文章编号:1000-2367(2020)05-0022-09 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.05.004

一类非线性 Schrödinger 方程的数值解

李用声,项少婷,付一平

(华南理工大学 数学学院,广州 510640)

摘 要:对一类非线性 Schrödinger 方程的周期初边值问题的数值解进行了研究,对该方程提出了一种隐式差分格式,证明了该差分格式满足两个离散的守恒律,并在此基础上验证了差分格式的解在最大模范数意义下是收敛到其解析解的,且该差分格式的收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$,其中 τ 是时间步长,h 是空间步长.

关键词:非线性 Schrödinger 方程;差分格式;守恒;收敛

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A

信号在光纤中的传播过程可以表述为非线性 Schrödinger 方程,通常情况下无法求出非线性 Schrödinger 方程的解析解,那么对于此类方程的数值研究就显得极为重要,关于 Schrödinger 方程的数值研究已有许多成果[1-11],研究非线性 Schrödinger 方程的数值方法主要有有限差分法,有限元法,分裂步长快速傅立叶变换法等,而有限差分法由于其易理解并且可以衡量数值近似过程的误差而被广泛应用.对于二阶非线性 Schrödinger 方程数值解法的研究已有十分丰富的成果,文献[7]首先提出了有限差分方法;文献[4]建立了关于方程 $\partial_t u-\mathrm{i}\Delta u=\mathrm{i}f(u)$ 的两个隐式 Crank-Nicolson 型差分格式并分析了差分格式解的存在性和唯一性以及误差估计;文献[8]利用差分方法研究了方程 $\mathrm{i}\partial_t u+\mathrm{i}\alpha u-\partial_x^2 u+qu(|u^2|^{p+1}+\alpha|x|)=0$ 的二层差分解,并对差分格式进行了数值模拟.文献[9]研究了一类二阶非线性 Schrödinger 方程,作者在假设 $\frac{\tau^2}{h}$ 足够小的情况下运用数学归纳法和离散能量法证明了他提出的两个差分格式的解依平方模收敛到原问题的精确解,且其收敛阶为 $O(\tau^2+h^4)$;文献[10]则给出了问题

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t u+\eta\partial_x^2 u+qu|u|^2=0, & x\in\mathbf{R},t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R},\\ u(x,t)\to 0, & |x|\to\infty,t>0\end{cases}\tag{1}$$

的两个紧致差分格式,这两个紧致差分格式在对网格比没有任何要求的情况下,满足两个守恒律并且差分格式的解在最大模意义下无条件收敛到其精确解,且其收敛阶为 $O(\tau^2+h^4)$.但对于三阶非线性 Schrödinger 方程有限差分方法的研究还比较少,文献[12]与文献[13]分别给出了两个三阶非线性 Schrödinger 方程的一个亮孤子解、一个暗孤子解和两个数值解与解析解的对比图,但并没有给出数值解的具体公式以及误差分析.文献[14]利用差分方法研究了方程:$\mathrm{i}\partial_t u+\alpha\partial_x^2 u+\mathrm{i}\beta\partial_x^3 u+3\gamma|u|^2\partial_x u+\delta(|u^2|u)=f$ 在满足 $\alpha\gamma=\delta\beta$ 时的数值解.基于对有限差分法的改进,作者的方法有效地解决了上述方程中非线性导数项 $|u|^2\partial_x u$ 带来的稳定性困难,在文章中作者给出了差分格式的稳定性分析和误差估计,并通过数值实验验证了有限差分法的效率.

本文考虑下列一类高阶非线性 Schrödinger 方程[15]

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t u+\alpha\partial_x^2 u+\mathrm{i}\beta\partial_x^3 u+\mathrm{i}\gamma\partial_x(|u^2|u)+\delta(|u^2|u)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[x_L,x_R],t\geq 0,\\ u(x,t)=u(x+L,t).\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期:2020-04-04;**修回日期**:2020-06-09.

基金项目:国家自然科学基金(11571118;11971356)

作者简介(通信作者):李用声(1965—),男,湖北襄阳人,华南理工大学教授,博士生导师,主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究,E-mail:yshli@scut.edu.cn.

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为常实数. 方程(2)的 1 式是由描述脉冲在光纤中传输的方程做无量纲化处理后得到的：

$$\mathrm{i}\partial_T A+\mathrm{i}\beta_1\partial_X A+\frac{1}{2}\alpha\partial_X^2 A+\frac{1}{6}\mathrm{i}\beta\partial_X{}^3 A+\frac{\gamma}{\omega_0}i\partial_X(|A^2|A)=0. \tag{3}$$

(3)式就是非线性色散光波系统中信号传输的基本方程，其中 $1/\beta_1$ 是群速度，α,β 对应二阶和三阶色散系数，γ 是非线性克尔系数，ω_0 与自陡峭效应有关.

在文献[15]中，已经证明了问题(2)当初值 $u(x,0)\in H^k(\mathbf{R})$ 时，存在唯一解 $u(x,t)\in W(k,T)$，其中 $W(k,T)=\{u(x,t)\mid\partial_t^s u\in L^\infty(0,T;H^{k-3s}\}s,k$ 为非负整数，满足 $k\geq 3,s\leq\dfrac{k}{3}$，并且具有如下的守恒律：

$$\|u(x,t)\|_2=\|u(x,0)\|_2,E(u(x,t))=E(u(x,0))(\beta\gamma\neq 0). \tag{4}$$

其中 $E(u)=\int_{\mathbf{R}}|\partial_x u|^2\mathrm{d}x-\dfrac{\gamma}{2\beta}\int_{\mathbf{R}}|u|^4\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}u\partial_x\bar{u}\,\mathrm{d}x$.

本文对初边值问题(2)提出了一种非线性差分格式，去掉了文献[14]中关于系数的限制条件，并证明了该差分格式满足守恒律.在非线性方程差分格式的收敛性分析中，最大的困难就是如何获得差分解在最大模意义下的先验估计，非线性导数项 $\partial_x(u|u^2|)$ 是困难的最主要来源，利用守恒律，然后运用能量分析和离散的 Sobolev 不等式来获得差分解的先验估计，最后给出了差分解的收敛性.

