示，有下面结论：

(1) 当 g_1 是偶数，g_2 是奇数，$g_1 - g_2 > 1$ 时，$H(\widetilde{G}) - H(G) > 0$；

(2) 当 g_1 是奇数，g_2 是偶数，$g_1 - g_2 > 1$ 时，$H(\widetilde{G}) - H(G) > 0$；

(3) 当 g_1 是偶数，g_2 是偶数，$g_1 - g_2 > 1$ 时，$H(\widetilde{G}) - H(G) > 0$；

(4) 当 g_1 是奇数，g_2 是奇数，$g_1 - g_2 = 2$ 时，$H(\widetilde{G}) - H(G) < 0$，$g_1 - g_2 > 2$ 时，$H(\widetilde{G}) - H(G) > 0$.

证明 设 T 表示在 w 点添加的树. 下面分 4 种情况进行讨论.

情况 1 当 g_1 是偶数，g_2 是奇数时，

$$H(\widetilde{G}) - H(G) = (g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2+1}{2}-1}\frac{1}{i} + 1 + (g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i} - g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i} - g_2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{i} + 2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-2}{2}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i} +$$

$$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+d(x,w)} - 2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i} - \sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+d(x,w)}.$$

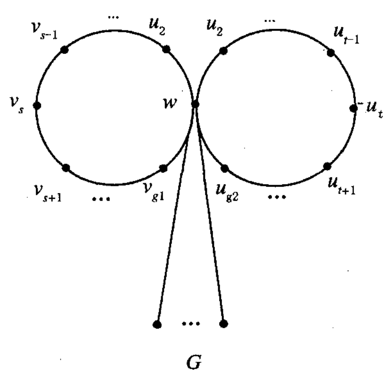
当 $g_1 - g_2 > 1$ 时，

$$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+d(x,w)} > \sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\underline{g_1 2}+d(x,w)},$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-2}{2}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i}>2\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1-2}{2}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}.$$

$$H(\widetilde{G})-H(G)>(g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2+1}{2}-1}\frac{1}{i}+1+(g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i}-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i}-1-g_2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{i}+$$

$$2\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1-2}{2}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}=-\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i}+2\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}\geq 0.$$



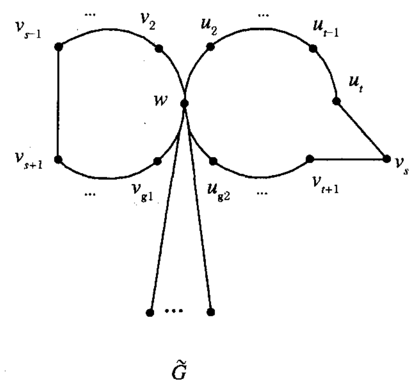


图2 图G和$\widetilde{G}$

情况 2　　当 g_1 是奇数，g_2 是偶数时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)=(g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}}\frac{1}{i}+(g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{i}+1-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}-g_2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{i}-1+2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}+$$

$$\frac{1}{\frac{g_2}{2}+\frac{g_1-1}{2}}+\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+d(x,w)}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+i}-\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+\frac{g_2}{2}}-\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+d(x,w)}.$$

当 $g_1-g_2>1$ 时，

$$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+d(x,w)}>\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+d(x,w)},$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+i}>2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}.$$

$$H(\widetilde{G})-H(G)>(g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}}\frac{1}{i}+(g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{i}+1-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}-g_2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{i}-1+$$

$$2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}>-\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{1+i}+2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}>0.$$

情况 3　当 g_1 是偶数，g_2 是偶数时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)=(g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}}\frac{1}{i}+(g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-2}{2}-1}\frac{1}{i}-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}-1-g_2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{i}-1+2\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}+$$

$$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+d(x,w)}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i}-\frac{1}{\frac{g_2}{2}+\frac{g_2}{2}}-\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+d(x,w)}.$$

当 $g_1-g_2>1$ 时，$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+d(x,w)}>\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+d(x,w)}$.

