文章编号:1000-2367(2023)03-0090-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.03.011

基于 q-高斯过程下的带红利欧式期权定价

刘利敏,闫钰蕾

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:研究了 q-高斯过程下带分红的欧式期权定价及参数估计问题.首先得到不同分红情形下的定价公式,对于按照红利率情形的分红问题,通过求解带分红的随机微分方程得到对应的欧式看涨期权的定价公式;对于离散分红的情形,通过构造套期保值策略,导出带有离散分红的期权定价公式.然后研究 q-高斯过程中的参数估计问题.对于 q,使用 R/S 分析法估计出 Hurst 指数 H 的值,再通过 q 与 H 之间的关系估计出 q;采用矩估计得到 μ,σ 的估计量,并证明 μ 估计量的无偏性.最后进行模拟分析,并利用微软公司的股票价格以及期权价格进行实证分析.

关键词:欧式期权;q-高斯过程;分红;参数估计

中图分类号:O29 **文献标志码**:A

在金融市场的发展进程中,期权既具有套期保值、规避风险等作用,又具有灵活性和多变性等特点,所以成为金融市场上最具潜力的金融衍生产品.1973 年,BLACK 等[1]导出了著名的 Black-Scholes 期权定价公式,MERTON[2]在 B-S 模型的基础上引入 Poisson 跳过程来刻画股票价格过程存在跳跃的情况,并考虑了股票以红利率形式支付分红的情况,导出了支付分红的欧式期权定价公式,从而将分红问题引入期权定价理论研究中.1975 年,BLACK[3]又提出了离散分红的情形,并指出标的股票的初始价格是其实际价格减去分红现值.基于无套利条件,2002 年,CHANCE[4]考虑了股票离散分红的欧式期权定价问题,并假设存在标的资产为股票未来分红的分红远期合约,从而构建投资组合.然而,只有在有分红的情况下,这种分红远期合同才有意义,使得该研究方法具有局限性.基于 CHANCE[4]的结论,MATOS 等[5]改进了其投资组合策略构造了新的套期保值策略,该策略包括基本资产、无风险零息债券和股息条.由于市场上不会存在偶然构建的分红远期合约,所以,Matos 的策略更为合理.

经典的期权定价研究中股票的价格都是布朗运动驱动的,无法刻画价格的长相依性,因此很多学者改进了价格模型.文献[6-8]都用分数布朗运动代替布朗运动刻画长记忆性;文献[9-12]用 q-高斯过程代替布朗运动刻画长记忆性.

1 基于 q-高斯过程的带红利欧式期权定价

假设市场中有两类资产,一类是无风险资产,如无风险债券,t 时刻的价格为 B_t,满足 $\mathrm{d}B_t=rB_t\mathrm{d}t$.另一类是风险资产,假设为股票,$t$ 时刻的股票价格为 S_t,满足

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}\Omega(t). \tag{1}$$

其中 $\Omega(t)$ 遵循以下随机过程

$$\mathrm{d}\Omega(t)=P(\Omega(t),t)^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t, \tag{2}$$

其中 r 为无风险利率,W_t 为零均值高斯白噪声,当 $q=1$ 时,为标准布朗运动.$P(\Omega(t),t)$ 的形式如下,

$$P(\Omega(t),t)=\frac{1}{Z(t)}[1-\beta(t)(1-q)\ \Omega^2(t)]^{\frac{1}{1-q}}.$$

收稿日期:2022-05-04;**修回日期**:2022-12-27.

基金项目:国家社科基金(18BJY247).

作者简介(通信作者):刘利敏(1971-),女,河南安阳人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为金融统计,E-mail:llim2004@163.com.

其中 $\beta(t)=c^{\frac{1-q}{3-q}}[(2-q)(3-q)t]^{\frac{-2}{3-q}}$，$Z(t)=[(2-q)(3-q)ct]^{\frac{1}{3-q}}$，$c=\dfrac{\pi}{q-1}\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{2})}{\Gamma^2(\frac{1}{q-1})}$.将过程(2)称为 q-高斯过程.考虑以股票为标的资产的期权为欧式看涨期权，到期时间为 $T(T>t)$，敲定价格为 K，该期权 t 时刻的价格记为 C_t.