值得注意的是，由于非线性项 $\partial_x(u|u^2|)$ 带来的困难，在差分格式收敛性分析中假设 $\dfrac{\tau}{h^2}$ 取适当值.本文主要定理如下.

定理 1　设 $\{u_j^n\mid 0\leq j\leq J,0\leq n\leq N\}$ 为方程(2) 的解，$\{U_j^n\mid 0\leq j\leq J,0\leq n\leq N\}$ 为差分格式(13)～(15) 式的解.记 $\{e_j^n=u_j^n-U_j^n,\mid 0\leq j\leq J,0\leq n\leq N\}$，当 $h,\tau,\dfrac{\tau}{h^2}$ 取适当值时有 $\|e^n\|_\infty\leq O(\tau^2+h^2),0\leq n\leq N$.

1　预备知识

对区域 $[x_L,x_R]\times[0,T]$ 作网格剖分，取空间步长 h，时间步长 τ，$x_j=x_L+jh,j=0,1,2,\cdots,J,J=\dfrac{x_R-x_L}{h},t_n=n\tau,n=0,1,2,\cdots,N,N=\dfrac{T}{\tau}$ 在本文中记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$. 为了方便起见，我们约定如下符号：

$$\delta u_j^n=(u_j^n)_{\hat{x}}=\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h},(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}=\frac{u_{j+2}^n-2u_j^n+u_{j-2}^n}{4h^2},(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}=\frac{u_{j+3}^n-3u_{j+1}^n+3u_{j-1}^n-u_{j-3}^n}{8h^3},$$

$$\delta^m u_j^n=\delta(\delta^{m-1}u_j^n),(u_j^n)_t=\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\tau},(u_j^n)_{\hat{t}}=\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau},F(u_j^n)=\frac{1}{4}(\bar{u}_{j+1}^n u_j^n+u_{j+1}^n\bar{u}_j^n+\bar{u}_{j-1}^n u_j^n+u_{j-1}^n\bar{u}_j^n).$$

记 $Z_h^0=\{u_j^n\mid u_j^n=u_{j+J}^n,0\leq j\leq J,0\leq n\leq N\}$.并引入如下的内积与范数记号：$(u^n,v^n)=h\sum\limits_{j=1}^{J}u_j^n\bar{v}_j^n$，$(u^n,u^n)=\|u^n\|^2$，$\|u^n\|_p^p=h\sum\limits_{j=1}^{J}|u_j^n|^p$，$\|u^n\|_\infty=\max\limits_j|u_j^n|$.

引理 1　对于任意两个网格函数 $u,v\in Z_h^0$，有以下等式成立

$$(u_{\hat{x}},v)=-(u,v_{\hat{x}}),(u_{\hat{x}},v_{\hat{x}})=-(u,v_{\hat{x}\hat{x}}). \tag{5}$$

由(5)式，易知

$$\begin{cases}(u,u_{\hat{x}\hat{x}})=-(u_{\hat{x}},u_{\hat{x}})=-\|u_{\hat{x}}\|^2,\\(u,v_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}})=-(u_{\hat{x}},v_{\hat{x}\hat{x}})=(u_{\hat{x}\hat{x}},v_{\hat{x}})=-(u_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}},v),(u,u_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}})=0.\end{cases} \tag{6}$$

证明　对于 $u,v\in Z_h^0$，有

$$(u_{\hat{x}},v)=\sum_{j=1}^{J}\frac{(u_{j+1}-u_{j-1})\bar{v}_j}{2h}h=-\sum_{j=1}^{J}\frac{(\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_{j-1})u_j}{2h}h+$$

$$\frac{-u_1\bar{v}_0+u_{J+1}\bar{v}_j-u_0\bar{v}_1+u_j\bar{v}_{J+1}}{2}=-(u,v_{\hat{x}}),\tag{7}$$

同理易证引理中其余式子均成立.

引理 2 对于任意网格函数 $u\in Z_h^0$,有 $\|u_{\hat{x}}\|_2^2\leq\frac{1}{h^2}\|u\|_2^2$.

证明 对于 $u\in Z_h^0$,有

$$\|u_{\hat{x}}\|_2^2=\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}\right|^2h\leq\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{2|u_{j+1}|^2+2|u_{j-1}|^2}{4h^2}h\leq\frac{1}{h^2}\|u\|^2.\tag{8}$$

引理 3[10] 对于序列 $\omega=\{\omega^0,\omega^1,\cdots,\omega^n,\omega^{n+1}\}$ 和 $g=\{g^0,g^1,\cdots,g^n\}$ 有

$$\left|2\tau\sum_{l=0}^{n}g^l(\omega^l)_t\right|\leq|\omega^0|^2+\tau\sum_{l=1}^{n}|\omega^l|^2+|\omega^{n+1}|^2+|g^0|^2+\tau\sum_{l=0}^{n-1}|(g^l)_t|^2+|g^n|^2.\tag{9}$$

引理 4[7](离散的 Gronwall 不等式) 设 $\omega(n)\geq 0$ 且存在常数 $C_1>0,C_2>0$ 使得

$$\omega(n)\leq C_1+C_2\tau\sum_{k=0}^{n-1}w(k),0\leq n\tau\leq T,\tag{10}$$

有:$\omega(n)\leq C_1e^{C_2T},0\leq n\tau\leq T$.

引理 5[7](离散的 Sobolev 不等式) 对任何网格函数 $U\in Z_h^0$,有

$$\|\delta^kU\|_p\leq K\|U\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}\left(\|\delta^nU\|_2+\frac{\|U\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}},\tag{11}$$

其中:$2\leq p\leq\infty,0\leq k<n,K$ 是一个与 U 无关的常数.

引理 6 对任何网格函数 $U\in Z_h^0$,有 $\mathrm{Re}((F(U)U)_{\hat{x}},U)=0$.

