

文章编号:1000-2367(2023)04-0070-08

DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.04.009

# 一类分数金融资产价格过程的近似解及其期权定价

王继霞,肖晓芳

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

**摘要:**为了拟合金融资产数据的长记忆性,很多学者利用分数布朗运动驱动的随机微分方程来刻画金融资产价格的变化规律.但是由于分数布朗运动驱动模型在金融市场中会产生套利机会,这将给研究期权定价问题带来困难.鉴于此,首先采用一类具有半鞅性质的分数高斯过程对分数布朗运动进行近似,此近似关于  $L^2(\Omega)$  是一致收敛的.然后,利用分数高斯过程对金融资产价格进行统计建模,求得模型近似解的闭式表达式,并以分数阶 Langevin 模型作为特例,对近似解和原模型解的样本路径进行模拟,展示了二者的近似程度.最后,基于所构建的近似模型,得到了几何平均亚式看涨期权和看跌期权的定价公式.

**关键词:**分数布朗运动;  $L^2$  近似方法; 半鞅; 长记忆性; 期权定价

**中图分类号:** O211.6; F830.9

**文献标志码:** A

在金融一体化的背景下,描述各金融资产价格之间的长记忆性是金融时间序列分析中的一个重要研究内容.关于时间序列长记忆性的研究最早可以追溯到 1951 年, HURST<sup>[1]</sup> 基于 800 多年的数据对尼罗河的长期水流特征进行了研究,发现尼罗河的水位特征具有自相似性和长记忆性.此后,人们在股票、利率、汇率等许多金融时间数据中也发现了这种现象,并对这种现象进行了更深入的研究.比如 BAILLIE<sup>[2]</sup> 讨论了对长记忆波动过程及其在金融中的应用; BERAN<sup>[3]</sup> 和 GRANGER 等<sup>[4]</sup> 研究了一类平稳过程的长期相关性等. RATTIKAN<sup>[5]</sup> 研究了分数过程驱动的分数 Hull-White 模型,代替了由标准布朗运动驱动的传统 Hull-White 利率模型.此外, RATTIKAN<sup>[6]</sup> 将几何布朗运动驱动的 Black-Scholes 模型改进为分数 Black-Scholes 模型,并验证了分数 Black-Scholes 模型可以更好地拟合 IBM 历史股票数据.

近年来,关于我国金融市场长相依性特征的研究也很多,比如,李志生等<sup>[7]</sup> 根据有效市场理论及分形市场假说,应用序列相关检验及 R/S 检验法分析研究出我国股票市场具有显明的长相依性.苑莹等<sup>[8]</sup> 运用一系列检验方法研究了我国的股市收益率和成交量的长相依性特征.肖炜麟等<sup>[9]</sup> 对金融市场数据进行了实证研究,发现金融资产价格具有长相依性.张跃军等<sup>[10]</sup> 研究了原油价格波动,证明原油市场波动存在结构性变化和长记忆特征.长记忆性侧重探究价格序列本身在较远时间间隔时是否仍具有持续依赖关系.将时间序列长记忆性特征分析运用于金融环境,可以准确把握金融市场的运行规律并构造符合实际的精确预测模型.

由于金融环境的不确定性,使得金融资产的价格过程呈现出长记忆特征,这意味着经典的布朗运动在某种程度上不能很好地描述资产价格过程,很多已有的研究表明利用分数布朗运动能有效捕捉资产价格长相依这一现象.然而,由分数布朗运动驱动的金融模型却在金融市场中存在套利机会.为解决这一问题,本文针对金融环境中存在的长记忆现象,构建具有半鞅性质的分数高斯过程驱动的金融资产价格模型,并得到模型解的闭式表达式及其期权定价公式.本文所构建的模型在金融市场中不存在套利机会,这给人们研究期权定价问题带来了方便.

收稿日期:2022-05-29;修回日期:2022-07-21.

基金项目:国家自然科学基金(11971154);河南省重点研发与推广专项(软科学研究)项目(232400410034).

作者简介:王继霞(1978-),女,河南驻马店人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为金融统计推断和金融风险管理,

E-mail:jixiawang@163.com.

通信作者:肖晓芳, E-mail:xf998716@163.com.

