文章编号:1000-2367(2021)02-0001-06　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.02.001

多人 Large Nim 博弈的最优策略

刘文安,肖亚

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:研究包含任意多个竞争者的 Large Nim 博弈模型,它是传统的 Large Nim 由两个竞争者到多个竞争者的一般化.在标准联盟矩阵下,运用递归函数,针对竞争者人数与堆数的三大类关系,得到了相应的博弈值和获胜的最优策略.

关键词:多人公平组合博弈;Large Nim 博弈;联盟矩阵;博弈值

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

公平组合博弈有众多模型,通常按照参与竞争者人数划分为“两人博弈”和“多人博弈”两大类.“两人博弈”主要研究两个参与竞争者在完全信息情况下的最佳获胜策略,其中两类模型得到了比较透彻的研究:NIM[1-5] 和 WYTHOFF'S GAME[6].文献[7]中给出了有关“两人博弈”的理论框架,并对多个模型进行了分析与比较.“多人博弈”主要研究多于两个参与竞争者在完全信息情况下博弈时,每个竞争者的最佳获胜策略如何选择.“多人博弈”模型远比“两人博弈”复杂,其中一个原因在于:多人博弈过程中可能会出现“结盟”现象,即某个竞争者在已知自己不能获胜的情况下,是否会采取一定的策略帮助其他竞争者获取胜利?帮助哪个竞争者获取胜利?因此竞争者之间的“结盟”意愿直接影响博弈结果.近几年,国内外众多学者针对“多人博弈”展开过研究,其成果可以归纳为 3 种类型:(1)多个竞争者未形成联盟,参见文献[8-12];(2)多个竞争者形成两个联盟,参见文献[13-14];(3)多个竞争者形成相互交织的联盟结构(下称“联盟矩阵”).文献[15]针对第 3 类模型,提出了一种分析 n 人公平组合博弈的新方法.文献[16]研究了在标准联盟矩阵下的 n 人 N 堆 Nim 博弈竞争者的输赢情况.文献[17]分析了在标准联盟矩阵下多人的 subtraction 博弈.文献[18]针对标准联盟矩阵下带 Pass 的多人 Small Nim 博弈进行了深入研究.

两人 Large Nim 博弈是两人 Nim 模型的一个变化,其可以描述为:有 N 堆筹码$(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,其中 N 为任意给定的正整数,x_i 表示第 i 堆所含筹码数,$1\leq i\leq N$.两个竞争者按顺序轮流进行,要求每名竞争者在其决策轮次中从最大堆中移除任何正整数的筹码,第一个无法进行合法移动的竞争者获胜.本文研究多人 Large Nim 博弈模型,其可以描述为:有 n 个竞争者和 N 堆筹码$(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,其中 $n\geq 2$ 和 N 均为任意给定的正整数,x_i 表示第 i 堆所含筹码数.n 个竞争者按顺序轮流进行,要求每名竞争者在其决策轮次中从最大堆中移除任何正整数的筹码,第一个无法进行合法移动的竞争者获胜.本文在标准联盟矩阵下,得到了该模型相应的博弈值和获胜的最优策略.

1　预备知识

首先给出一些基本术语和记号.

(i)用记号 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 表示 n 个竞争者.按照博弈规则,约定竞争者 P_0 先进行博弈,然后是 P_1,接下来是 $P_2,P_3,\cdots,P_{n-1}$,在 P_{n-1} 之后,P_0 将再次进行博弈(即按 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},P_0,P_1,\cdots,$顺序进行).

收稿日期:2020-10-16;**修回日期**:2021-01-18.

基金项目:国家自然科学基金(11171368)

作者简介(通信作者):刘文安(1964—),男,河南偃师人,河南师范大学教授,博士,研究方向为随机模型,E-mail:liuwenan@126.com.

因此本文约定,所有下标都是对 n 取余,例如 P_{i+j} 等同于 $P_{(i+j)\bmod(n)}$.

(ii)用 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 来表示一个状态(也称位置),筹码个数为 0 的堆忽略.考虑到各堆的无序性,通常一个位置可以表示为 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 且 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_N$.用记号 $P(G)$ 表示位置 G 的非空堆的个数,$m(G)=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 表示 x_i 中的最小者,$\beta(G)$ 表示 $m(G)$ 在位置 G 中出现的次数.一般地,$1\le\beta(G)\le P(G)$.用记号 $S(G)=\sum_{k=1}^{N}x_k$ 表示位置 G 的筹码总数.