证明 对于 $U\in Z_h^0$,有

$$\mathrm{Re}((F(U)U)_{\hat{x}},U)=-\mathrm{Re}(F(U)U,U_{\hat{x}})=-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}(\bar{U}_{j+1}U_j+U_{j+1}\bar{U}_j+$$
$$\bar{U}_{j-1}U_j+U_{j-1}\bar{U}_j)U_j(\bar{U}_{j+1}-\bar{U}_{j-1})=0.\tag{12}$$

2 差分格式的建立和误差估计

对于非线性 Schrödinger 方程(2),假设 $u(x,0)\in H^1$,提出一种差分格式,步骤如下.

第一步:

$$U(x,0)=u(x,0).\tag{13}$$

第二步:对于 $j=0,1,\cdots,J$,

$$\mathrm{i}(U_j^1)_t+\frac{\alpha}{2}(U_j^1+U_j^0)_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(U_j^1+U_j^0)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(U_j^1+U_j^1)(U_j^1+U_j^0))_{\hat{x}}+$$
$$\frac{\delta}{8}F(U_j^1+U_j^1)(U_j^1+U_j^0)=0.\tag{14}$$

第三步:对于 $n=1,2,\cdots,N,j=0,1,\cdots,J$,

$$\begin{cases}\mathrm{i}(U_j^n)_{\hat{t}}+\frac{\alpha}{2}(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})(U_j^{n-1}+\\ U_j^{n+1}))_{\hat{x}}+\frac{\delta}{8}F(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})=0,\\ U_{j+J}^n=U_j^n.\end{cases}\tag{15}$$

定理 2 差分格式(13)~(15)式满足以下守恒律

$$\|U^n\|^2=\|U^{n-1}\|^2,\tag{16}$$

$$\|U_{\hat{x}}^1\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^0+U_j^1)|U_j^1|^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hU_j^1(\bar{U}_j^1)_{\hat{x}}=$$

$$\| U_{\hat{x}}^{0} \|^{2} - \frac{\gamma}{4\beta} \sum_{j=1}^{J} hF(U_{j}^{0} + U_{j}^{1}) \mid U_{j}^{0} \mid^{2} + (\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{\gamma}) \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{J} hU_{j}^{0} (\bar{U}_{j}^{0})_{\hat{x}}, \tag{17}$$

当 $n=1,2,\cdots,N$ 时:

$$\| U_{\hat{x}}^{n+1} \|^{2} - \frac{\gamma}{4\beta} \sum_{j=1}^{J} hF(U_{j}^{n+1} + U_{j}^{n-1}) \mid U_{j}^{n+1} \mid^{2} + \mathrm{Im}(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{\gamma}) \sum_{j=1}^{J} hU_{j}^{n+1} (\bar{U}_{j}^{n+1})_{\hat{x}} =$$

$$\| U_{\hat{x}}^{n-1} \|^{2} - \frac{\gamma}{4\beta} \sum_{j=1}^{J} hF(U_{j}^{n+1} + U_{j}^{n-1}) \mid U_{j}^{n-1} \mid^{2} + \mathrm{Im}(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{\gamma}) \sum_{j=1}^{J} hU_{j}^{n-1} (\bar{U}_{j}^{n-1})_{\hat{x}}. \tag{18}$$

证明 先证(16)式,第一步,$U(x,0)=u(x,0)$.

第二步,将差分格式(14)式与 $h(\bar{U}_{j}^{1}+\bar{U}_{j}^{0})$ 相乘并将 j 从 1 到 J 累加可得:

$$\mathrm{i}(U_{t}^{1}, U^{1}+U^{0}) + \frac{\alpha}{2}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}}, U^{1}+U^{0}) + \frac{\mathrm{i}\beta}{2}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, U^{1}+U^{0}) + \frac{\mathrm{i}\gamma}{8}((F(U^{1}+$$

$$U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}}, U_{j}^{1}+U_{j}^{0}) + \frac{\delta}{8}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}), U^{1}+U^{0}) = 0, \tag{19}$$

将(19)式左右两边取虚部并注意到:

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{i}(U_{t}^{1}, U^{1}+U^{0}) = \frac{1}{\tau}(\| U^{1} \|^{2} - \| U^{0} \|^{2}). \tag{20}$$

用 $(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}}$ 与 $U^{1}+U^{0}$ 作内积并取虚部:

$$\mathrm{Im}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}}, U^{1}+U^{0}) = -\mathrm{Im}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, (U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}) = 0. \tag{21}$$

由引理 1 及引理 6 可知:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\ \mathrm{i}\beta((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, U^{1}+U^{0}) = 0, \\ \mathrm{Im}\ \mathrm{i}((F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}}, U^{1}+U^{0}) = 0, \\ \mathrm{Im}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}), U^{1}+U^{0}) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

综合(20)~(22)式,有 $\| U^{1} \|^{2} = \| U^{0} \|^{2}$.

第三步,将差分格式(15)式与 $h(\bar{U}_{j}^{n+1}+\bar{U}_{j}^{n-1})$ 相乘并将 j 从 1 到 J 累加,与第二步类似的证明过程可得 $\| U^{n+1} \|^{2} = \| U^{n-1} \|^{2}, n=1,2,\cdots,N$.综合上述两个结果有:$\| U^{n} \|^{2} = \| U^{n-1} \|^{2}, n=1,2,\cdots,N$.

再证(17)及(18)式,先证 $n=0$ 时的情形,首先将差分方程(14)式代入以下式子,由引理 1 及引理 6 有:

$$\frac{1}{\tau} \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{J} h(U_{j}^{1}(\bar{U}_{j}^{1})_{\hat{x}} - U_{j}^{0}(\bar{U}_{j}^{0})_{\hat{x}}) = -\mathrm{Im}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} -$$

$$\frac{\gamma}{8}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}} + \frac{\mathrm{i}\delta}{8}F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0})) =$$

$$\frac{\gamma}{8}\mathrm{Im}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, (F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}}). \tag{23}$$

同样的,将差分方程(14)代入以下式子,由引理 1 及引理 6 有:

$$\frac{1}{\tau}(\| U_{\hat{x}}^{1} \|^{2} - \| U_{\hat{x}}^{0} \|^{2}) = \mathrm{Re}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} -$$

$$\frac{\gamma}{8}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{\mathrm{i}\delta}{8}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}}) =$$

$$-\frac{\gamma}{8}\mathrm{Re}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, (F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}\hat{x}}) +$$

$$\frac{\delta}{8}\mathrm{Im}((U^{1}+U^{0})_{\hat{x}}, (F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}))_{\hat{x}}). \tag{24}$$