## 1 金融资产价格模型与近似模型构建

设  $\{X_t, t \geq 0\}$  为金融资产的价格过程, 满足由分数布朗运动驱动的如下随机微分方程,

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)dt + (\sigma(t) + \gamma(t)X_t)dW_t^H, \quad (1)$$

其中  $\alpha(t), \beta(t), \sigma(t), \gamma(t)$  是关于  $t$  的连续函数, 且  $\sigma(t) > 0$ ,  $W_t^H$  是 Hurst 指数为  $H \in (0, 1)$  的分数布朗运动, 其是一个零均值高斯过程, 并有如下的协方差函数:

$$R(s, t) = E[W_t^H W_s^H] = \frac{1}{2} \times [t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}].$$

令  $Y_n = W_n^H - W_{n-1}^H, n \geq 1$ . 则  $\{Y_n, n \geq 1\}$  是高斯平稳序列, 其协方差如下:

$$\rho_n^H = \frac{1}{2}((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}).$$

因此, 当  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^H = \infty$ ; 当  $H \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n^H| < \infty$ . 具体来讲, 当  $H \in (0, \frac{1}{2})$  时,

分数布朗运动的增量负相关. 当  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  时, 分数布朗运动的增量正相关, 且相距很远的两个观测值之间的

的相关性缓慢衰减为零, 意味着此时  $W_t^H$  是一个长记忆过程. 易知, 当  $H = \frac{1}{2}$  时,  $W_t^H$  是标准布朗运动, 具有

独立增量和平稳增量. 除标准布朗运动外的其余分数布朗运动均不具有独立增量, 即当  $H \neq \frac{1}{2}$  时,  $W_t^H$  没有独立增量.

本文所研究的模型是很多金融中著名模型的推广, 如下面的注释.

**注 1** (a) 当函数  $\gamma(t) = 0$  时, 模型(1)为金融中著名的分数 Hull-White 模型.

(b) 当函数  $\alpha(t) = 0$  且  $\sigma(t) = 0$  时, 模型(1)为分数 Black-Derman-Toy 模型.

(c) 当函数  $\alpha(t) = \alpha, \beta(t) = \beta, \sigma(t) = \sigma$ , 且  $\gamma(t) = 0$  时, 其中  $\alpha, \beta, \sigma$  为常数, 则模型(1)为金融中的分数 Vasicek 模型.

(d) 当函数  $\alpha(t) = \alpha, \beta(t) = \beta, \gamma(t) = \gamma$ , 且  $\sigma(t) = 0$  时, 模型(1)为分数 Dothan 模型.

因此模型(1)是一类分数金融资产价格过程<sup>[11]</sup>.

由文献[12]知, 分数布朗运动可以表示为:

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} [Z_t + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s], \quad (2)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  是伽马函数,  $(W_t)_{t \geq 0}$  是标准布朗运动, 且

$$Z_t = \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dW_s. \quad (3)$$

由于  $Z_t$  的轨道是绝对连续的,  $W_t^H$  的长距相依性只依赖于式(2)中的第 2 项, 记为:

$$B_t^H \triangleq \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s. \quad (4)$$

因此, 考虑由  $\{B_t^H, t \geq 0\}$  驱动的如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)dt + (\sigma(t) + \gamma(t)X_t)dB_t^H, \\ X_{t|t=0} = X_0. \end{cases} \quad (5)$$

其中初值  $X_0$  是给定的平方可积随机变量,  $B_t^H$  是由式(4)定义的分数高斯过程.

下面将给出模型(5)的由半鞅驱动的近似模型, 并讨论该模型的解. 对  $\forall \epsilon > 0$ , 定义

$$B_t^{H,\epsilon} \triangleq \int_0^t (t-s+\epsilon)^{H-\frac{1}{2}} dW_s. \quad (6)$$

其中  $\{W_t, t \geq 0\}$  是标准布朗运动. 注意到下面的积分

$$\int_0^t \int_0^s (s-u+\epsilon)^{H-\frac{3}{2}} dW_u ds = \int_0^t \int_u^t (s-u+\epsilon)^{H-\frac{3}{2}} ds dW_u = \frac{1}{H-\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[ \int_0^t (t-u+\epsilon)^{H-\frac{1}{2}} dW_u - \epsilon^{H-\frac{1}{2}} \times \int_0^t dW_u \right] = \frac{1}{H-\frac{1}{2}} \times [B_t^{H,\epsilon} - \epsilon^{H-\frac{1}{2}} W_t].$$

因此

$$B_t^{H,\epsilon} = (H - \frac{1}{2}) \int_0^t \int_0^s (s-u+\epsilon)^{H-\frac{3}{2}} dW_u ds + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} W_t. \quad (7)$$

令

$$\omega_t^{H,\epsilon} = \int_0^t (t-s+\epsilon)^{H-\frac{3}{2}} dW_s. \quad (8)$$

则式(7)可表示成

$$B_t^{H,\epsilon} = (H - \frac{1}{2}) \int_0^t \omega_s^{H,\epsilon} ds + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} W_t, \quad (9)$$

由于式(9)中第一项  $(H - \frac{1}{2}) \int_0^t \omega_s^{H,\epsilon} ds$  是有界变差函数,第二项  $\epsilon^{H-\frac{1}{2}} W_t$  是一个鞅,因此  $B_t^{H,\epsilon}$  是一个半鞅.