引理 1[11]　股票价格由 q-高斯过程驱动的欧式看涨期权定价公式为

$$C_t=S_tM_q(\gamma_1,\gamma_2)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N_q(\gamma_1,\gamma_2).\tag{3}$$

其中

$$M_q(\gamma_1,\gamma_2)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\exp(\sigma\Omega(T)-\frac{\sigma^2}{2}\hat{\delta}(\Omega(T),T))P(\Omega(T),T)\mathrm{d}\Omega(T)),$$

$$N_q(\gamma_1,\gamma_2)=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}P(\Omega(T),T)\mathrm{d}\Omega(T),$$

$$\hat{\delta}(\Omega(T),T)=d_1(q)T^{\frac{2}{3-q}}+d_2(q)\Omega^2(T)+d_3(q)T^{\frac{2}{3-q}}\Omega^2(T)+d_4(q),\tag{4}$$

$$\gamma_1=\frac{-a_2-\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_1a_2},\gamma_2=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_1a_2},a_1=-\frac{\sigma^2}{2}d_2(q)+d_3(q)T^{\frac{2}{3-q}},$$

$$a_2=\sigma,a_3=(r-\alpha)(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}d_1(q)(T-t)^{\frac{2}{3-q}}-\frac{\sigma^2}{2}d_4(q)-\ln(\frac{K}{S_t}).$$

理论上的分红方式有两种：一种是连续分红，即每年按一定比例将股票或其他资产获得的利润支付给投资者，这个比例称为红利率，在本文用 α 表示；另一种分红方式是离散分红，可以是固定时刻固定分红的分红方式，也可以是离散随机分红，离散随机分红又分为分红值随机，或者随机时刻产生固定分红.

1.1　连续红利的期权定价

定理 1　令红利率为 α，标的资产为持续分红的股票，当敲定价格为 K，到期日为 T 时的欧式看涨期权的价格为

$$C_t=\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}S_tM_q(\gamma_1,\gamma_2)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N_q(\gamma_1,\gamma_2).\tag{5}$$

这里 $M_q(\gamma_1,\gamma_2)$ 和 $N_q(\gamma_1,\gamma_2)$ 由式(4) 给出.

证明　为了得到连续分红的期权定价，首先考虑一个不带分红情况的投资组合，假设 h_1 是在 t 时对股票 S 的投资额，h_2 是在 t 时对期权 C 的投资额.然后，投资组合的总资产 Q 在时间 t 满足

$$Q=h_1+h_2.\tag{6}$$

在时间 $t+\mathrm{d}t$，投资组合的回报是

$$\mathrm{d}Q=h_1\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}+h_2\frac{\mathrm{d}C_t}{C_t}.\tag{7}$$

这里 $\mathrm{d}S_t/S_t$ 和 $\mathrm{d}C_t/C_t$ 分别代表股票和期权在$[t,t+\mathrm{d}t]$时间段内的收益. 根据 Itô 公式

$$\mathrm{d}C_t=\frac{\partial C_t}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial C_t}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2C_t}{\partial S_t^2}[\mathrm{d}S_t]^2=(\mu S_t\frac{\partial C_t}{\partial S_t}+\frac{\partial C_t}{\partial t}+$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2P^{(1-q)}\frac{\partial^2C_t}{\partial S_t^2})\mathrm{d}t+\sigma S_tP^{\frac{1-q}{2}}\frac{\partial C_t}{\partial S_t}\mathrm{d}W_t.$$