通过类似的代换还有以下等式成立:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{J} hF(U_{j}^{0}+U_{j}^{1})(\mid U_{j}^{1} \mid^{2} - \mid U_{j}^{0} \mid^{2}) = \frac{1}{\tau}\mathrm{Re}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}), U^{1}-U^{0}) =$$

$$\mathrm{Re}(F(U^{1}+U^{0})(U^{1}+U^{0}), \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2}(U^{1}+U^{0})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} -$$

$$\frac{\gamma}{8}(F(U^1+U^0)(U^1+U^0))_{\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\delta}{8}F(U^1+U^0)(U^1+U^0))=$$
$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{Im}((U^1+U^0)_{\hat{x}},(F(U^1+U^0)(U^1+U^0))_{\hat{x}})-$$
$$\frac{\beta}{2}\mathrm{Re}((F(U^1+U^0)(U^1+U^0))_{\hat{x}\hat{x}},(U^1+U^0)_{\hat{x}}).\tag{25}$$

综合(23)～(25)式有：

$$\|U_{\hat{x}}^1\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^0+U_j^1)|U_j^1|^2+(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hU_j^1(\bar{U}_j^1)_{\hat{x}}=$$
$$\|U_{\hat{x}}^0\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^0+U_j^1)|U_j^0|^2+(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hU_j^0(\bar{U}_j^0)_{\hat{x}}.\tag{26}$$

与上面类似的证明过程可证：

$$\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^{n+1}+U_j^{n-1})|U_j^{n+1}|^2+\mathrm{Im}(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\sum_{j=1}^{J}hU_j^{n+1}(\bar{U}_j^{n+1})_{\hat{x}}=$$
$$\|U_{\hat{x}}^{n-1}\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^{n+1}+U_j^{n-1})|U_j^{n-1}|^2+\mathrm{Im}(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\sum_{j=1}^{J}hU_j^{n-1}(\bar{U}_j^{n-1})_{\hat{x}}.\tag{27}$$

定理 3 若 $h,\tau\to 0$,且 $u(x,t)\in C^{6,4}$,那么差分格式(5)的截断误差为：

$$\begin{cases}|r_j^0|=O(h^2+\tau),\|(r_j^0)_{\hat{x}}|=O(h^2+\tau),\\|r_j^n|=O(h^2+\tau^2),\|(r_j^n)_{\hat{x}}|=O(h^2+\tau^2),\|(r_j^n)_{\hat{t}}|=O(h^2+\tau^2)\quad n=1,2,\cdots,N.\end{cases}\tag{28}$$

证明 当 $n=0$ 时,截断误差的定义为：

$$r_j^0=\mathrm{i}(u_j^0)_t+\frac{\alpha}{2}(u_j^1+u_j^0)_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(u_j^1+u_j^0)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+$$
$$\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(U_j^0+U_j^1)(u_j^1+u_j^0))_{\hat{x}}+\frac{\delta}{8}F(U_j^0+U_j^1)(u_j^1+u_j^0),\tag{29}$$

将(29)式关于时间和空间在 u_j^0 处泰勒展开,易得：$|r_j^0|=O(h^2+\tau),\|(r_j^0)_{\hat{x}}|=O(h^2+\tau)$.

当 $n=1,2,\cdots,N-1$ 时,截断误差的定义为：

$$r_j^n=\mathrm{i}(u_j^n)_{\hat{t}}+\frac{\alpha}{2}(u_j^{n-1}+u_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(u_j^{n-1}+u_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(U_j^{n-1}+$$
$$U_j^{n+1})(u_j^{n-1}+u_j^{n+1}))_{\hat{x}}+\frac{\delta}{8}(F(U_j^{n-1}+U_j^{n+1}))(u_j^{n-1}+u_j^{n+1}),\tag{30}$$

将(30)式关于时间和空间在 u_j^n 处泰勒展开,易得：

$$|r_j^n|=O(h^2+\tau^2),\|(r_j^n)_{\hat{t}}|=O(h^2+\tau^2),\|(r_j^n)_{\hat{x}}|=O(h^2+\tau^2).\tag{31}$$

定理 4 差分格式(13)～(15)式的解 U^n 满足 $\|U^n\|_\infty\le C$.

证明 根据定理 2 有 $\|U^{n+1}\|_2=\|U^n\|_2=\|u(x,0)\|_2\le C$,另一方面,用数学归纳法证明 $\|U_{\hat{x}}^n\|_2\le C$,首先证明 $\|U_{\hat{x}}^1\|_2\le C$,根据(17)式,有：

$$\left|\|U_{\hat{x}}^1\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^0+U_j^1)|U_j^1|^2+(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hU_j^1(\bar{U}_j^1)_{\hat{x}}\right|=\left|\|U_{\hat{x}}^0\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hF(U_j^0+\right.$$
$$U_j^1)|U_j^0|^2+(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hU_j^0(\bar{U}_j^0)_{\hat{x}}\Big|\le\|U_{\hat{x}}^0\|^2+\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|\|U^0\|_\infty^2(\|U^0\|^2+$$
$$\|U^1\|^2)+\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|\sum_{j=1}^{J}h(|U_j^0|^2+|(U_j^0)_{\hat{x}}|^2)\le\|U_{\hat{x}}^0\|^2+C_1\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|(\|U^0\|+$$
$$\|U_{\hat{x}}^0\|)^2+\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|\sum_{j=1}^{J}h(|U_j^0|^2+|(U_j^0)_{\hat{x}}|^2)\le C.\tag{32}$$

同理,有：

$$\left|\|U_{\hat{x}}^1\|^2-\frac{\gamma}{4\beta}\sum_{j=0}^{J}hF(U_j^0+U_j^1)|U_j^1|^2+\mathrm{Im}(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma})\sum_{j=0}^{J}hU_j^1(\bar{U}_j^1)_{\hat{x}}\right|\ge\|U_{\hat{x}}^1\|^2-$$