由文献[13]知,

$$\| B_t^{H,\epsilon} - B_t^H \|^2 \leq (H - \frac{1}{2})^2 \epsilon^2 \int_0^{t-\epsilon} (t-s)^{2H-3} ds + \int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{2H-1} ds \leq C(H) \epsilon^{2H}. \quad (10)$$

这里  $\| \cdot \|$  表示  $L^2(\Omega)$  中的范数,  $C(H)$  为仅依赖于  $H$  的常数.由式(10)可得,当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \| B_t^{H,\epsilon} - B_t^H \| \leq \sqrt{C(H)} \epsilon^H \rightarrow 0, \quad (11)$$

因此在  $L^2(\Omega)$  中,  $B_t^{H,\epsilon}$  关于  $t \in [0, T]$  一致收敛于  $B_t^H$ . 更多有关半鞅过程及其他随机变量和随机微分方程收敛性的证明可以参考文献[14-16].

下面构建模型(5)的近似模型,对  $\forall \epsilon > 0$ , 考虑如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = (\alpha(t) + \beta(t)X_t^\epsilon) dt + (\sigma(t) + \gamma(t)X_t^\epsilon) dB_t^{H,\epsilon}, \\ X_{t|t=0}^\epsilon = X_0, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $B_t^{H,\epsilon}$  由式(6)所定义,  $X_0$  是初值.

下面的定理 1 给出了模型(12)中解的表达式.

**定理 1** 设  $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\sigma(t)$  和  $\gamma(t)$  均为区间  $[0, T]$  上的连续函数.则对  $\forall \epsilon > 0$ , 模型(12)存在唯一解  $X_t^\epsilon$ , 且

$$X_t^\epsilon = M(t) \left[ X_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s) + (H - \frac{1}{2})\sigma(s)\omega_s^{H,\epsilon} - \epsilon^{2H-1}\gamma(s)\sigma(s)}{M(s)} ds + \int_0^t \frac{\epsilon^{H-\frac{1}{2}}\sigma(s)}{M(s)} dW_s \right], \quad (13)$$

其中

$$M(t) = \exp \left[ \int_0^t (\beta(s) + (H - \frac{1}{2})\gamma(s)\omega_s^{H,\epsilon} - \frac{1}{2}\epsilon^{2H-1}\gamma^2(s)) ds + \int_0^t \epsilon^{H-\frac{1}{2}}\gamma(s) dW_s \right]. \quad (14)$$

**证明** 由式(9)可得,

$$dB_t^{H,\epsilon} = (H - \frac{1}{2})\omega_t^{H,\epsilon} dt + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} dW_t. \quad (15)$$

把式(15)代入式(12)可得:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = [\alpha(t) + (H - \frac{1}{2})\sigma(t)\omega_t^{H,\epsilon} + (\beta(t) + (H - \frac{1}{2})\gamma(t)\omega_t^{H,\epsilon})X_t^\epsilon] dt + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} [\sigma(t) + \gamma(t)X_t^\epsilon] dW_t, \\ X_{t|t=0}^\epsilon = X_0. \end{cases} \quad (16)$$

显然模型(16)是由标准布朗运动  $\{W_t, t \geq 0\}$  驱动的线性随机微分方程, 且是如下形式的线性随机微分方程:

$$dX(t) = (m(t) + n(t)X(t))dt + (p(t) + q(t)X(t))dW_t. \tag{17}$$

已知  $m(t), n(t), p(t), q(t)$  是  $t$  的连续函数, 则式(17)的解是唯一存在的.

由文献[17]可知, 式(17)的解的形式如下:

$$X(t) = M(t)[X(0) + \int_0^t \frac{m(s) - p(s)q(s)}{M(s)} ds + \int_0^t \frac{p(s)}{M(s)} dW_s], \tag{18}$$

其中

$$M(t) = M(0)\exp\left[\int_0^t (n(s) - \frac{1}{2}q^2(s)) ds + \int_0^t q(s) dW_s\right]. \tag{19}$$

在这里, 令  $m(t) = \alpha(t) + (H - \frac{1}{2})\sigma(t)\omega_t^{H,\epsilon}, n(t) = \beta(t) + (H - \frac{1}{2})\omega_t^{H,\epsilon}\gamma(t), p(t) = \epsilon^{H-\frac{1}{2}}\sigma(t), q(t) = (H - \frac{1}{2})\gamma(t)$ . 因而由式(18)和(19)可得模型(12)的解为

$$X_t^\epsilon = M(t)[X_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s) + (H - \frac{1}{2})\sigma(s)\omega_s^{H,\epsilon} - \epsilon^{2H-1}\gamma(s)\sigma(s)}{M(s)} ds + \int_0^t \frac{\epsilon^{H-\frac{1}{2}}\sigma(s)}{M(s)} dW_s]. \tag{20}$$