令 $\beta C_t=\mu S_t\dfrac{\partial C_t}{\partial S_t}+\dfrac{\partial C_t}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2P^{(1-q)}\dfrac{\partial^2C_t}{\partial S_t^2}$，$\phi C_t=\sigma S_tP^{\frac{1-q}{2}}\dfrac{\partial C_t}{\partial S_t}$，可得

$$\mathrm{d}C_t=\beta C_t\mathrm{d}t+\phi C_t\mathrm{d}W_t.\tag{8}$$

由式(1)、(2)和(8)有

$$\mathrm{d}Q=h_1(\mu\mathrm{d}t+\sigma P^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t)+h_2(\beta\mathrm{d}t+\phi\mathrm{d}W_t)=(\mu h_1+\beta h_2)\mathrm{d}t+(\sigma h_1P^{\frac{1-q}{2}}+\phi h_2)\mathrm{d}W_t.\tag{9}$$

适当的 h_1 和 h_2 使投资组合无风险，因此式(9) 中 $\mathrm{d}W_t$ 之前的系数应为 0，即

$$\sigma h_1 P^{\frac{1-q}{2}} + \phi h_2 = 0. \tag{10}$$

根据式(6)得 $\mathrm{d}Q = (\mu h_1 + \beta h_2)\mathrm{d}t = Q(\frac{\mu h_1 + \beta h_2}{Q})\mathrm{d}t = Q(\frac{\mu h_1 + \beta h_2}{h_1 + h_2})\mathrm{d}t$. 由无套利原则,

$$\frac{\mu h_1 + \beta h_2}{h_1 + h_2} = \frac{\mu h_1}{h_1 + h_2} + \frac{\beta h_2}{h_1 + h_2} = r. \tag{11}$$

令 $g_1 = h_1/(h_1 + h_2)$, $g_2 = h_2/(h_1 + h_2)$, 则

$$g_1 + g_2 = 1. \tag{12}$$

由式(10)和(12)可知 $g_1 = \frac{\phi}{\phi - \sigma P^{\frac{1-q}{2}}}$, $g_2 = \frac{-\sigma P^{\frac{1-q}{2}}}{\phi - \sigma P^{\frac{1-q}{2}}}$.将 g_1 和 g_2 代入式(11) 得:

$$\mu\phi - \sigma\beta P^{\frac{1-q}{2}} = r(\phi - \sigma P^{\frac{1-q}{2}}).$$

通过分别替换 β 和 ϕ 的值,得到期权价格 C_t 满足

$$rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 P^{1-q} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} - rC_t = 0. \tag{13}$$

式(13)即为股票价格由 q-高斯过程驱动的 Black-Scholes 微分方程.

经典的 B-S 微分方程为 $rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} - rC_t = 0$.其解为 $C_t = S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2)$. 其中 $N(x)$表示标准正态分布的累积分布函数.类比可知由 q-高斯过程驱动的欧式看涨期权定价公式

$$C_t = S_t M_q(\gamma_1, \gamma_2) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N_q(\gamma_1, \gamma_2).$$

为微分方程(13)的解,其中参数值由式(4)给出.

下面给出在 q-高斯过程下带红利率的欧式看涨期权的定价公式.根据式(10)和(11),有

$$\frac{\beta - r}{\mu - r} = \frac{\phi}{\sigma P^{\frac{1-q}{2}}}. \tag{14}$$

设 D_t 为单位时间的分红,在式(1) 中 μ 为预期收益率,则分红后的预期收益率为 $\mu - D_t/S_t$,假设分红后的期权价格函数为 $C(S_t, t)$, 根据 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}C = \frac{\partial C}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}[\mathrm{d}S_t]^2 = ((\mu S_t - D_t)\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 P^{(1-q)} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2})\mathrm{d}t + \sigma S_t P^{\frac{1-q}{2}} \frac{\partial C}{\partial S_t}\mathrm{d}W_t.$$

由 β 和 ϕ 的定义,有

$$\beta C = (\mu S_t - D_t)\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 P^{(1-q)} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}, \phi C = \sigma S_t P^{\frac{1-q}{2}} \frac{\partial C}{\partial S_t}. \tag{15}$$