当 $g_1-g_2=2$ 时，$H(\widetilde{G})-H(G)>2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}-\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}=\frac{1}{\frac{g_2}{2}}-\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}>0$.

当 $g_1-g_2>2$ 时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)>-\sum_{i=\frac{g_2}{2}+1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i}+2\sum_{i=\frac{g_2}{2}}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2}{2}+i}-\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}=\frac{1}{\frac{g_2}{2}}-\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}+\sum_{i=\frac{g_2}{2}+1}^{\frac{g_1}{2}-1}\left(\frac{1}{\frac{g_2}{4}+\frac{i}{2}}-\frac{1}{i}\right)>0.$$

因此当 g_1 是偶数，g_2 是偶数，$g_1-g_2>1$ 时，$H(\widetilde{G})-H(G)>0$.

情况 4 当 g_1 是奇数，g_2 是奇数时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)=(g_2+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_2+1}{2}-1}\frac{1}{i}+1+(g_1-1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{i}+1-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}-g_2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{i}+$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}+\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+\frac{g_1-1}{2}}+\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+d(x,w)}-$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+i}-\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+d(x,w)}.$$

因为 $g_1-g_2\geq 2$ 时，$\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+d(x,w)}\geq\sum_{x\in V(T)-\{w\}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+d(x,w)}$，所以，当 $g_1-g_2=2$ 时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)=-\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}+2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}+\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+i}.$$ 当 $g_1-g_2>2$ 时，

$$H(\widetilde{G})-H(G)>-\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}+2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{1}{\frac{g_2+1}{2}+i}+\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1-1}{2}+i}.$$

为了方便讨论，取 $g_1=2n_1+1$，$g_2=2n_2+1$，则有：

$$\sum_{i=\frac{g_2+1}{2}}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}-1}\frac{2}{\frac{g_2+1}{2}+i}+\frac{1}{\frac{g_1+g_2}{2}}-\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{2}{\frac{g_1-1}{2}+i}=$$

$$-\sum_{i=n_2+1}^{n_1}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{2}{n_2+1+i}+\frac{1}{n_1+n_2+1}-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{2}{n_1+i}.$$

当 $n_1=n_2+1$ 时，即 $g_1-g_2=2$ 时，

$$H(\tilde{G})-H(G)=-\sum_{i=n_2+1}^{n_1}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{2}{n_2+1+i}+\frac{1}{n_1+n_2+1}-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{2}{n_1+i}=-\sum_{i=n_2+1}^{n_1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n_1+n_2+1}<0.$$

当 $n_1>n_2+1$ 时，即 $g_1-g_2>2$ 时，

$$H(\tilde{G})-H(G)>-\sum_{i=n_2+1}^{n_1}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{2}{n_2+1+i}+\frac{1}{n_1+n_2+1}-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{2}{n_1+i}=-\frac{1}{n_2+1}+$$

$$\sum_{i=n_2+2}^{n_1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n_1+n_2+1}>\frac{1}{n_2+3}-\frac{1}{(n_2+1)(n_2+2)}>\frac{1}{n_2+3}-\frac{1}{2(n_2+2)}>0.$$

2　主要结果

定理 1　设 $G\in B^*_{n,g_1,g_2,k}$，G 的 Harary 指数取得最大，那么 $G\cong B_{n,g_1,g_2,k}$.