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|\|U^1\|_\infty^2(\|U^0\|^2+\|U^1\|^2)-\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|\sum_{j=0}^{J}h(C(\varepsilon_2)|U_j^1|^2+$$

$$\varepsilon_2|(U_j^1)_{\hat{x}}|^2)\geq\|U_{\hat{x}}^1\|^2-\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|(C(\varepsilon_1)+\varepsilon_1C_4\|U_{\hat{x}}^1\|^2)-\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|\cdot$$

$$(C(\varepsilon_2)+\varepsilon_2\|U_{\hat{x}}^1\|^2)\geq(1-\varepsilon_1C_4\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|-\varepsilon_2\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|)\|U_{\hat{x}}^1\|^2+C_5.\tag{33}$$

根据(32)和(33)式，有：$(1-\varepsilon_1C_4\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|-\varepsilon_2\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}\right|)\|U_{\hat{x}}^1\|^2+C_5\leq C$，取适当的$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，可得：$\|U_{\hat{x}}^1\|_2\leq C$.同理当 $\|U_{\hat{x}}^{n-1}\|_2\leq C$ 成立时，易得 $\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|_2\leq C$.因此对于任意 n 均有 $\|U_{\hat{x}}^n\|^2\leq C$ 成立.综合两个式子以及引理 5 得到 $\|U^n\|_\infty\leq C$.

定理 1 的证明　先证明 $n=0$ 时的情形，由(2)式和(14)式，两式相减，其中截断误差：$|r^0|=O(h^2+\tau)$，且 $e^0=u^0-U^0=0$，有

$$\mathrm{i}(e_j)_t^1+\frac{\alpha}{2}(e_j^1)_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(e_j^1)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u_j^1+u_j^0)(u_j^0+u_j^1)-F(U_j^1+U_j^0)(U_j^0+U_j^1))_{\hat{x}}+$$

$$\frac{\delta}{8}(F(u_j^1+u_j^0)(u_j^0+u_j^1)-F(U_j^1+U_j^0)(U_j^0+U_j^1))=r^0,\tag{34}$$

首先将(34)式与 $h\bar{e}_j^1$ 相乘并累加，左右两边同时取虚部，分成 5 个部分分别来讨论，第 1 部分：$\mathrm{Im}(\mathrm{i}e_t^1,e^1)=\mathrm{Re}(e_t^1,e^1)=\frac{1}{\tau}\|e^1\|^2$，第 2 部分：$\mathrm{Im}(\alpha(e^1)_{\hat{x}\hat{x}}+\mathrm{i}\beta(e^1)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}},e^1)=0$，第 3 部分：

$$|\mathrm{Re}(((F(u_j^0+u_j^1)(u^0+u^1)-F(U_j^0+U_j^1)(U^0+U^1))_{\hat{x}},e^1)|=\left|\mathrm{Re}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{J}h(|u_j^0+u_j^1|^2(\bar{e}_{j+1}^1+\right.$$

$$\bar{e}_{j-1}^1)+(u_j^0+u_j^1)^2(\bar{e}_{j+1}^1+\bar{e}_{j-1}^1)+e_j^1(u_j^0+u_j^1)(\bar{U}_{j+1}^0+\bar{U}_{j-1}^0+\bar{U}_{j+1}^1+\bar{U}_{j-1}^1)+\bar{e}_j^1(u_j^0+$$
$$u_j^1)(U_{j+1}^0+U_{j-1}^0+U_{j+1}^1+U_{j-1}^1)+4e_j^1F(U_j^0+U_j^1))(\bar{e}_j^1)_{\hat{x}}\left.\right|\leq C_1(\|u^0\|_\infty^2+$$
$$\|u^1\|_\infty^2+\|U^0\|_\infty^2+\|U^1\|_\infty^2)(\|e_{\hat{x}}^1\|^2+\|e^1\|^2)\leq$$

$$C_2(\|e_{\hat{x}}^1\|^2+\|e^1\|^2)\leq\frac{C_2}{h^2}\|e^1\|^2+C_2\|e^1\|^2.\tag{35}$$

第 4 部分：

$$|\mathrm{Im}(F(u_j^0+u_j^1)(u^0+u^1)-F(U_j^0+U_j^1)(U^0+U^1)^2,e^1)|=\left|\mathrm{Im}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{J}h(|u_j^0+u_j^1|^2(\bar{e}_{j+1}^1+\right.$$

$$\bar{e}_{j-1}^1)+(u_j^0+u_j^1)^2(\bar{e}_{j+1}^1+\bar{e}_{j-1}^1)+e_j^1(u_j^0+u_j^1)(\bar{U}_{j+1}^0+\bar{U}_{j-1}^0+\bar{U}_{j+1}^1+\bar{U}_{j-1}^1)+\bar{e}_j^1(u_j^0+$$
$$u_j^1)(U_{j+1}^0+U_{j-1}^0+U_{j+1}^1+U_{j-1}^1)+4e_j^1F(U_j^0+U_j^1))\bar{e}_j^1\left.\right|\leq C_3(\|u^0\|_\infty^2+$$
$$\|u^1\|_\infty^2+\|U^0\|_\infty^2+\|U^1\|_\infty^2)\|e^1\|^2\leq C_3\|e^1\|^2.\tag{36}$$

第 5 部分：$|\mathrm{Im}(r^0,e^1)|\leq\|r^0\|^2+\|e^1\|^2$.综合上述几个式子，有：$\|e^1\|^2\leq\tau(\frac{C_4}{h^2}+C_5)\|e^1\|^2+C_6\tau\|r^0\|^2$，又因 $\|r^0\|=O(\tau+h^2)$，取适当的 τ，使得 $1-\tau(\frac{C_4}{h^2}+C_5)=\frac{1}{2}$，即得 $\|e^1\|\leq O(\tau^2+h^2)$.