(iii)给定一个 n 人参与的博弈模型和一个位置 G.定义 G 的博弈值(用 $g(G)$ 表示)为 $[0,n-1]$ 中的一个整数,它表明了竞争者的输赢情况.例如,当竞争者 P_i 面对位置 G 时,如果博弈值 $g(G)=j$,那么竞争者 P_{i+j} 是本场博弈的赢家.

(iv)对于正整数 $i,t\ge1$,用记号 $t^i=\overbrace{tt\cdots t}^{i}$ 简化位置表示.如 $(1^2,2,3^3,6)$ 与 $(1,1,2,3,3,3,6)$ 表示同一个位置.用符号 $G\to G'$ 表示存在一个合法移动由位置 G 能够到达位置 G',此时称 G' 是 G 的一个选项.给定两个位置 $\sigma'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_N)$ 满足 $1\le x'_1\le x'_2\le\cdots\le x'_N$ 和 $\sigma=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 满足 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_N$,称 σ' 是 σ 的子位置如果 $P(\sigma')=P(\sigma)$ 且 $S(\sigma')<S(\sigma)$.

(v) 给定位置 G,用符号 $O(G)$ 表示 G 的所有选项的集合,即竞争者经过合法移动可以到达的所有位置的集合.如果竞争者面临位置 G 无法进行合法移动,则该位置称为一个结束位置,用 $\varnothing$ 表示.

在标准联盟矩阵下的,KRAWEC 在文献[15]中给出了计算博弈值 $g(G)$的方法:

$$g(G)=\begin{cases}0,\text{如果 }G=\varnothing,\\ \min\{g(G')+1\mid G'\in O(G)\},\text{否则}.\end{cases}\tag{1}$$

观察(1)式,对于固定的 n 和 G,可以得出:

分析 1　$g(G)=0$ 当且仅当 $G=\varnothing$ 或者存在 G 的一个选择 G' 使得 $g(G')=n-1$;

分析 2　$g(G)=i\in\{1,2,\cdots,n-2\}$ 当且仅当对于任意一个选择 $G'\in O(G)$ 均有 $i-1\le g(G')\le n-2$ 并且存在一个选择 $G'\in O(G)$ 使得 $g(G')=i-1$;

分析 3　$g(G)=n-1$ 当且仅当对任意的选择 $G'\in O(G)$ 都有 $g(G')=n-2$.

引理 1　对于任意正整数 $N\ge1$ 和 $n\ge2$,均有 $g(1^N)=N\bmod n$.

证明　令 $N=qn+r$,满足 $q\ge0$ 和 $0\le r<n$.对于 $G=1^N$,每个竞争者只有一个决策:从任意一堆中移动 1 个筹码,即总堆数减少 1.经过 q 回合,必然到达位置 1^r.竞争者 P_0 从位置 1^r 重新开始移动;竞争者 P_1 从位置 1^{r-1} 开始移动;…;竞争者 P_r 面对 $\varnothing$ 第一个不能进行合法移动,故 P_r 取胜.故 $g(1^N)=r=N\bmod n$.

2　主要定理

本文研究标准联盟矩阵下的 Large Nim 博弈模型.给定任何位置 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 这里 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_N$,堆数 N 和竞争者人数 n 之间存在以下 4 类关系:$n>N+1$,$n=N+1$,$n=N$ 及 $n\le N-1$.下面的定理 1 至定理 3 分别针对前 3 类情况确定出精确的博弈值,即确定出谁是取胜者以及取胜策略.本文最后一节,分析了第 4 种情况难以解决的原因.

定理 1　对于任何位置 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 满足 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_N$,如果 $n>N+1$ 那么

$$g(G)=N.\tag{2}$$

换句话说,如果 $n>N+1$ 那么 G 的博弈值与 G 所拥有的非空堆数相等,即 $g(G)=P(G)$.

证明　对于结束位置 $G=\varnothing=(0)$,竞争者 P_0 不能进行合法的移动,所以 P_0 取胜.即 $g(0)=0$.