证明　根据引理 3 可知，只有两个圈的交点的度大于等于 3. 那么 G 应该是在两个圈的交点 w 处添加一个有 k 个悬挂点的树 T 而得到的图. 现在证明对于 T 中每一个点 $v(v\neq w)$ 有 $d(v)\leq 2$. 采用反证法，假设存在一个点 $v_i\in V(T)\backslash\{w\}$，使得 $d(v_i)\geq 3$. 设 $N(v_i)=\{x_1,\cdots,x_r\}$，$N(w)=\{t_1,\cdots,t_s\}$，其中 x_1 和 t_5 在 w 到 v_i 的路上，t_1 和 t_2 在一个圈上，t_3 和 t_4 在另一个圈上，$r\geq 3$. 设 $G_1=G-\{v_ix_3,\cdots,v_ix_r\}+\{wx_3,\cdots,wx_r\}$，由引理 1 可得：$H(G_1)>H(G)$，这与已知 G 的 Harary 指数最大矛盾. 这样一来，G 是在两个圈的交点处添加 k 条路后得到的图. 最后证明 $|n_i-n_j|\leq 1,1\leq i,j\leq k$. 采用反证法，设有两条路 P_m 和 P_n 满足 $m-n\geq 2,n\geq 2$. 其中 $P_m:u_1\cdots u_m$，$P_n:w_1\cdots w_n$，$u_1=w_1=w$. 设 $G_1=G-\{u_{m-1}u_m\}+\{w_nu_m\}$，那么 $G_1\in B^*_{n,g_1,g_2,k}$. 由引理 2，$H(G_1)>H(G)$，与已知 G 的 Harary 指数最大矛盾. 综上所述 $G\cong B_{n,g_1,g_2,k}$.

将引理 5 中 G 到 $\tilde{G}$ 的变换称为 F 变换. 对任意的 $G\in B_{n,g_1,g_2,k}$，反复使用 F 变换，很容易得到下面的定理.

定理 2　对任意的 $G\in B_{n,g_1,g_2,k}$，$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 是固定时，则有：

(1) 当 g_1+g_2 是奇数时，$g_1=\lceil\frac{g_1+g_2}{2}\rceil$，$g_2=\lfloor\frac{g_1+g_2}{2}\rfloor$ 对应的图的 Harary 指数取得最大值；

(2) 当 g_1+g_2 是偶数，$\frac{g_1+g_2}{2}$ 是奇数时，$g_1=g_2=\frac{g_1+g_2}{2}$ 对应的图的 Harary 指数取得最大值；

(3) 当 g_1+g_2 是偶数，$\frac{g_1+g_2}{2}$ 是偶数时，$g_1=\frac{g_1+g_2}{2}+1$，$g_2=\frac{g_1+g_2}{2}-1$ 对应的图的 Harary 指数取得最大值.

定理 3　设 $G_1\in B_{n,g_1,g_2,k}$，G_1 中包含圈 $C_{g_1}:v_1v_2\cdots v_{g_1}v_1$ 与圈 $C_{g_2}:u_1u_2\cdots u_{g_2}u_1$，将圈 C_{g_1} 的点 v_1 和圈 C_{g_2} 的点 u_1 黏合成一点，记作 w，然后在 w 处添加 k 条路 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，长度分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，满足 $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_k$，$G_2=G_1-\{w_{n_1-1}w_{n1},v_sv_{s+1}\}+\{w_{n1}v_s,w_{n1}v_{s+1}\}$，其中 $s=\lceil\frac{g_1+1}{2}\rceil$. 取 $g=\min\{g_1,g_2\}$，若 $g\leq 2n_1$，则 $H(G_2)\geq H(G_1)$，G_1 和 G_2 如图 3 所示.

证明　设 $g_1=g=\min\{g_1,g_2\}$. 下面分 4 种情况进行讨论.

情况 1　当 g_1 是奇数，g_2 是奇数，且 $g_1\leq 2n_1-1$ 时，

$$H(G_2)-H(G_1)=(g_1+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}+1-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{i}+(1+n_1\sum_{i=2}^{n_1-1}\frac{1}{i})-\left(1+(n_1+1)\sum_{i=2}^{n_1}\frac{1}{i}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+j}+2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i}-\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{n_1+j}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{n_1+i}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\frac{1}{n_1+i}=$$

$$1-\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}}-\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}}\frac{1}{n_1+i}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+j}-\frac{1}{n_1+j}\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}}\left(\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i}-\frac{1}{n_1+i}\right).$$