下面讨论 $n=1,2,\cdots,N$ 时的情形，对于 $n=1,2,\cdots,N$，有 $\|r^n\|_2=O(h^2+\tau^2)$，由(2)式和(15)式，两式相减：

$$\mathrm{i}(e_j^n)_{\hat{t}}+\frac{\alpha}{2}(e_j^{n-1}+e_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(e_j^{n-1}+e_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u_j^{n-1}+u_j^{n+1})(u_j^{n-1}+$$

$$u_j^{n+1})-F(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})(U_j^{n-1}+U_j^{n+1}))_{\hat{x}}+\frac{\delta}{8}(F(u_j^{n-1}+u_j^{n+1})(u_j^{n-1}+$$

$$u_j^{n+1})-F(U_j^{n-1}+U_j^{n+1})(U_j^{n-1}+U_j^{n+1}))=r_j^n,\tag{37}$$

将(37)式与 $h(\bar{e}_j^{n+1}+\bar{e}_j^{n-1})$ 相乘取虚部，并将 j 从 1 到 J 进行累加，与 $n=0$ 时的情形类似的：

$$\| e^{n+1} \|^2 - \| e^{n-1} \|^2 \leq \tau(\frac{C_4}{h^2} + C_5)(\| e^{n+1} \|^2 + \| e^{n-1} \|^2) + C_6 \tau \| r^n \|^2. \tag{38}$$

将(38)式从 1 加到 n,当 τ,h 取适当值时,根据离散的 Gronwall 不等式,即得 $\| e^{n+1} \| \leq O(\tau^2 + h^2)$.

先算 $n=0$ 时的情形,将(14) 式与 $h(\bar{e}_j^1)_t$ 相乘累加并取实部,第 1 部分:$\mathrm{Re}(\mathrm{i}e_t^1, e_t^1) = -\mathrm{Im}(e_t^1, e_t^1) = 0$. 第 2 部分:$\mathrm{Re}((e^1 + e^0)_{\hat{x}\hat{x}}, e_t^1) = -\frac{1}{\tau} \| e_{\hat{x}}^1 \|^2$.

第 3 部分:

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}(\mathrm{i}\beta e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, e_t^1)| = |\mathrm{Re}(\mathrm{i}\beta e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - \frac{\gamma}{8}(F(u^0 + u^1)(u^0 + u^1) - F(U^0 + \\
&U^1)(U^0 + U^1))_{\hat{x}} + \frac{\mathrm{i}\delta}{8}(F(u^0 + u^1)(u^0 + u^1) - F(U^0 + U^1)(U^0 + U^1)) - \mathrm{i}r^0))| = \\
&|-\mathrm{Im}\frac{\beta\gamma}{8}(e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, (F(u^0 + u^1)(u^0 + u^1) - F(U^0 + U^1)(U^0 + U^1))_{\hat{x}}) + \mathrm{Re}\frac{\beta\delta}{8}(e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, (F(u^0 + \\
&u^1)(u^0 + u^1) - F(U^0 + U^1)(U^0 + U^1))) - \mathrm{Re}\frac{\beta}{2}(e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, r^0)| \leq C_0(\| u^0 + u^1 \|_\infty \| U^0 + \\
&U^1 \|_\infty + \| |U^0 + U^1|^2 \|_\infty + \| |u^0 + u^1|^2 \|_\infty) \cdot (\| e^1_{\hat{x}\hat{x}} \|^2 + \| e^1_{\hat{x}} \|^2) + \\
&C_1(\| e^1_{\hat{x}} \|^2 + \| e^1_{\hat{x}\hat{x}} \|^2) + C_2 \| r^0_{\hat{x}} \|^2 \leq C_3 \| e^1_{\hat{x}} \|^2 + \frac{C_3}{h^2} \| e^1_{\hat{x}} \|^2 + C_2 \| r^0_{\hat{x}} \|^2.
\end{aligned} \tag{39}$$

第 4 部分:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1) - F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1)))_{\hat{x}}, e_t^1)\right| = |\mathrm{Re}\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}((F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + \\
&u^1) - F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1))_{\hat{x}}, \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} + \frac{\gamma}{8}(F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1) - F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + \\
&U^1))_{\hat{x}} - \frac{\mathrm{i}\delta}{8} F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1) - F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - ir^0)| = |\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u_j^0 + \\
&u_j^1)(u^0 + u^1) - F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1))_{\hat{x}}, \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - \mathrm{i}r^0)| \leq C_0(\| u^0 + u^1 \|_\infty \| U^0 + \\
&U^1 \|_\infty + \| |U^0 + U^1|^2 \|_\infty + \| |u^0 + u^1|^2 \|_\infty)(\| e^1_{\hat{x}\hat{x}} \|^2 + \| e^1_{\hat{x}} \|^2) + (\| u^0 + \\
&u^1 \|_\infty \| U^0 + U^1 \|_\infty + \| |U^0 + U^1|^2 \|_\infty + \| |u^0 + u^1|^2 \|_\infty)(\| e^1_{\hat{x}\hat{x}} \|^2 + \\
&\| e^1_{\hat{x}} \|^2) + C_1(\| e^1 \|^2 + \| r^0_{\hat{x}} \|^2) \leq C_2 \| e^1_{\hat{x}} \|^2 + \frac{C_3}{h^2} \| e^1_{\hat{x}} \|^2 + C_4 \| r^0_{\hat{x}} \|^2.
\end{aligned} \tag{40}$$