其中

$$M(t) = \exp\left[\int_0^t (\beta(s) + (H - \frac{1}{2})\gamma(s)\omega_s^{H,\epsilon} - \frac{1}{2}\epsilon^{2H-1}\gamma^2(s)) ds + \int_0^t \epsilon^{H-\frac{1}{2}}\gamma(s) dW_s\right], \tag{21}$$

证毕.

## 2 模拟研究

本节中, 利用模拟来展示  $X_t^\epsilon$  和  $X_t$  的近似程度, 即当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $X_t^\epsilon$  和  $X_t$  的接近程度. 首先模拟式(8)中  $\omega_t^{H,\epsilon}$  的变化趋势,  $\omega_t^{H,\epsilon}$  可利用下式近似计算,

$$\omega_t^{H,\epsilon} = \int_0^t (t - s + \epsilon)^{H-\frac{3}{2}} dW_s \approx \sum_{k=0}^{N-1} (t - k\frac{t}{N} + \epsilon)^{H-\frac{3}{2}} [W_{(k+1)\frac{t}{N}} - W_{k\frac{t}{N}}],$$

其中  $N$  是区间  $[0, t]$  上的分割区间个数, 由于  $\{W_t, t \geq 0\}$  是标准布朗运动, 故有

$$\omega_t^{H,\epsilon} = \int_0^t (t - s + \epsilon)^{H-\frac{3}{2}} dW_s \approx \sqrt{\frac{t}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (t - k\frac{t}{N} + \epsilon)^{H-\frac{3}{2}} \xi_k,$$

其中  $\{\xi_k, k=0, 1, 2, \dots, N-1\}$  是独立同分布的标准正态随机变量.

模拟步骤如下:

(i) 参数设定: 设定  $T=1$ , 分别设定  $H=0.125, 0.375, 0.625, 0.875, \epsilon=0.0625, 0.125, 0.25, 0.5$ .

(ii)  $N_i$  为区间  $[0, t_i]$  上分割区间数,  $i=1, 2, \dots, 500$ , 生成标准正态随机数  $g_1, g_2, \dots, g_{N_i-1}$ , 计算

$$\omega_{t_i}^{H,\epsilon} = \sqrt{\frac{t_i}{N_i}} \sum_{k=0}^{N_i-1} (t_i - k\frac{t_i}{N_i} + \epsilon)^{H-\frac{3}{2}} g_k, i=1, 2, \dots, 500. \tag{22}$$

(iii) 求出  $\omega_{t_1}^{H,\epsilon}, \omega_{t_2}^{H,\epsilon}, \dots, \omega_{t_{500}}^{H,\epsilon}$ .

(iv) 模拟上述程序 20 次.

图 1 分别为  $H=0.125, 0.375, 0.625, 0.875$  的情况下,  $\epsilon$  取不同值时  $\omega_t^{H,\epsilon}$  的变化趋势.

从图 1 可以看出, 当  $H$  的取值比较小的情况下,  $\omega_t^{H,\epsilon}$  的波动较大, 而当  $H$  取值比较大的情形,  $\omega_t^{H,\epsilon}$  的波动较小. 这意味着, 当  $H \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $\omega_t^{H,\epsilon}$  的样本路径较稳定.

下面考虑  $X_t^\epsilon$  与  $X_t$  的模拟路径的近似程度. 这里假设  $\alpha(t)=0, \beta(t)=-b, \sigma(t)=\sigma, \gamma(t)=0$ , 故模型(5)简化为:

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t^H, \\ X_{t|t=0} = X_0. \end{cases} \tag{23}$$