(A)考虑 $N=1$ 和位置 $G=(x_1)$ 满足 $x_1\ge1$,对 x_1 进行归纳:当 $x_1=1$,由(1)式得 $g(1)=\min\{g(0)+1\}=1$.假设 $g(m)=1$ 对任何 $1\le m<x_1$ 成立,由(1)式可得 $g(x_1)=\min\{g(0)+1,g(1)+1,g(m)+1\mid 2\le m<x_1\}=\min\{1,2,2\}=1$.

(B)对堆数 N 进行归纳.记 $\sigma_j=(x_1,x_2,\cdots,x_j)$ 满足 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_j$.假设 $g(\sigma_j)=j$ 对于 $1\le j<N$ 成立,现证明 $g(\sigma_N)=N$.对 $S(\sigma_N)=\sum_{k=1}^{N}x_k$ 进行归纳.

如果 $S(\sigma_N)=\sum_{k=1}^{N} x_k=N$，此时 $\sigma_N=1^N$.由引理 1 可得 $g(\sigma_N)=N$.假设 $g(\pi)=N$ 对于 σ_N 的任何子位置 π 成立.$\sigma_N=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的合法移动是从最大堆 x_N 中移除 i 个筹码，$1\leq i\leq x_N$. 分析两种可能：

(B.1)如果 $i=x_N$ 那么 $G\to G_1=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$. 此时 $P(G_1)=N-1<N$，由归纳假设可得 $g(G_1)=N-1$.

(B.2)如果 $1\leq i<x_N$ 那么 $G\to G_i=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N-i)$.此时 $P(G_i)=N$ 且 $S(G_i)<S(\sigma_N)$，由归纳假设可得到 $g(G_i)=N$.

综合两种情况，由(1)式得 $g(G)=\min\{g(G_1)+1,g(G_i)+1\mid 1\leq i<x_N\}=\min\{N,N+1\}=N$. 证毕.

定理 1 表明：当 $n>N+1$ 时，G 的博弈值等于该位置 G 的堆数 N.换句话说，P_0 面对 G 开始博弈，最终取胜者是 P_N，这与每堆的大小 x_i 无关.但是当 $n=N+1$ 时，下面的定理 2 表明：G 的博弈值既依赖于最小堆的取值 $m(G)$，又依赖于最小堆在 G 出现的次数 $\beta(G)$.

定理 2　对于任何位置 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 满足 $1\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_N$，如果 $n=N+1\geq 3$ 那么

$$g(G)=\begin{cases}P(G),\text{如果 } m(G)=1 \text{ 且 } \beta(G)=N,\\ P(G)-1-\beta(G),\text{如果 } m(G)=1 \text{ 且 } \beta(G)\in\{1,2,3,\cdots,N-1\},\\ P(G)-1,\text{如果 } m(G)>1.\end{cases}\tag{3}$$

证明　(A)如果 $m(G)=1,\beta(G)=N$ 那么 $G=1^N$.位置 G 仅有一个选择 $G'=1^{N-1}$，由引理 1 可得 $g(G')=N-1$.所以由(1) 式得 $g(G)=\min\{g(G')+1\}=N=P(G)$.

(B)如果 $m(G)=1$ 且 $\beta(G)\in\{1,2,3,\cdots,N-1\}$，对 $S(G)=\sum_{k=1}^{N}x_k$ 进行归纳：如果 $S(G)=\sum_{k=1}^{N}x_k=N$，此时 $G=1^N$.由上述(A) 可得 $g(G)=N$.假设 $g(\pi)=P(\pi)-1-\beta(\pi)$ 对于 G 的任何子位置 π 成立.位置 G 的合法移动是从最大的堆 x_N 中移除 i 个筹码，$1\leq i\leq x_N$. 分析下面 3 种情况.

(B.1)如果 $i=x_N$ 那么 $G\to G_0=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$.此时 $P(G_0)=N-1$，由定理 1 可以得到 $g(G_0)=N-1$ 因为 $n=N+1>P(G_0)+1$.

(B.2)如果 $i=x_N-1$ 那么 $G\to G_1=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},1)$. 此时 G_1 是 G 的子位置且 $P(G_1)=N$，$m(G_1)=1,\beta(G_1)=\beta(G)+1$.由归纳假设可得到 $g(G_1)=P(G_1)-1-\beta(G_1)=N-2-\beta(G)$.