第 5 部分:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Re}(\frac{\delta}{8}((F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1)), (e^n)_t)\right| = |\mathrm{Re}(\frac{\delta}{8}(F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - \\
&F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1), \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}) - \frac{\gamma}{8}(F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1))_{\hat{x}}) + \\
&\frac{\mathrm{i}\delta}{8}(F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1)) - \mathrm{i}r^0)| = |\mathrm{Re}(\frac{\delta}{8}(F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - \\
&F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1), \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{\beta}{2} e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - \mathrm{i}r^0)| = |\frac{\alpha\delta}{16}\mathrm{Re}((F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - \\
&F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + u^1), e^1_{\hat{x}\hat{x}}) + \mathrm{Im}\frac{\beta\delta}{16}((F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + \\
&u^1), e^1_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}})| - \mathrm{Im}\frac{\delta}{8}((F(U_j^0 + U_j^1)(U^0 + U^1) - F(u_j^0 + u_j^1)(u^0 + \\
&u^1), r^0)| \leq C_0((\| u^0 + u^1 \|_\infty \| U^0 + U^1 \|_\infty + \| U^0 + U^1 \|^2_\infty + \| u^0 + \\
&u^1 \|^2_\infty) \| e^1_{\hat{x}} \|^2 + (\| u^0 + u^1 \|_\infty \| U^0 + U^1 \|_\infty + \| U^0 + U^1 \|^2_\infty + \| u^0 +
\end{aligned}$$

$$u^1\|_\infty^2)(\|e^1_{\hat{x}\hat{x}}\|^2+\|e^1_{\hat{x}}\|^2)+(\|u^0+u^1\|_\infty\|U^0+U^1\|_\infty+\|U^0+U^1\|_\infty^2+\|u^0+u^1\|_\infty^2)(\|e^1\|^2+\|r^0\|^2))\le C_2\|e^1_{\hat{x}}\|^2+\frac{C_3}{h^2}\|e^1_{\hat{x}}\|^2+C_4\|r^0\|^2. \tag{41}$$

第 6 部分：

$$|\tau(r^0,e^1_{\hat{t}})|=|\tau\sum_{j=1}^{J}h(r^0_j)(\bar{e}^1_j)|\le\tau O(\tau+h^2)(\tau^2+h^2). \tag{42}$$

故

$$\|e^1_{\hat{x}}\|^2\le\tau(C_1\|e^1_{\hat{x}}\|^2+\frac{C_2}{h^2}\|e^1_{\hat{x}}\|^2+C_3\|r^0_{\hat{x}}\|^2+C_4\|r^0_{\hat{x}}\|^2+O(\tau+h^2)(\tau^2+h^2)). \tag{43}$$

综上，当 τ,h 取适当值时，有 $\|e^1_{\hat{x}}\|\le O(\tau^2+h^2)$.当 $n=1,2,\cdots,N$ 时，将差分格(37)式两边与 $h(\bar{e}^n_j)_{\hat{t}}$ 相乘并累加：

$$(\mathrm{i}e^n_{\hat{t}}+\frac{\alpha}{2}(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\beta}{2}(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u^{n-1}+u^{n+1})(u^{n-1}+u^{n+1})-F(U^{n-1}+U^{n+1})(U^{n-1}+U^{n+1}))_{\hat{x}}+\frac{\delta}{8}(F(u^{n-1}+u^{n+1})(u^{n-1}+u^{n+1})-F(U^{n-1}+U^{n+1})(U^{n-1}+U^{n+1})),e^n_{\hat{t}})=(r^n,e^n_{\hat{t}}). \tag{44}$$

下面分成几个部分分别来估计，第 1 部分：$\mathrm{Re}(\mathrm{i}e^n_{\hat{t}},e^n_{\hat{t}})=-\mathrm{Im}(e^n_{\hat{t}},e^n_{\hat{t}})=0$.第 2 部分：$\mathrm{Re}(\alpha(e^{n+1}+e^{n-1})_{\hat{x}\hat{x}},e^n_{\hat{t}})=-\frac{1}{2\tau}\mathrm{Re}(\|e^{n+1}_{\hat{x}}\|^2-\|e^{n-1}_{\hat{x}}\|^2)$.第 3、4、5 部分，与 $n=0$ 时类似的估计有

$$|\mathrm{Re}(\mathrm{i}\beta(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}},e^n_{\hat{t}})|\le(C_1+\frac{C_2}{h^2})\|(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}}\|^2+C_3\|r^n_{\hat{x}}\|^2, \tag{45}$$

$$\left|\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{i}\gamma}{8}(F(u^{n-1}+u^{n+1})(u^{n-1}+u^{n+1})-F(U^{n-1}+U^{n+1})(U^{n-1}+U^{n+1})))_{\hat{x}},e^n_{\hat{t}})\right|\le C_1\|(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}}\|^2+\frac{C_2}{h^2}\|(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}}\|^2+C_3\|r^n_{\hat{x}}\|^2, \tag{46}$$

$$\left|\mathrm{Re}(\frac{\delta}{8}((F(U^{n-1}+U^{n+1})(U^{n-1}+U^{n+1})-F(u^{n-1}+u^{n+1})(u^{n-1}+u^{n+1})),(e^n)_{\hat{t}})\right|\le C_2\|(e^{n-1}+e^{n+1})_{\hat{x}}\|^2+\frac{C_3}{h^2}\|(e^{n-1}+e^{n+1})\|^2+C_4\|r^n_{\hat{x}}\|^2. \tag{47}$$

第 6 部分，根据引理 3：

$$|2\tau\sum_{n=1}^{N}(r^n,e^n_{\hat{t}})|=|2\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}h(r^n_j)(\bar{e}^n_j)_{\hat{t}})|=h\sum_{j=1}^{J}(-2\bar{e}^0_jr^1_j-2\bar{e}^1_jr_j{}^2-\tau\sum_{n=2}^{N-1}\bar{e}^n_j(r^n_j)_t+2\bar{e}^N_jr^{N-1}_j+2\bar{e}^{N+1}_jr^N_j)=\|e^1\|+\|r^2\|+\tau\sum_{n=2}^{N-1}\|e^n\|^2+\tau\sum_{n=2}^{N-1}\|r^n\|+\|e^{N+1}\|^2+\|r^N\|^2\le O(\tau^2+h^2)^2. \tag{48}$$

综上，有：

$$(\|e^{n+1}_x\|^2+\|e^n_x\|^2)\le\|e^1_x\|^2+C_1\tau\sum_{n=1}^{N}(\|e^{n-1}_x\|^2)+\sum_{n=1}^{N}\tau O(\tau^2+h^2)^2+O(\tau^2+h^2)^2. \tag{49}$$

根据 Gronwall 不等式，即得 $\|e^n_x\|_2\le O(\tau^2+h^2)$，然后根据引理 5，即得 $\|e^n\|_\infty\le O(\tau^2+h^2)$.