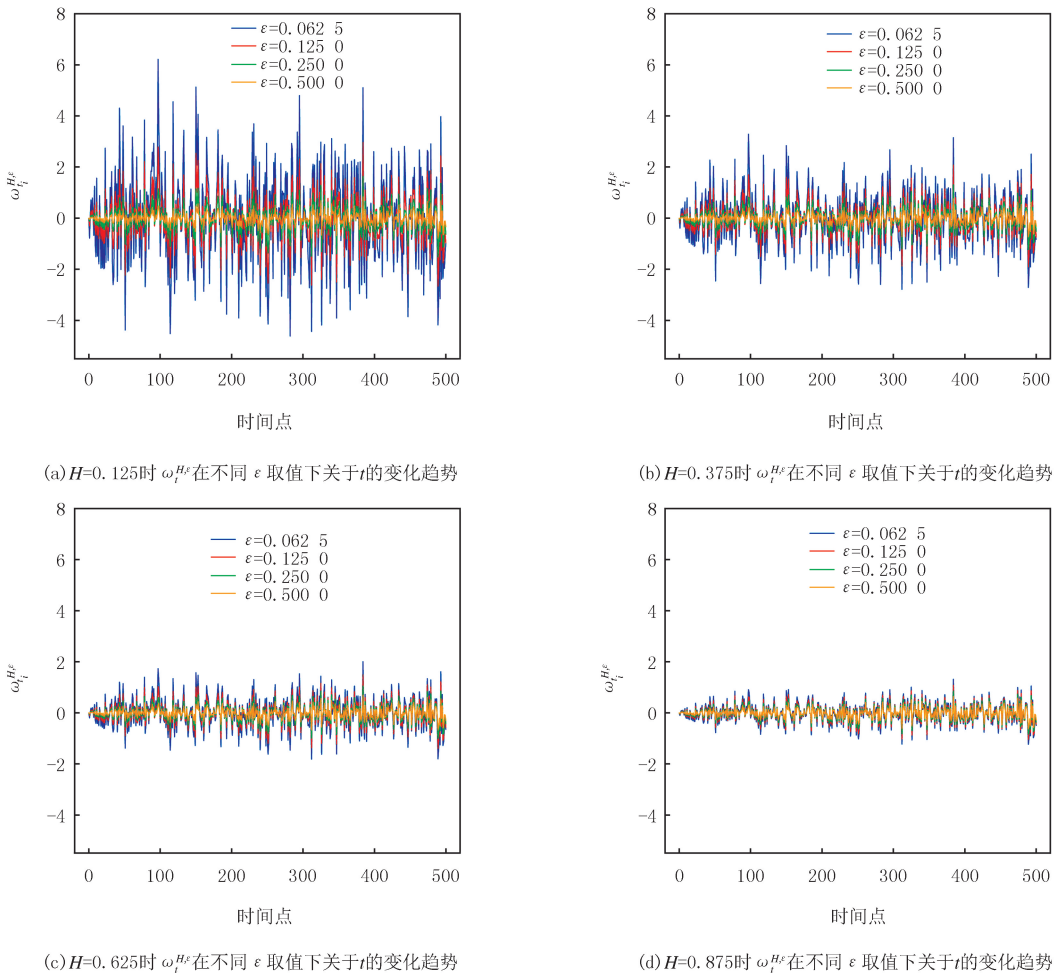


图1  $\omega_t^{H,\epsilon}$  关于时间点的变化趋势

Fig.1 The change trend of  $\omega_t^{H,\epsilon}$  with respect to time point

其中  $B_t^H$  由式(4)定义, 构建模型(23)的近似模型为:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = -bX_t^\epsilon dt + \sigma dB_t^{H,\epsilon}, \\ X_{t|t=0}^\epsilon = X_0. \end{cases} \quad (24)$$

其中  $B_t^{H,\epsilon}$  由式(6)定义.

设  $X_t, X_t^\epsilon$  分别为模型(23)和(24)的路径解, 模型(23)的解为如下 Ornstein-Uhlenbeck 过程:

$$X_t = e^{-bt} X_0 + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dB_s^H. \quad (25)$$

此外, 由定理 1 可得模型(24)的解为:

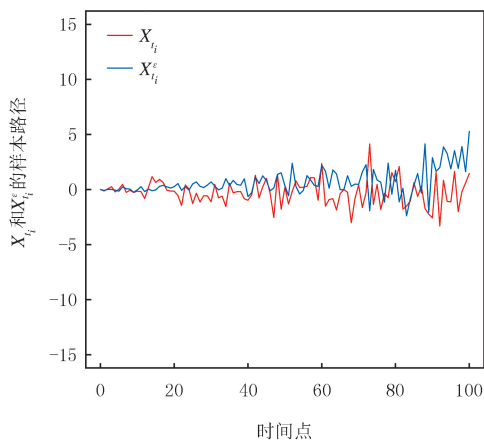
$$X_t^\epsilon = e^{-bt} X_0 + (H - \frac{1}{2})\sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} \omega_s^{H,\epsilon} ds + \sigma e^{-bt} \epsilon^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t e^{bs} dW_s. \quad (26)$$

设定参数  $T=10, H=0.62, b=-0.3, \sigma=0.5, X_0=0$ , 且设定  $\epsilon$  分别为 0.000 01, 0.001 00, 0.100 00, 0.500 00. 图 2 给出了  $X_t$  和  $X_t^\epsilon$  的模拟路径的变化趋势.