通过应用式(14)和(15),可以得到期权定价的带红利的随机微分方程

$$(rS_t - D_t)\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 P^{1-q} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - rC = 0. \tag{16}$$

MERTON[2] 在带分红的股票价格由布朗运动驱动情况下的随机微分方程为

$$(rS_t - D_t)\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - rC = 0. \tag{17}$$

当 $D_t = \alpha S_t$ 时,所得到的在布朗运动下具有连续红利率 α 的期权定价公式为

$$W = \mathrm{e}^{-\alpha T} SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT} N(d_2).$$

根据文献[2]得到的带分红的期权定价公式,结合式(3)类比推导出方程(16)的解为

$$C_t = \mathrm{e}^{-\alpha T} S_t M_q(\gamma_1, \gamma_2) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N_q(\gamma_1, \gamma_2).$$

1.2 离散分红的期权定价

由于采用连续红利率的形式进行分红属于较为理想的分红方式，所以大部分股票采用的都是在固定时间进行离散分红.假设在时刻 τ 进行分红.如果 $\tau > T$，则在周期$[0,T]$之内不存在分红，所以如果想要获得分红则需 $\tau < T$.分红时间前后，股票价格都会出现"跳"的情况.为了研究离散化分红，假设分红时刻 τ 是随机的，分红额度为 D_τ，未来股息的预期现值可以通过 $D_t(\tau)=E[D_\tau \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \mid \mathscr{F}_t]$ 来观察，这里 $\mathscr{F}_t$ 是时间 t 的 σ-域. 根据 CHANCE[4] 的研究，在标准布朗运动过程下，建立了具有离散随机红利的欧式期权定价公式，把股票价格用带固定分红的新的方式做了替代，所以得到

$$C=(S_t-D_t(\tau))N(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2).$$

根据上式，可以推及股票价格由 q-高斯过程驱动的带离散分红的欧式看涨期权定价公式.

定理 2 行权价格为 K，到期日为 T，带离散分红的欧式看涨期权在 τ 时间的价格为

$$C_t=(S_t-D_t(\tau))M_q(\gamma_1,\gamma_2)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N_q(\gamma_1,\gamma_2). \tag{18}$$

文献[5]改进了文献[4]的投资组合策略，但是结果没有改变.并且文献[5]构建的投资组合已被证明是连续的，自融资的，而且可以复制到期时看涨期权的价值.所以采用与文献[5]相同的投资策略，即可得到 q-高斯过程下具有离散分红的期权定价公式(18)，在此不做过多阐述.

2 q-高斯过程的参数估计

将式(2)代入式(1)可得：

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t P(\Omega(t),t)^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t. \tag{19}$$

式(19)中含有 3 个待估参数，分别为 μ,σ,q.由于同时对 3 个参数进行估计比较困难，所以将其分开来估计.

首先是对参数 q 的估计.由于 q-高斯过程具有长记忆性，所以可以通过已有的 R/S(重标度分析)法来得到 Hurst 指数的估计 $\hat{H}$.然后利用文献[10]得到的 H 与 q-高斯过程中的指数 q 之间的关系 $H=\dfrac{1}{3-q}$，可得 q 的估计量

$$\hat{q}=3-\frac{1}{\hat{H}}.$$

接下来对参数 μ 进行估计.μ 在股票价格模型 $\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}\Omega(t)$ 中被称作"漂移率"，其在市场中的实际意义表示在单位时间内股票价格 S 的瞬间变化的期望值，根据其实际意义来进行近似矩估计，令 S_i 表示第 i 时刻的股票价格，则 $\mu=E\dfrac{S_t-S_s}{S_s(t-s)}$.将上述期望进行离散后，得到漂移率 μ 的估计量 $\hat{\mu}$ 为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{S_{(i+1)\Delta}-S_{i\Delta}}{\Delta S_{i\Delta}}\right).$$