(B.3)如果 $1\leq i<x_N-1$ 那么 $G\to G_i=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N-i)$ 且 $x_N-i>1$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i)=N,m(G_i)=m(G)=1,\beta(G_i)=\beta(G)$.由归纳假设可得 $g(G_i)=P(G_i)-1-\beta(G_i)=N-1-\beta(G)$.

综合上述 3 种情况，由(1)式可得

$$\begin{gathered}g(G)=\min\{g(G_0)+1,g(G_1)+1,g(G_i)+1\mid 1\leq i<x_N-1\}=\\ \min\{N,N-1-\beta(G),N-\beta(G)\}=N-1-\beta(G)=P(G)-1-\beta(G).\end{gathered}$$

(C)如果 $m(G)>1$ 那么 $x_N\geq x_{N-1}\geq\cdots\geq x_2\geq x_1\geq 2$.对 $S(G)=\sum_{k=1}^{N}x_k$ 进行归纳：如果 $S(G)=\sum_{k=1}^{N}x_k=2N$，此时 $G=2^N$.位置 G 有两个选择 $G_0=2^{N-1}$ 和 $G_1=(2^{N-1},1)$.由定理 1 可知 $g(G_0)=N-1$.由于 $P(G_1)=N,m(G_1)=1,\beta(G_1)=1$，因此定理 2 证明(B) 可得 $g(G_1)=N-2$.由(1) 式可得 $g(G)=\min\{g(G_0)+1,g(G_1)+1\}=\min\{N,N-1\}=N-1$.

假设定理 2 对于 G 的任何子位置为真，现证 $g(G)=N-1$.分析 $x_N-x_1=0$，$x_N-x_1=1$ 和 $x_N-x_1>1$ 这 3 种可能.

(C.1) $x_N-x_1=0$.此时 $x_N=x_{N-1}=\cdots=x_2=x_1\geq 2$，$G={x_1}^N$.位置 G 的合法移动是从最大的堆 x_1 中移除 i 个筹码，$1\leq i\leq x_1$. 分析 3 种可能：

(C.1.1)如果 $i=x_1$ 那么 $G\to G_0=x_1^{N-1}$.此时 $P(G_0)=N-1$ 且 $n=N+1>P(G_0)+1$，由定理 1 可以得到 $g(G_0)=N-1$.

(C.1.2)如果 $i=x_1-1$ 那么 $G\to G_1=(x_1^{N-1},1)$.此时 G_1 是 G 的子位置且 $P(G_1)=N,m(G_1)=1$，$\beta(G_1)=1$.由(B) 可得 $g(G_1)=P(G_1)-1-\beta(G_1)=N-2$.

(C.1.3)如果 $1 \le i < x_1 - 1$ 那么 $G \to G_i = (x_1^{N-1}, x_1 - i)$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i) = N$,$1 < m(G_i) = x_1 - i < x_1$,$\beta(G_i) = 1$.由归纳假设可得 $g(G_i) = P(G_i) - 1 = N - 1$.

综合上述 3 种情况,由(1)式可得

$$g(G) = \min\{g(G_0)+1, g(G_1)+1, g(G_i)+1 \mid 1 \le i < x_1 - 1\} =$$
$$\min\{N, N-1, N\} = N-1 = P(G)-1.$$

(C.2) $x_N - x_1 = 1$.G 的合法移动是从 x_N 中移除 i 个筹码,$1 \le i \le x_N$. 分析 3 种可能:

(C.2.1)如果 $i = x_N$ 那么 $G \to G_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$.此时 $P(G_0) = N-1$,由定理 1 可得到 $g(G_0) = N-1$ 因为 $n = N+1 > P(G_0)+1$.

(C.2.2)如果 $i = x_N - 1$ 那么 $G \to G_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, 1)$.此时 $P(G_1) = N$,$m(G_1) = 1$,$\beta(G_1) = 1$.由(B) 可得 $g(G_1) = P(G_1) - 1 - \beta(G_1) = N-2$.

(C.2.3)如果 $1 \le i < x_N - 1$ 那么 $G \to G_i = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N - i)$. 此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i) = N$,$x_N - i = x_1 + 1 - i \le x_1$,$m(G_i) = x_N - i > 1$.由归纳假设可得 $g(G_i) = P(G_i) - 1 = N-1$.