参 考 文 献

[1] ABDUL M S，DIANCHEN L.Soliton Solutions of Higher Order Dispersive Cubic-Quintic Nonlinear Schrodinger Equation and its Applications[J].Chinese Journal of Physics，2019，10.1016/j.cjph.2019.10.003.

[2] ALY R S，DIANCHEN L.Bright and dark solitary wave soliton solutions for the generalized higher order nonlinear Schrödinger equation and its stability[J].Results in Physics，2017，7(12)：43-48.

[3] HASEGWA A,TAPPERT F.Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers[J].Applied Physics Letters,1973,3(23):142-144.

[4] AKRIVIS G D,DOUGALIS V A,KARAKASHINA O A.On fully discrete Galerkin methods of second-order temporal accuacy for the nonlinear Schrödinger equation[J].Numerische Mathematik,1991,59(1):31-53.

[5] KARAKASHIAN O A,AKRIVIS G D,DOUGALIS V A.On optimal order error estimates for the nonlinear Schrödinger equation[J].Siam Journal on Numerical Analysis,1993,30(2):377-400.

[6] TOURIGNY Y.Some pointwise estimates for the finite element solution of a radial nonlinear Schrödinger equation on a class of nonuniform grids[J].Numerical Methods for Partial Differential Equations,1994,10(6):757-769.

[7] ZHOU Y L.Applications of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Method[M].Beijing: International Academic Publishers,1990.

[8] HOSSEINI F,POUYAFAR V,SADOUGH S A.Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger[C]// World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS),Wisconsin:[s.n.],2009:92-97.

[9] XIE S S,Li G X,Yi S.Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional onlinear Schrödinger equation[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2009,198(9/10/11/12):1052-1060.

[10] WANG T C,GUO B L.Unconditional convergence of two conservative compact difference schemes for non-linear Schrödinger equation in one dimension[J].Scientia Sinica Mathematica,2011,41(3):207-233.

[11] MAO H R,CHENG J Z.A linearly implicit conservative scheme for the fractional nonlinear Schrödinger equation with wave operator International[J].Journal of Computer Mathematics,2016,93(14):1103-1118.

[12] BISWAS A,JAWAD A J M.Optical solitons and complexitons of the Schrödinger-Hirota equation[J].Optics And Laser Technology,2012,44(7):2265-2269.

[13] ACHILLEOS V,DIAMANTIDIS S,FRANTZESKAKIS D J,et al.Conservation laws,exact traveling waves and modulation instability for an extended nonlinear Schrödinger equation[J].Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,2015,48(7):355205-355237.

[14] GEORGIOS E,ZOURARIS A.Linear Implicit Finite Difference Discretization of the Schrödinger-Hirota Equation[J].Journal of Scientific Computing,2018,77(6):634-656.

[15] 郭柏灵,谭绍滨.Hirota 型非线性发展方程的整体光滑解[J].中国科学(A 辑),1992,35(8):804-811.
GUO B L,TAN S B.Global smooth solution of Hirota type nonlinear evolution equation[J]Science in China,Ser.A,1992,35(8):804-811.

Numerical solution to a kind of the nonlinear Schrödinger equation

Li Yongsheng,Xiang Shaoting,Fu Yiping

(School of Mathematics,South China University of Technology,Guangzhou 510640,China)

Abstract:In this paper, the numerical solution to a initial periodic boundary value problem for a kind of nonlinear Schrödinger equation has been studied.We propose a new implicit difference scheme preserving conservations of the mass and energy.It is proved that the solution of difference solution converges to the exact solution of original problem with $O(\tau^2+h^2)$ in L^∞ norm,where τ is the time-step and h is the space-step.

Keywords:nonlinear Schrödinger equation;difference scheme;conservation;convergence

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

李用声，华南理工大学数学学院二级教授，博士生导师.主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究工作，涉及的方程有非线性色散方程和方程组(如 Schrödinger 方程及其方程组)、流体力学方程组等，研究内容包括这些方程和方程组的解的存在性、唯一性、爆破性、衰减性、整体吸引子的存在性及其分形维数估计等.在国内外重要学术刊物上发表论文 90 余篇，SCI 收录约 70 篇.先后主持 5 项国家自然科学基金，参加 1 项国家自然科学基金重点项目.曾被评为湖北省跨世纪学术骨干，作为主要完成人获得过国防科工委科技进步一等奖，曾获得全国优秀博士学位论文提名奖指导教师称号.

薛占熬，河南师范大学三级教授，博士，硕士生导师，全国模范教师，河南省高新技术企业认定技术专家，河南省中等职业教育师资培训专家库成员，河南省教师教育专家，河南省高级专家库成员，河南省院士专家工作促进会成员，中国人工智能基础专业委员会常务委员、副秘书长，中国粒计算与知识发现专业委员会委员，中国自动化学会粒计算与多尺度分析专业委员会委员.发表学术论文 50 余篇，其中，SCI 收录 12 篇，EI 收录 6 篇.参与完成国家自然基金 3 项，主持完成河南省重点科技攻关等省级项目 4 项.曾获得陕西省科技进步三等奖1 项，河南省教育厅科学技术成果一等奖 2 项，河南省自然科学优秀学术论文二等奖 3 项、三等奖5 项.

朱桂芬，河南师范大学环境学院教授，博士，博士生导师，河南省教育厅学术技术带头人，河南省高校科技创新团队带头人，河南省高等学校青年骨干教师，河南省化学学会理事.主要从事环境污染物分离分析研究工作，先后主持国家自然科学基金 2 项、河南省高校科技创新团队支持计划 1 项，河南省重点科技攻关计划等省级项目 5 项；在 *J Hazard Mater*，*Nanoscale*，*J Chromatogr A*，*Talanta*，*Sci Total Environ*，*J Alloy Compd*，*Dalton T*，*RSC Adv*，*Environ Sci Pollut R* 等国内外期刊上发表 SCI 收录论文 30 余篇，授权国家发明专利 8 件，获河南省科技进步二等奖 1 项，河南省自然科学优秀学术论文一、二等奖 3 项.