因为 $g_1 \le 2n_1 - 1$,所以

$$H(G_2) - H(G_1) \ge 1 - \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{n_1+i} \ge 1 - \sum_{i=0}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i} \ge 0.$$

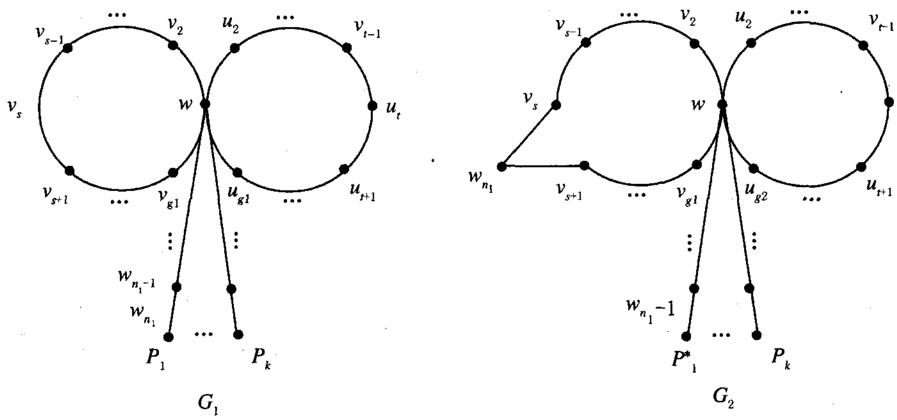


图3 图G_1和G_2

情况 2 当 g_1 是奇数,g_2 是偶数,且 $g_1 \le 2n_1 - 1$ 时,

$$H(G_2) - H(G_1) = (g_1+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{i} + 1 - g_1 \sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{i} + 1 + n_1 \sum_{i=2}^{n_1-1} \frac{1}{i} - \left(1 + (n_1+1)\sum_{i=2}^{n_1} \frac{1}{i}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+j} + 2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1} \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i} + \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+\frac{g_2}{2}} - \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_1+j} -$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{n_1+i} - 2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1} \frac{1}{n_1+i} - \frac{1}{n_1+\frac{g_2}{2}} = 1 - \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{n_1+i} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+j} -\right.$$

$$\left.\frac{1}{n_1+j}\right) + 2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1} \left(\frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i} - \frac{1}{n_1+i}\right) + \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+\frac{g_2}{2}} - \frac{1}{n_1+\frac{g_2}{2}}.$$

因为 $g_1 \le 2n_1 - 1$,所以

$$H(G_2) - H(G_1) \ge 1 - \frac{1}{g_1+\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{n_1+i} \ge 1 - \sum_{i=0}^{\frac{g_1-1}{2}} \frac{1}{\frac{g_1+1}{2}+i} \ge 0.$$

情况 3 当 g_1 是偶数,g_2 是奇数,且 $g_1 \le 2n_1$ 时,

$$H(G_2) - H(G_1) = (g_1+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}} \frac{1}{i} - g_1 \sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1} \frac{1}{i} - 1 + (1 + n_1 \sum_{i=2}^{n_1-1} \frac{1}{i}) - \left(1 + (n_1+1)\sum_{i=2}^{n_1} \frac{1}{i}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{1}{\frac{g_1}{2}+i} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\frac{g_1}{2}+j} + \sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}} \frac{2}{\frac{g_1}{2}+i} - \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_1+j} - \sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1} \frac{2}{n_1+i} - \frac{1}{\frac{g_1}{2}+n_1} - \sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}} \frac{2}{n_1+i} =$$

$$1 - \frac{1}{n_1+\frac{g_1}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1} \frac{1}{n_1+i} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{\frac{g_1}{2}+j} - \frac{1}{n_1+j}\right) + 2\sum_{i=1}^{\frac{g_2-1}{2}} \left(\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i} - \frac{1}{n_1+i}\right).$$