综合上述 3 种情况,由(1)式可得

$$g(G) = \min\{g(G_0)+1, g(G_1)+1, g(G_i)+1 \mid 1 < i < x_N - 1\} =$$
$$\min\{N, N-1, N\} = N-1 = P(G)-1.$$

(C.3) $x_N - x_1 > 1$.G 的合法移动是从 x_N 中移除 i 个筹码,$1 \le i \le x_N$. 分析 4 种可能:

(C.3.1) 如果 $i = x_N$ 那么 $G \to G_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$.此时 $P(G_0) = N-1$,由定理 1 可得到 $g(G_0) = N-1$ 因为 $n = N+1 > P(G_0)+1$.

(C.3.2)如果 $i = x_N - 1$ 那么 $G \to G_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, 1)$.此时 G_1 是 G 的子位置且 $P(G_1) = N$,$m(G_1) = 1$,$\beta(G_1) = 1$.由(B) 可得 $g(G_1) = P(G_1) - 1 - \beta(G_1) = N-2$.

(C.3.3)如果 $x_N - x_1 \le i < x_N - 1$ 那么 $G \to G_i = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N - i)$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i) = N$,$x_N - i \le x_1$,$m(G_i) = x_N - i > 1$.由归纳假设可得 $g(G_i) = P(G_i) - 1 = N-1$.

(C.3.4)如果 $1 \le i < x_N - x_1$ 那么 $G \to G_i = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N - i)$. 此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i) = N$,$x_N - i > x_1$,$m(G_i) = x_1 > 1$.由归纳假设可得 $g(G_i) = P(G_i) - 1 = N-1$.

综合上述 4 种情况,由(1)式可得 $g(G) = \min\{g(G_0)+1, g(G_1)+1, g(G_i)+1 \mid 1 \le i < x_N - 1\} = \min\{N, N-1, N\} = N-1 = P(G)-1$. 证毕.

下面的定理 3 用来解决 $n=N$ 的情况,结果表明:G 的博弈值既依赖于最小堆的取值 $m(G)$,又依赖于最小堆在 G 出现的次数 $\beta(G)$.

定理 3 对于任何位置 $G = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 满足 $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_N$,如果 $n = N \ge 3$, 那么

$$g(G) = \begin{cases} 0, \text{如果 } \beta(G) = N \text{ 且 } m(G) = 1, \\ P(G) - 1 - \beta(G), \text{如果 } \beta(G) \in \{1, 2, \cdots, N-2, N-1\}, \\ P(G) - 1, \text{如果 } \beta(G) = N \text{ 且 } m(G) > 1. \end{cases} \tag{4}$$

证明 假设定理 3 对于 G 的任何子位置为真,现证定理 3 对于 G 为真.

(A)如果 $\beta(G) = N$ 且 $m(G) = 1$ 那么 $G = 1^N$. 位置 G 仅有一个选择 $G' = 1^{N-1}$ 且 $P(G') = N-1$,$m(G') = 1$,由定理 2 可得 $g(G') = N-1$.所以由(1) 式得到 $g(G) = \min\{g(G')+1\} = 0$.

(B)如果 $\beta(G) \in \{1, 2, 3, \cdots, N-1\}$ 那么 $1 \le m(G) = x_1 < x_N$. 讨论下面两种情况 $m(G) = 1$ 和 $m(G) > 1$:

(B.1)$m(G) = 1$.

(B.1.1)如果 $\beta(G) = N-1$ 那么 $G = (1^N, x_N)$ 且 $x_N > 1$.$G \to G_0 = 1^{N-1}$,由引理 1 知 $g(G_0) = N-1 = n-1$.由分析 1 知,$g(G) = 0 = P(G) - 1 - \beta(G)$.

(B.1.2) $1 \le \beta(G) \le N-2$.即 $G = (1^{\beta(G)}, x_{\beta(G)+1}, \cdots, x_N)$ 且 $1 < x_{\beta(G)+1} \le \cdots \le x_{N-1} \le x_N$.$G$ 的合法移动是从最大的堆 x_N 中移除 i 个筹码,$1 \le i \le x_N$. 分析 3 种可能:

如果 $i = x_N$ 那么 $G \to G_0 = (1^{\beta(G)}, x_{\beta(G)+1}, \cdots, x_{N-1})$.此时 $P(G_0) = N-1$,$m(G_0) = m(G) = 1$,$\beta(G_0) = \beta(G)$,由定理 2 可以得到 $g(G_0) = P(G_0) - 1 - \beta(G_0) = N - 2 - \beta(G)$.

