文章编号:1000-2367(2016)02-0022-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.02.004

强阻尼波动方程的非协调混合有限元分析

毛凤梅,刁 群

(平顶山学院 数学与统计学院,河南 平顶山 467000)

摘 要:研究了非线性强阻尼波动方程的 $EQ_1^{rot}+Q_{10}\times Q_{01}$ 非协调混合有限元方法.利用该单元的高精度分析,借助于 EQ_1^{rot} 元所具有的两个性质:(a)其相容误差为 $O(h^2)$ 阶比它的插值误差高一阶;(b)插值算子与 Ritz 投影等价,以及插值后处理技术,在半离散的格式下分别导出了原始变量 u 的 H^1 模和流量 $\vec{p}$ 的 L^2 模下 $O(h^2)$ 阶超逼近;整体超收敛性质.最后,通过构造一个新的全离散格式,得到了 $O(h^2+\tau^2)$ 的超逼近结果.

关键词:非线性强阻尼波动方程;非协调混合元;半离散和全离散格式;超逼近;超收敛

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A

考虑如下非线性强阻尼波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\nabla\cdot(\nabla u_{tt}+\nabla u_t+\nabla u)=f(u),(X,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u(X,t)=0, \qquad (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),\quad X\in\Omega. \end{cases}$$

其中 Ω 为 $\mathbf{R}^2$ 上的一个有界闭区域,$\partial\Omega$ 为其光滑边界,$X=(x,y)$,$u_0(X)$,$u_1(X)$ 是已知的光滑函数,$f(u)$ 满足 Lipschitz 条件.

非线性强阻尼波动方程是从非线性弹性杆中纵向形变传播及弱非线性作用下空间变换离子声波传播问题中提出的,是一类具有强烈物理背景的非线性发展方程.文献[1]讨论了其整体强解的存在性和唯一性,并在一定条件下,研究了解的渐近性质和 blow up 现象;文献[2-3]研究了该类多维方程的柯西问题整体解的存在性;文献[4]对于问题(1)有限元的数值解法进行了研究,它给出了半离散和全离散协调有限元格式,并证明了这两种格式解的存在性和唯一性;文献[5-7]对该方程分别利用 Hermite 型矩形元和 EQ_1^{rot} 非协调有限元以及 H^1-Galerkin(协调线性三角形元)混合有限元方法在半离散和全离散格式下进行了超逼近及超收敛分析;文献[8]对问题(1)利用双线性元在半离散格式下导出了具有三阶精度的外推解,并对半离散和全离散格式进行了超逼近及超收敛分析.

标准的有限元空间对逼近解的光滑度要求很高,这给实际应用带来很多困难,于是产生了混合有限元方法.由于混合有限元方法与传统有限元方法相比,具有可同时逼近标量函数(压力)和向量函数(流量)的优势,且引入通量后可改为在光滑度较弱的混合元空间中求解,但是该方法所涉及的两个逼近空间通常需要满足所谓的 B-B 条件.文献[9]提出了另外一种混合元格式,当选取的两个逼近空间满足一种简单的约束关系时,该格式自然满足 B-B 条件,避开了因梯度算子带来的麻烦,且在和传统格式同样精度的条件下,该格式需要更小的自由度规模.文献[10-14]分别讨论了 sine-Gordon 方程、广义神经传播方程、非线性 Schrödinger 方程和四阶双曲方程的 $Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$ 混合有限元方法半离散和全离散格式下的超逼近和超收敛分析;文献[15]研究了线性常系数抛物方程的非协调混合元($EQ_1^{rot}+Q_{10}\times Q_{01}$)的超收敛分析和外推;文献[16]利用 $EQ_1^{rot}+Q_{10}\times Q_{01}$ 研究了 Sobolev 方程全离散格式下的收敛性分析.但是,关于非线性强阻尼波动方程利用这种满足简单约束关系的非协调单元对进行半离散和全离散误差分析的讨论目前还很少见.

收稿日期:2015-03-09;**修回日期**:2016-01-21.