最后是波动率 σ.根据伊藤公式，

$$\mathrm{d}(\ln S_t)=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2P(\Omega(t),t)^{1-q})\mathrm{d}t+\sigma P(\Omega(t),t)^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t.$$

将区间 $[0,T]$ 进行划分，令 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$，对式子两边在$[t_i,t_{i+1}]$上进行积分，令 $\Delta=t_{i+1}-t_i$，则

$$\ln S_{t_{i+1}}=\ln S_{t_i}+\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2P(\Omega(t),t)^{1-q})\mathrm{d}t+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sigma P(\Omega(t),t)^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t. \tag{20}$$

其期望为 $E(\ln S_{t_{i+1}})\ln S_{t_i}+\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2P(\Omega(t),t)^{1-q})\mathrm{d}t$.利用文献[10]中的 $\mathrm{Var}(\Omega(t))=\dfrac{1}{(5-3q)\beta(t)}$ 得到式(20)方差可近似为

$$\mathrm{Var}(\ln S_{t_{i+1}})=E[(\ln S_{t_{i+1}}-E(\ln S_{t_{i+1}})^2]=E[(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sigma P(\Omega(t),t)^{\frac{1-q}{2}}\mathrm{d}W_t)^2]=$$

$$E[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sigma^2Z(t)^{q-1}[1-\beta(t)(1-q)\Omega(t)^2\mathrm{d}t]]\approx E[\sigma^2Z(t_i)^{q-1}[1-\beta(t_i)(1-q)\Omega(t_i)^2\Delta]]=$$

$$\sigma^2 Z(t_i)^{q-1}[1-\beta(t_i)(1-q)]\frac{1}{(5-3q)\beta(t_i)}\Delta.$$

根据矩估计,令 $\mathrm{Var}(\ln S_{t_{i+1}})=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\ln S_{t_{i+1}}-\overline{\ln S_{t_{i+1}}})^2$.可得参数 σ 的估计 $\hat{\sigma}^2$ 为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\ln S_{t_{i+1}}-\overline{\ln S_{t_{i+1}}})^2(5-3q)\beta(t_i)}{Z(t_i)^{q-1}[1-\beta(t_i)(1-q)]\Delta}.$$

2.1 期权定价的数值模拟

由于在实际中采用连续红利率分红的情况较少,所以本节不对连续红利率的分红方式进行模拟.只对离散分红的进行模拟验证.首先分析固定时间固定分红值的期权价格情况.令股票的初始价格为 $S_0=50$,无风险利率为 $r=0.05$,敲定价格 $K=45$,$q=1.3$,$T=1$,$\sigma=0.2$.在计算期权价格理论值之前,需要计算出 $M_q(\gamma_1,\gamma_2)$,$N_q(\gamma_1,\gamma_2)$.借助文献[11]的方法,对式(4)中出现的参数 $d_1(q)$,$d_2(q)$,$d_3(q)$,$d_4(q)$ 利用用最小二乘法对其进行估计.通过计算得到当 $q=1.3$ 时,$d_1(q)=0.169\ 2$,$d_2(q)=0.008\ 0$,$d_3(q)=0.049\ 8$,$d_4(q)=0.742\ 2$.

分别生成 100,1 000,1 500,2 000 条股票价格路径,得到对应的模拟期权值,和由式(18)得到的理论值进行比较分析.表 1 给出了在第 5 个和第 6 个时间节点处分别进行 $D=1$ 以及 $D=2$ 分红的期权价格.