如果 $i=x_N-1$ 那么 $G\to G_1=(1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},1)$. 此时 G_1 是 G 的子位置且 $P(G_1)=N$，$m(G_1)=1,\beta(G_1)=\beta(G)+1$.由归纳假设可以得到 $g(G_1)=P(G_1)-1-\beta(G_1)=N-2-\beta(G)$.

如果 $1\le i<x_N-1$ 那么 $G\to G_i=(1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},x_N-i)$ 且 $x_N-i>1$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i)=N,m(G_i)=m(G)=1,\beta(G_i)=\beta(G)$.由归纳假设可得 $g(G_i)=P(G_i)-1-\beta(G_i)=N-1-\beta(G)$.

综合上述 3 种情况，由(1)式可得

$$g(G)=\min\{g(G_0)+1,g(G_1)+1,g(G_i)+1\mid 1\le i<x_N-1\}=\min\{N-1-\beta(G),N-1-\beta(G),N-\beta(G)\}=N-1-\beta(G)=P(G)-1-\beta(G).$$

(B.2) $m(G)>1$.讨论两种情况：$\beta(G)=N-1$ 和 $\beta(G)\in\{1,2,3,\cdots,N-2\}$.

(B.2.1) $\beta(G)=N-1$.此时 $1<x_1=x_2=\cdots=x_{N-1}<x_N$，即 $G=(x_1^{N-1},x_N)$.$G\to G^*=(x_1^{N-1},x_1)$ 且 $P(G^*)=N,m(G^*)=x_1>1,\beta(G^*)=\beta(G)+1=N$.由定理 3 可得 $g(G^*)=P(G^*)-1=N-1=n-1$.由分析 1 可得 $g(G)=0=P(G)-1-\beta(G)$.

(B.2.2) $\beta(G)\in\{1,2,3,\cdots,N-2\}$.此时 $G=({x_1}^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},x_N)$.$G$ 的合法移动是从 x_N 中移除 i 个筹码，$1\le i\le x_N$. 分析下面 5 种可能.

如果 $i=x_N$ 那么 $G\to G_0=(x_1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1})$.此时 $P(G_0)=N-1,m(G_0)=x_1=m(G)>1$.由定理 2 可以得到 $g(G_0)=P(G_0)-1=N-2$.

如果 $i=x_N-1$ 那么 $G\to G_1=(x_1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},1)$.此时 $P(G_1)=N,m(G_1)=1,\beta(G_1)=1$.由(B.1.2) 可得 $g(G_1)=P(G_1)-1-\beta(G_1)=N-2$.

如果 $x_N-x_1<i<x_N-1$ 那么 $G\to G_i=(x_1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},x_N-i)$ 且 $1<x_N-i<x_1$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i)=N,m(G_i)=x_N-i>1,\beta(G_i)=1$.由归纳假设可得 $g(G_i)=P(G_i)-1-\beta(G_i)=N-2$.

如果 $i=x_N-x_1$ 那么 $G\to G'=(x_1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},x_1)$. 此时 G' 是 G 的子位置且$P(G')=N$，$m(G')=x_1>1,\beta(G')=\beta(G)+1$.由归纳假设可得 $g(G')=P(G')-1-\beta(G')=N-2-\beta(G)$.

如果 $1\le i<x_N-x_1$ 那么 $G\to G_i=(x_1^{\beta(G)},x_{\beta(G)+1},\cdots,x_{N-1},x_N-i)$. 此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i)=N,x_N-i>x_1,m(G_i)=x_1>1,\beta(G_i)=\beta(G)$.由归纳假设可得 $g(G_i)=P(G_i)-1-\beta(G_i)=N-1-\beta(G)$.

综合上述 5 种情况，由(1)式可得

$$g(G)=\min\{g(G_0)+1,g(G_1)+1,g(G')+1,g(G_i)+1\mid 1\le i<x_N-x_1\text{ 或 }x_N-x_1<i<x_N-1\}=\min\{N-1,N-1,N-1-\beta(G),N-\beta(G),N-1\}=N-1-\beta(G)=P(G)-1-\beta(G).$$

(C)如果 $\beta(G)=N$ 且 $m(G)>1$ 那么 $x_N=x_{N-1}=\cdots=x_2=x_1>1$，即 $G={x_1}^N$.G 的合法移动是从 x_1 中移除 i 个筹码，$1\le i\le x_1$. 分析下面 3 种可能.