因为 $g_1 \le 2n_1$，所以

$$H(G_2)-H(G_1) \ge 1-\frac{1}{n_1+\frac{g_1}{2}}-\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{n_1+i} \ge 1-\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i} \ge 0.$$

情况 4　当 g_1 是偶数，g_2 是偶数，且 $g_1 \le 2n_1$ 时，

$$H(G_2)-H(G_1)=(g_1+1)\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}}\frac{1}{i}-g_1\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{i}-1+1+n_1\sum_{i=2}^{n_1-1}\frac{1}{i}-\left(1+(n_1+1)\sum_{i=2}^{n_1}\frac{1}{i}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+j}-\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{n_1+j}-2\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{n_1+i}-\frac{1}{\frac{g_1}{2}+n_1}+n_1+\frac{g_2}{2}+$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\left(\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i}-\frac{1}{n_1+i}\right)+\frac{1}{\frac{g_1}{2}+\frac{g_2}{2}}-\frac{1}{n_1+\frac{g_2}{2}}=1-\frac{1}{n_1+\frac{g_1}{2}}-\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{n_1+i}+$$

$$\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{1}{\frac{g_1}{2}+j}-\frac{1}{n_1+j}\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{g_2}{2}-1}\left(\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i}-\frac{1}{n_1+i}\right)+\frac{1}{\frac{g_1}{2}+\frac{g_2}{2}}-\frac{1}{n_1+\frac{g_2}{2}}.$$

因为 $g_1 \le 2n_1$，所以

$$H(G_2)-H(G_1) \ge 1-\frac{1}{n_1+\frac{g_1}{2}}-\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}-1}\frac{1}{n_1+i} \ge 1-\sum_{i=1}^{\frac{g_1}{2}}\frac{1}{\frac{g_1}{2}+i} \ge 0.$$

参　考　文　献

[1]　Plavšić D, Nikolić S, Trinajstić N, et al. On the Harary index for the characteri-zation of chemical graphs[J]. J Math Chem, 1993, 12(1): 235-250.

[2]　Ivanciuc O, Balaban T S, Balaban A T. Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices[J]. J Math Chem, 1993, 12(1): 309-318.

[3]　李卫奇，苗连英，齐林明. 边染色临界图边数的新下界[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(2)：30-33.

[4]　秦正新，张文丽，王国平，等. 沙漏图线图的(无符号)拉普拉斯谱的刻画[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(6)：8-15.

[5]　Xu K, TrinajsticN. Hyper-Wiener and Harary indices of graphs with cut edges[J]. Utilitas Math, 2011, 84(2): 153-163.

[6]　Zhou B, Cai X, TrinajsticN. On Harary index[J]. J Math Chem, 2008, 44(2): 611-618.

[7]　蔡改香，邢抱花，余桂东. 三圈图的 Harary 指数[J]. 运筹学学报，2015，19(2)：45-53.

[8]　Ilić A, Yu G, Feng L. The Harary index of trees[J]. Utilitas Math, 2011, 87(3): 21-31.

[9]　He C, Chen P, Wu B. The Harary index of a graph under perturbation[J]. DiscreteMath Alg Appl, 2010, 2(2): 247-255.

[10]　陈单单. 单圈图的 Harary 指数[D]. 长沙：湖南师范大学，2009.

[11]　蔡改香，余桂东，邢抱花. 具有个悬挂点的阶单圈图的 Harary 指数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2015(1)：120-125.

Harary Index of Bicyclic Graphs with k Pendent Vertices

JIN Yufei[1], LEI Yingjie[1], HOU Qiang[1], FAN Kai[2]

(1. School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China;
2. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: Bicyclic graphs are connected graphs in which the number of vertices equals the number of edges minus one. The Harary index is defined as the sum of reciprocals of distances between all pairs of vertices of a graph. The graphs with the largest Harary index among bicyclic graphs(only one vertex in two cycles) on n vertices and k pendent vertices are characterized.

Keywords: bicyclicgraphs; Harary index; pendent vertex