表 1 分红时刻不同以及分红值不同对应的期权价格

Tab. 1 Option price corresponding to different dividend time and different dividend value

$D=2$	$\tau=5$			$\tau=6$			$D=1$	$\tau=5$			$\tau=6$		
	模拟值	理论值	误差	模拟值	理论值	误差		模拟值	理论值	误差	模拟值	理论值	误差
100	4.632 7	4.670 1	0.037 4	4.737 1	4.753 3	0.016 2	100	4.803 0	4.765 8	0.037 2	4.912 9	4.841 9	0.071 0
1 000	4.704 8	4.670 1	0.034 7	4.768 6	4.753 3	0.015 3	1 000	4.800 3	4.765 8	0.034 5	4.873 5	4.841 9	0.031 6
1 500	4.701 7	4.670 1	0.031 6	4.764 3	4.753 3	0.011 0	1 500	4.790 1	4.765 8	0.024 3	4.860 6	4.841 9	0.018 7
2 000	4.641 8	4.670 1	0.028 3	4.764 0	4.753 3	0.010 7	2 000	4.744 2	4.765 8	0.022 6	4.832 2	4.841 9	0.008 7

随着模拟路径条数的增多,理论值与模拟值之间的误差越来越小,理论值越来越接近模拟值,这反映了所得到的期权定价公式(18)是合理有效的.此外,还可以发现分红时刻的不同以及分红值的大小都会影响期权价格,随着分红时刻的推迟,所对应的期权价格呈上升趋势,且当分红时刻不变时,固定分红值越小,期权价格越高,这些情况都与实际的市场规律相符合.

下面研究当分红时刻是随机时,期权价格的变化情况.假设在随机时间 τ 产生离散固定分红 D.当 $\tau-t<T-t$ 时,假设 $\tau-t$ 是参数 λ 的指数分布,τ 和 S_t 的分布是相互独立的. 此时

$$D_t(\tau)=\int_0^{T-t}D\mathrm{e}^{-rx}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{D\lambda}{r+\lambda}(1-\mathrm{e}^{-(r+\lambda)(T-t)}).$$

选择不同的 λ 各生成 100 个随机数,代表每个股价路径的分红时间.由于到期日 $T=1$,所以如果发现 τ 大于 1 时,就意味着在这条路径上不存在分红.通过对随机数的观察可以发现,当 $\lambda=0.3$ 时,有 3 个值大于 1;当 $\lambda=0.4$ 时,有 8 个值大于 1;当 $\lambda=0.8$ 时,有 38 个值大于 1.随着 λ 的增加,不分红股票的价格路径逐渐增多.

下面比较当 λ 不同时,期权价格理论值与模拟价格之间的误差.

从表 2 可以看出,λ 不同时,理论值与模拟值之间的误差都较小,表明虽然分红时刻随机,但根据期权定价公式算得的期权价格仍是合理的.并且发现随着 λ 的增加,不分红股票价格路径逐渐增多,期权价格也随之升高,因为在市场中标的资产产生的红利将降低标的资产的价格,这也说明了公式(18)是符合实际的.

2.2 参数估计的模拟研究

令 $S_0=50$,$T=1$,$q=1.3$,$\mu=0.1$,$\sigma=0.2$ 通过蒙特卡罗数值模拟生成 1 条股票价格路径,假设路径上有 100 个节点,每个节点代表一个股票价格.令初始设定值为 $H=0.588\ 2$,$q=1.3$,$\mu=0.1$,$\sigma=0.2$,利用第 1 部分的方法模拟得到对应的参数估计值分别为 $H=0.583\ 1$,$q=1.285\ 0$,$\mu=0.099\ 2$,$\sigma=0.225\ 6$.与设定值之间的误差为 $\Delta H=0.005\ 1$,$\Delta q=0.015\ 0$,$\Delta\mu=0.000\ 8$,$\Delta\sigma=0.025\ 6$,通过对数据的观察可以发现模拟值与设定的参数值之间误差效果较好.

下面验证所得估计量的稳定性,分别生成并选取 100 条,500 条,1 000 条股票价格序列来对参数进行估计,得到的估计值由这些路径模拟出来的数值的均值 E 来代替.并通过计算方差 V 进一步观察估计量稳定的效果.模拟结果见表 3.