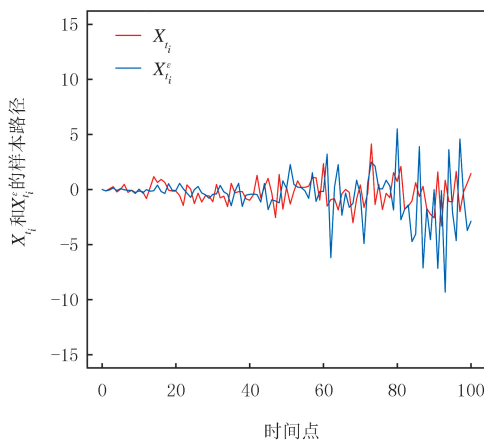
由图 2 可以看出, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $X_t^\epsilon$  接近于  $X_t$ , 说明当  $\epsilon$  取值越小, 近似解  $X_t^\epsilon$  越接近于原始解  $X_t$ , 这从模拟的角度进一步表明了解的收敛性.

### 3 基于近似模型的几何平均亚式期权定价

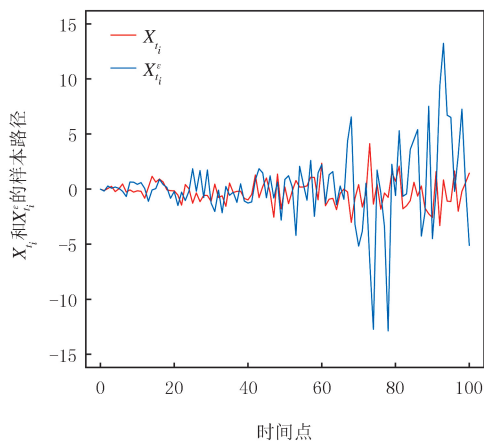
假设  $S_t^\epsilon$  为  $t$  时刻金融资产的价格过程, 满足由半鞅  $B_t^{H,\epsilon}$  驱动的分数量 Black-Scholes 随机微分方程, 即:



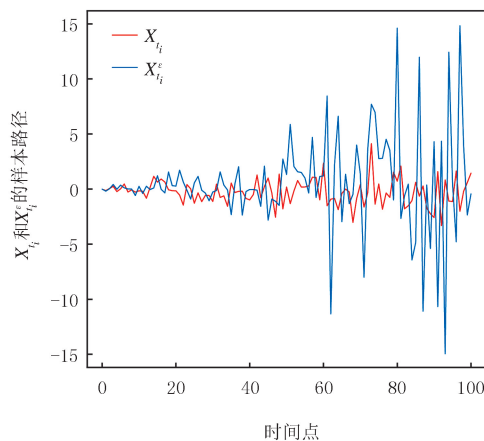
(a)  $\epsilon=0.00001$ 时 $X_t$ 和 $X_t^\epsilon$ 的模拟路径



(b)  $\epsilon=0.00100$ 时 $X_t$ 和 $X_t^\epsilon$ 的模拟路径



(c)  $\epsilon=0.10000$ 时 $X_t$ 和 $X_t^\epsilon$ 的模拟路径



(d)  $\epsilon=0.50000$ 时 $X_t$ 和 $X_t^\epsilon$ 的模拟路径

图2  $X_t$ 和 $X_t^\epsilon$ 的模拟样本路径

Fig.2 The simulated sample paths of  $X_t$  and  $X_t^\epsilon$

$$dS_t^\epsilon = \mu S_t^\epsilon dt + \sigma S_t^\epsilon dB_t^{H,\epsilon}, \tag{27}$$

其中  $S_t^\epsilon$  是金融资产的价格过程,  $S_0^\epsilon$  为初值,  $B_t^{H,\epsilon}$  为式(6)所定义.

由半鞅驱动的金融模型在金融市场环境中是无套利的,下面研究模型(27)的期权定价问题.设  $K$  为敲定价格,  $T$  是到期日,则看涨期权的支付为  $(A_T - K)_+$ ,看跌期权的支付为  $(K - A_T)_+$ .这里  $A_T$  表示在执行时间  $[0, T]$  上金融资产的平均价格,其计算公式为:

$$A_T = \exp\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t^\epsilon dt\right\}. \tag{28}$$

假设无风险利率为常数  $r$ ,市场无摩擦,期权在到期日才能执行,则几何平均亚式看涨期权和看跌期权的定价公式分别为:

$$C(K, T) = e^{-rT} E[(A_T - K)_+]. \tag{29}$$

和

$$P(K, T) = e^{-rT} E[(K - A_T)_+]. \tag{30}$$

下面的定理给出了期权定价公式的表达式.