(C.1)如果 $i=x_1$ 那么 $G\to G_0=x_1^{N-1}$.此时 $P(G_0)=N-1,m(G_0)=x_1>1$ 且 $n=N=P(G_0)+1$.由定理 2 可以得到 $g(G_0)=P(G_0)-1=N-2$.

(C.2)如果 $i=x_1-1$ 那么 $G\to G_1=(x_1^{N-1},1)$.此时 $\beta(G_1)=1$，由(B) 可得 $g(G_1)=P(G_1)-1-\beta(G_1)=N-2$.

(C.3)如果 $1\le i<x_1-1$ 那么 $G\to G_i=(x_1^{N-1},x_1-i)$.此时 G_i 是 G 的子位置且 $P(G_i)=N,1<m(G_i)=x_1-i<x_1,\beta(G_i)=1$.由(B) 可得 $g(G_i)=P(G_i)-1-\beta(G_i)=N-2$.

综合上述 3 种情况，由(1)式可得 $g(G)=\min\{g(G_0)+1,g(G_1)+1,g(G_i)+1\mid 1\le i<x_1-1\}=\min\{N-1,N-1,N-1\}=N-1=P(G)-1$. 证毕.

3　结　论

本文研究了标准联盟矩阵下的 Large Nim 博弈模型.基于堆数 N 和竞争者人数 n 的关系，针对 3 类情

况确定出精确的博弈值,即确定出取胜者及取胜的策略.具体地讲,给定任何位置 $G=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 这里 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_N$:当 $n>N+1$ 时,定理1表明 G 的博弈值等于该堆数 N,其与每堆的大小 x_i 无关;当 $n=N+1$ 或 $n=N$ 时,定理2与定理3证明了 G 的博弈值既依赖于最小堆 x_1 的取值,又依赖于最小堆 x_1 在 G 出现的次数 $\beta(G)$.

当 $n\le N-1$ 时,确定出精确的博弈值将是十分困难的.例如 $n=N-1=3$,给定任何位置 $G=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 满足 $1\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4$,可以经过分析计算得到

$$g(G)=\begin{cases}2,\text{如果 } 1\le x_1<x_2=x_3=x_4,\\ 0,\text{如果 } 1\le x_1<x_2=x_3<x_4 \text{ 或者 } 1<x_1=x_2=x_3\le x_4,\\ 1,\text{如果 } 1=x_1=x_2=x_3\le x_4 \text{ 或者 } 1\le x_1=x_2<x_3\le x_4 \text{ 或者 } 1\le x_1<x_2<x_3\le x_4.\end{cases}\tag{5}$$

从(5)式可以看出,博弈值 $g(G)$ 依赖于 x_1,x_2,x_3,x_4 之间的大小关系,而不仅仅依赖于最小堆 x_1 在 G 出现的次数 $\beta(G)$.可以想象,一般情况 $n=N-d(d\ge 1)$ 将会随着 d 的变大而更加复杂.

参 考 文 献

[1] BOUTON C L.Nim,a game with a complete mathematical theory[J].Ann Math,1901,3:35-39.

[2] ALBERT M H,NOWAKOWSKI R J.Nim restrictions[J].Integers:Electronic Journal of Combinatorial Number Theory,2004,4:1-10.

[3] FLAMMENKAMP A,HOLSHOUSER A,REITER H.Dynamic one-pile blocking Nim[J].The Electric Journal of Combinatorics,2003,10:1-6.

[4] LIU W A,ZHAO X.Nim with one or two dynamic restrictions[J].Discrete Applied Mathematics,2016,198:48-64.

[5] LIU W A,ZHAO M.General restrictions of Wythoff-like games[J].Theoretical Computer Science,2015,602:80-88.

[6] 刘文安,周晶晶.环状有界的 Small Nim 博弈[J].河南师范大学学报(自然科学版),2018,46(2):22-25.
LIU W A,ZHOU J J.Ring-Bounded Small Nim Games[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2018,46(2):22-25.