表 2　λ 不同时对应的期权价格

Tab. 2　Option price corresponding to different λ

λ	不分红时刻个数	模拟值	理论值	误差
0.3	3	5.164 8	5.166 0	0.001 2
0.4	8	5.214 3	5.212 4	0.001 9
0.8	38	5.507 9	5.505 5	0.002 4

表 3　估计量的稳定性模拟

Tab. 3　Stability simulation of estimators

均值 E	$q=1.2$			$q=1.5$		
	100	500	1 000	100	500	1 000
E_q	1.230 4	1.224 2	1.217 2	1.532 1	1.511 7	1.494 2
q 误差	0.030 4	0.024 2	0.017 2	0.023 1	0.011 7	0.005 8
V_q	9×10^{-4}	4×10^{-4}	1×10^{-4}	5×10^{-4}	1×10^{-4}	3×10^{-6}
E_μ	0.107 4	0.102 3	0.101 1	0.108 2	0.105 7	0.102 5
μ 误差	0.007 4	0.002 3	0.001 1	0.008 2	0.005 1	0.002 5
V_μ	5×10^{-5}	5×10^{-6}	1×10^{-6}	6×10^{-5}	2×10^{-5}	6×10^{-6}
E_σ	0.221 4	0.220 2	0.217 6	0.232 2	0.231 4	0.231 0
σ 误差	0.021 4	0.020 2	0.017 6	0.032 2	0.031 4	0.031 0
V_σ	4×10^{-4}	4×10^{-4}	1×10^{-4}	1×10^{-3}	9×10^{-4}	9×10^{-4}

由表 3 可知 q 值的大小对参数 μ,σ 估计量的大小没有产生大的波动,其中 μ 的估计值仍在 0.1 附近,σ 的估计值仍在 0.2 附近,可见 q 的改变对其他两个参数的估计值以及估计效果并没有产生特别大的影响.随着路径条数的增加,估计量模拟值与设定值之间的误差都越来越小,这说明估计值在设定值周围的上下波动幅度越来越小,越来越趋于设定的参数值,并且在表 3 中可以看到各组方差的数值也较小,这都证明了估计量的稳定性,也反映出第 2 部分提出的估计方法较为合理.

3　实证分析

选取微软公司(MSFT)自 2021 年 1 月 4 日到 9 月 30 日的股票数据来作为标的资产的价格.用 MSFT 自 2021 年 1 月 4 日到 2021 年 9 月 30 日历史股价数据通过第 2 部分的估计方法对参数进行估计,得到的估计结果为 $\hat{\mu}=0.002\,2$,$\hat{\sigma}=0.021\,4$,$\hat{q}=1.607\,0$.数据显示 MSFT 分别在 8 月 6 日和 9 月 24 日有期权到期,由于 8 月 7 日,8 月 8 日为周末,这两天不进行交易,所以选择时间段 8 月 9 日至 9 月 24 日为一个期权周期.将 8 月 9 日看作期权起始日,9 月 24 日看作到期日.根据股票价格数据,通过欧拉离散,梯形积分得到 $d_1(q)$,$d_2(q)$,$d_3(q)$,$d_4(q)$ 的估计值为 $d_1(q)=1.979\,1$,$d_2(q)=0.262\,3$,$d_3(q)=-0.030\,1$,$d_4(q)=0.079\,2$.

将 8 月 9 日看作期权起始日,将那天的股票价格作为初始价格 S_0,即 $S_0=288.33$,无风险利率 r 取美国一年期国债利率 $r=1.09\%$.MSFT 股票的连续红利率不是固定不变的,在不同的时期有不同的红利率.在 8 月 9 日至 9 月 24 日这期间连续红利率为 $\alpha=0.75\%$,随后将各参数值代入式(13)得到理论期权值.对于固定分红,通过搜索数据可知 2021 年 11 月 17 日进行一次 $D_\tau=0.62$ 的分红,根据 $D_t(\tau)=E[D_\tau e^{-r(\tau-t)} \mid \mathscr{F}_t]$ 可知贴现到 9 月 24 日则有 $D_t(\tau)=0.572\,2$,将 $D_t(\tau)$ 与各个参数值代入式(17)得到理论期权值.