**定理 2** 设金融资产的价格过程  $S_t^\epsilon$  满足式(27),则几何亚式看涨期权和看跌期权的定价公式为:

$$C(K, T) = S_0^\epsilon \exp\left\{-rT + \frac{\mu T}{2} - \frac{1}{4} \sigma^2 \epsilon^{2H-1} T + \frac{1}{2} \sigma_F^2\right\} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \tag{31}$$

和

$$P(K, T) = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0^\varepsilon \exp\left\{-rT + \frac{\mu T}{2} - \frac{1}{4} \sigma^2 \varepsilon^{2H-1} T + \frac{1}{2} \sigma_F^2\right\} \Phi(-d_1). \quad (32)$$

其中  $d_2 = \sigma_F^{-1}(\hat{\mu}_F - \ln K)$ ,  $d_1 = d_2 + \sigma_F$ .

**证明** 由式(15)知,模型(27)可以写为:

$$dS_t^\varepsilon = [\mu S_t^\varepsilon + \sigma(H - \frac{1}{2}) S_t^\varepsilon \omega_t^{H,\varepsilon}] dt + \sigma \varepsilon^{H-\frac{1}{2}} S_t^\varepsilon dW_t, \quad (33)$$

所以模型(27)在风险中性测度下的解为:

$$S_t^\varepsilon = S_0^\varepsilon \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon^{2H-1} t + \sigma B_t^{H,\varepsilon}\right\}. \quad (34)$$

令  $F_T = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t^\varepsilon dt$ , 则  $A_T = \exp\{F_T\}$ . 由式(34)知:

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{1}{T} \int_0^T \ln[S_0^\varepsilon \exp\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon^{2H-1} t + \sigma B_t^{H,\varepsilon}\}] dt = \ln S_0^\varepsilon + \frac{1}{T} \int_0^T \mu t dt - \frac{1}{T} \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon^{2H-1} \int_0^T t dt + \\ &\quad \frac{\sigma}{T} \int_0^T B_t^{H,\varepsilon} dt = \ln S_0^\varepsilon + \frac{\mu}{2} T - \frac{1}{4} \sigma^2 \varepsilon^{2H-1} T + \frac{\sigma}{T} \int_0^T B_t^{H,\varepsilon} dt. \end{aligned} \quad (35)$$

由于金融资产价格过程  $S_t^\varepsilon$  服从正态分布,故  $F_T$  在风险中性测度下是正态分布,下面计算  $F_T$  的数学期望  $\hat{\mu}_F$  和方差  $\sigma_F^2$ . 由式(35)知,

$$\hat{\mu}_F = E[F_T] = \ln S_0^\varepsilon + \frac{\mu}{2} T - \frac{1}{4} \sigma^2 \varepsilon^{2H-1} T + E\left[\frac{\sigma}{T} \int_0^T B_t^{H,\varepsilon} dt\right] = \ln S_0^\varepsilon + \frac{\mu}{2} T - \frac{1}{4} \sigma^2 \varepsilon^{2H-1} T. \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \text{Var}[F_T] = E(F_T - \hat{\mu}_F)^2 = E\left[\frac{\sigma}{T} \int_0^T B_t^{H,\varepsilon} dt\right]^2 = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E(B_t^{H,\varepsilon} B_s^{H,\varepsilon}) ds dt = \\ &\quad 2 \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T ds \int_0^s E(B_t^{H,\varepsilon} B_s^{H,\varepsilon}) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

因此,  $F_T \sim N(\hat{\mu}_F, \sigma_F^2)$ . 故有

$$\begin{aligned} C(K, T) &= e^{-rT} E[(A_T - K)_+] = e^{-rT} \int_{\{x | e^x > K\}} (e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_F} \exp\left\{-\frac{(x - \hat{\mu}_F)^2}{2\sigma_F^2}\right\} dx = \\ &= e^{-rT + \hat{\mu}_F + \frac{1}{2}\sigma_F^2} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \sigma_F)^2}{2}} dy - K e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-rT + \hat{\mu}_F + \frac{1}{2}\sigma_F^2} \int_{-d_2 - \sigma_F}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \\ &\quad K e^{-rT} \Phi(d_2) = e^{-rT + \hat{\mu}_F + \frac{1}{2}\sigma_F^2} \Phi(d_2 + \sigma_F) - K e^{-rT} \Phi(d_2). \end{aligned} \quad (38)$$

其中  $d_2 = \frac{1}{\sigma_F}(\hat{\mu}_F - \ln K)$ ,  $d_1 = d_2 + \sigma_F$ ,  $\Phi(\cdot)$  是标准正态变量的分布函数.把式(36)中的  $\hat{\mu}_F$  代入式(38)即可得式(31),类似的推导过程可得式(32)成立.