[7] BERLEKAMP E R,CONWAY J H,GUY R K.Winning Ways for Your Mathematical Plays[M].Wellesley:PETERS A K,2004:141-182.

[8] LI R.N-person Nim and *n*-person Moore's Games[J].International Journal of Game Theory,1978,7(1):31-36.

[9] STRAFFIN P D.Three-person winner-take-all games with Mc-Carthy's revenge rule[J].College Mathematics Journal,1985,16(5):386-394.

[10] LOEB D E.Stable winning coalitions[J].Games of no chance,1996,29:451-471.

[11] PROOP J.Three-player impartial games[J].Theoretical Computer Science,1996,233:263-278.

[12] CINCOTTI A.N-player partizan games[J].Theoretical Computer Science,2010,411:3224-3234.

[13] KELLY A R.Analysis of one pile misère Nim for two alliances[J].Rocky Mountain Journal of Mathematics,2011,41(6):1895-1906.

[14] LIU W A,ZHAO X.One pile misère bounded Nim with two alliances[J].Discrete Applied Mathematics,2016,214:16-33.

[15] KRAWEC W O.Analyzing *n*-player impartial games[J].International Journal of Game Theory,2012,41:345-367.

[16] LIU W A,DUAN J W.Misère Nim with multi-player[J].Discrete Applied Mathematics,2017,219:40-50.

[17] LIU W A,WANG M Y.Multi-player subtraction games[J].Theoretical Computer Science,2017,659:14-35.

[18] LIU W A,ZHOU J J.Multi-player Small Nim with Passes[J].Discrete Applied Mathematics,2018,236:306-314.

Optimal strategies of multi-player Large Nim games

Liu Wenan, Xiao Ya

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: This paper is devoted to the game "Multi-player Large Nim Games" which is the generalization of the classic Large Nim games from two players to arbitrarily many players. Assuming that the standard alliance matrix be adopted, by using a recursive function, the game values are completely determined for three kinds of relation between the numbers of players and piles. These game values are capable of determining which of the players has a winning optimal strategy.

Keywords: multi-player impartial combinatorial game; Large Nim; alliance matrix; game value

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

刘文安,河南师范大学教授,博士,河南省优秀教师,河南省科技创新杰出青年,河南省教育厅学术技术带头人.主要从事应用概率与统计、组合最优化、计算机数学等方面研究,兼任美国《数学评论》评论员,*International Journal of Game Theory*, *Discrete Math*, *Discrete Appl Math*, *Theoretical Computer Science* 等 SCI 期刊审稿人,河南省数学会常务理事,河南省应用统计学会常务理事、副秘书长,河南省统计学类教学指导委员会副主任委员.主持参与完成国家自然科学基金(面上项目)5 项,河南省高校科技创新团队及河南省基础研究等省级项目 5 项,在 *Discrete Appl Math*, *Theoretical Computer Science*, *J Statist Plann Inference* 等国内外学术期刊发表学术论文 50 余篇,出版专著《离散空间上的容错搜索理论》1 部,主编《概率论与数理统计》教材 2 部.

徐秀丽,燕山大学教授,博士,博士生导师,研究方向为随机服务系统理论及优化、流体排队模型理论及其经济学分析.中国运筹学会随机服务与运作管理分会常务理事,河北省现场统计学会副理事长,河北省统计学会常务理事,河北省统计学会学术委员会委员.主持国家自然科学基金项目和多项河北省自然科学基金项目.已在相关领域主要学术期刊上发表论文 60 余篇,其中近 30 篇在 SCI, EI 源期刊上发表,完成专著 1 部."多服务台休假排队系统的理论和方法"获河北省自然科学三等奖."自组织传感网络节能关键技术研究与应用"获河北省科学技术进步三等奖.2015 年入选河北省新世纪"三三三人才工程".

田建袅,广西师范大学教授,博士,博士生导师,2001 年在西北师范大学获理学硕士学位,2004 年于兰州大学化学与化工学院博士研究生毕业并获理学博士学位,主要研究方向为纳米光学探针及生物传感分析,在 *Biosensors and Bioelectronics*, *Chemical Communication*, *Analytical Chimica Acta*, *Sensors and Actuators B*, *Analyst* 等 SCI 源期刊发表论文 70 余篇,已主持国家自然科学基金 3 项,2014 年作为第二完成人获得广西壮族自治区自然科学奖二等奖.