通过对表 4 的分析可知,无论是带连续红利率的分红还是在固定时刻的离散分红,这两种分红方式所得到的理论值也都随着敲定价格 K 的增大而减小,并且与真实值都较为接近,理论值与真实值之间误差较小,这说明理论值符合实际市场情况,也反映了得到的带分红的期权定价公式合理有效.

表 4 带红利率和固定分红的不同敲定价 K 对应的期权值

Tab. 4 Option value corresponding to different strike pricing of K with red interest rate and fixed dividend

K	红利率			固定分红		
	真实值	理论值	误差	真实值	理论值	误差
260.0	38.75	38.811 4	0.061 4	38.75	38.804 5	0.054 5
265.0	34.53	34.576 3	0.046 3	34.53	34.601 3	0.071 3
267.5	31.55	31.512 4	0.037 6	31.55	31.627 1	0.077 1
270.0	29.55	29.517 2	0.032 8	29.55	29.608 6	0.058 6
272.5	25.45	25.511 4	0.064 4	25.54	25.514 8	0.064 8

参 考 文 献

[1] BLACK F,SCHOLES M S.The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J].Journal of Political Economy,1973,81(3):637-654.

[2] MERTON R C.Theory of rational option pricing[J].Bell Journal of Economics and Management Science,1973,4(1):141-183.

[3] BLACK F.Fact and fantasy in the use of options[J].Financial Analysts Journal,1975,31(4):36-41.

[4] CHANCE D M.European option pricing with discrete stochastic dividends[J].The Journal of Derivatives,2002,9(3):39-45.

[5] MATOS J,LAURDA A.On the hedging strategy of a European Option with discrete stochastic dividends[EB/OL].[2022-04-10]. https://www.researchgate.net/publication/253983328_On_the_Hedging_Strategy_of_a_European_Option_with_Discrete_Stochastic_Dividends.

[6] AVRAM F,TAQQU M S.Noncentral limit theorems and Appell polynomials[J].The Annals of Probability,1987,15(2):767-775.

[7] DAVYDOV Y A.The invariance principle for stationary processes[J].Theory of Probability and Its Applications,1970,15(3):487-498.

[8] XIAO W,ZHANG W,XU W.Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes at discrete observation[J].Applied Mathematical Modelling,2011,35(9):4196-4207.

[9] BORLAND,LISA.Option Pricing Formulas based on a non-Gaussian Stock Price Model[J].Physical Review Letters,2002,89(9):8701-8704.

[10] BORLAND,LISA.Microscopic dynamics of the nonlinear Fokker-Planck equation:A phenomenological model[J].Physical Review E,1998,57(6):6634-6642.

[11] LIU L,CUI Y.European option based on least-squares method under non-extensive statistical mechanics[J].Entropy,2019,21(10):933-942.

[12] LIU L,CUI Y,XU J,et al.The non-Markovian property of q-Gaussian process[J].Computers and Mathematics with Applications,2020,79(6):1802-1812.

Pricing of European option with dividend based on q-Gaussian process

Liu Limin, Yan Yulei

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: This paper studies the pricing and parameter estimation of European options with dividends under q-Gaussian process. Firstly, the pricing formulas of different dividend cases are obtained. For the dividend problem with red interest rate, the pricing formula of European call option is obtained by solving the stochastic differential equation with dividend. In the case of discrete dividend, the option pricing formula with discrete dividend is derived by constructing hedging strategy. The study of parameter estimation in Gauss process, for q, the value of Hurst index H is estimated by R/S analysis method, and then q is estimated by the relationship between q and H. The estimators of μ and σ are obtained by moment estimation, and the unbiasedness of μ estimators is proved. Finally, the simulation analysis is carried out, and the stock price and option price of Microsoft are used for empirical analysis.

Keywords: European option; q-Gaussian process; dividend; parameter estimation

[责任编校 陈留院 赵晓华]