## 参 考 文 献

- [1] HURST H E. Long-term storage capacity of reservoirs[J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, 116(1): 770-799.
- [2] BAILLIE R T. Long memory processes and fractional integration in econometrics[J]. Journal of Econometrics, 1996, 73(1): 5-59.
- [3] BERAN J. Statistical methods for data with long-range dependence[J]. Statistical Science, 1992, 7(4): 404-416.
- [4] GRANGER C W J, DING Z. Varieties of long memory models[J]. Journal of Econometrics, 1996, 73(1): 61-77.
- [5] RATTIKAN S. A Fractional Hull-White model[J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2004, 32(4): 413-418.
- [6] RATTIKAN S. On some fractional stochastic models in finance[D]. Thailand: Suranaree University of Technology, 2004.
- [7] 李志生, 刘正捷. 资产收益的短记忆性与长记忆性: 我国股票市场效率的动态分析[J]. 江西财经大学学报, 2011, 73(1): 5-12.
- [8] LI Z S, LIU Z J. Short and long memory in return on assets: A dynamic analysis of the efficiency of China's stock market[J]. Journal of Jiangxi University of Finance and Economics, 2011, 73(1): 5-12.
- [8] 宛莹, 杜乐鹿, 庄新田. 股市收益率与交易量长记忆性实证研究[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2012, 33(7): 1056-1059.
- YUAN Y, DU L L, ZHUANG X T. An empirical research on long-term memory of returns and trading volumes of stock markets in China [J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2012, 33(7): 1056-1059.

- [9] 肖炜麟,张卫国,徐维东.双分式布朗运动下股本权证的定价[J].系统工程学报,2013,28(3):348-354.  
XIAO W L,ZHANG W G,XU W D.Pricing equity warrants in a bifractional Brownian motion[J].Journal of Systems Engineering,2013,28(3):348-354.
- [10] 张跃军,张晗,王金丽.考虑结构变化和长记忆性的国际原油价格波动率预测研究[J].中国管理科学,2021,29(9):54-64.  
ZHANG Y J,ZHANG H,WANG J L.Volatility forecasting of crude oil market based on structural changes and long memory[J].Chinese Journal of Management Science,2021,29(9):54-64.
- [11] BISHWAL J P N.Parameter estimation in stochastic differential equations[M].New York:Springer,2007.
- [12] NUALART D.The Malliavin calculus and related topics[M].Berlin:Spring-Verlag,2006.
- [13] THAO T H,NGUYEN T T.Fractal Langevin equation[J].Vietnam Journal of Mathematics,2002,30(1):89-96.
- [14] THAO T H,TUONG T M,LOC T P.Fractional Ornstein-Uhlenbeck signal processing[J].East-West Journal of Mathematics,2017,19(1):1-8.
- [15] 苗雨,常萌萌.一般随机变量的完全收敛及大数定律[J].河南师范大学学报(自然科学版),2023,51(2):15-24.  
MIAO Y,CHANG M M.On the complete convergence and the strong law of large numbers for general random variables[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2023,51(2):15-24.
- [16] 韦煜明,王艳霞,申芳芳.广义随机 Volterra 积分微分方程的截断 Euler-Maruyama 方法的强收敛性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2022,50(1):73-81.  
WEI Y M,WANG Y X,SHEN F F.Strong convergence of the truncated Euler-Maruyama method for generalized stochastic Volterra integro-differential equations[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2022,50(1):73-81.
- [17] GOODMAN V,STAMPFLI G.An introduction to the Mathematics of finance:Modeling and Hedging[M].California:Brook/Cole,2001.

## Approximate solution and option pricing for a class of the fractional financial asset price process

Wang Jixia, Xiao Xiaofang

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** In order to fit the long memory of financial asset data, many scholars use stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion to describe the change law of financial asset prices. However, the model driven by fractional Brownian will generate arbitrage opportunities in the financial market, which is difficult for people to study the option pricing problem. In view of this, this paper first uses a class of fractional Gaussian processes with semimartingale properties to approximate the fractional Brownian motion, which is uniformly convergence under  $L^2(\Omega)$ . Then, the fractional Gauss process is used to establish the statistical model of the financial asset price, and the closed form expression of the the approximate solution of the model is obtained. Selecting the fractional Langevin model as a special case, simulating the sample paths of the approximate solution and the solution of original model, and the approximate degree of them are shown. Finally, based on the constructed approximate model, the pricing formulas of geometric average Asian call option and put option are obtained.

**Keywords:** fractional Brownian motion;  $L^2$ -approximate approach; semimartingale; long-memory; option pricing

[责任编辑 陈留院 赵晓华]