基金项目:国家自然科学基金(11271340);河南省科技计划项目(162300410082).

第 1 作者简介(通信作者):毛凤梅(1965-),女,河南鲁山人,平顶山学院副教授,研究方向为有限元方法及其应用,E-mail:maofengmei@pdsu.edu.cn.

本文主要目的是利用 $EQ_1^{rot}+Q_{10}\times Q_{01}$ 非协调单元对研究非线性强阻尼波动方程在半离散及全离散格式下的逼近和超收敛分析，借助于摘要中提到的该单元的特殊性质、插值理论、高精度分析和插值后处理技术，在半离散格式下分别导出了原始变量 u 的 H^1 模和中间变量 $\vec{p}$ 的 L^2 模下 $O(h^2)$ 阶超逼近性质和整体超收敛. 同时，通过构造一个新的全离散格式，在网格比不作要求的情况下，得到了无条件的超逼近结果.

1　单元构造及性质

设 Ω 是一个矩形区域，其边分别平行于 x 轴和 y 轴，T_h 是 Ω 满足正则假设的矩形单元剖分族. 设 $K\in T_h$，定义单元 K 的中心点为 (x_K,y_K)，边长分别为 $2h_{x,K},2h_{y,K}$，单元 K 的顶点为 $a_1(x_K-h_{x,K},y_K-h_{y,K})$，$a_2(x_K+h_{x,K},y_K-h_{y,K})$，$a_3(x_K+h_{x,K},y_K+h_{y,K})$，$a_4(x_K-h_{x,K},y_K+h_{y,K})$，单元 K 的边长为 $l_i=\overline{a_ia_{i+1}}$，$i=1,2,3,4(\mathrm{mod}4)$，取 $h_K=\max\limits_{K\in T_h}\{h_{x,K},h_{y,K}\}$，$h=\max\limits_{K\in T_h}\{h_K\}$.

定义混合有限元空间[17] 为

$$V_h=\{v_h;\ v_h|_K\in \mathrm{span}\{1,x,y,x^2,y^2\},\int_F[v_h]\mathrm{d}s=0,F\subset\partial K,\forall K\in T_h\},$$
$$\vec{W}_h=\{\vec{w}_h=(w_h^1,w_h^2);\vec{w}_h|_K\in Q_{1,0}(K)\times Q_{0,1}(K),\ \forall K\in T_h\},$$

其中，$Q_{m,n}(K)=\mathrm{span}\{x^iy^j,0\le i\le m,\ 0\le j\le n\}$，$[v_h]$ 表示跨过单元边界 F 的跳跃值. 当 $F\subset\partial\Omega$ 时，$\int_F v_h\mathrm{d}s=0$.

对于 $u\in H^1(\Omega),\vec{w}\in(H^1(\Omega))^2$，设 $\Pi_h^1:u\to V_h$ 和 $\Pi_h^2:(H^1(\Omega))^2\to\vec{W}_h$ 分别为由 V_h 和 $\vec{W}_h$ 诱导出的插值算子，满足：$\Pi_h^1|_K=\Pi_K^1,\Pi_h^2|_K=\Pi_K^2$，

$$\begin{cases}\int_{l_i}(u-\Pi_K^1u)\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4,\\ \int_K(u-\Pi_K^1u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\end{cases}\tag{2}$$

和 $\int_{l_i}(\vec{w}-\Pi_K^2\vec{w})\cdot\vec{n}=0,i=1,2,3,4$. 其中，$\vec{n}$ 表示 ∂K 上的单位外法向量.

对于 $\varphi\in H^1(\Omega),\vec{\phi}\in(H^2(\Omega))^2,\vec{w}_h\in\vec{W}_h$，$v_h\in V_h$，文献[17－19]分别证明了如下结论

$$(\nabla(\varphi-\Pi_h^1),\vec{w}_h)=0,\tag{3}$$
$$(\vec{\phi}-\Pi_h^2\vec{\phi},\vec{w}_h)\le Ch^2|\vec{\phi}|_2\|\vec{w}_h\|_0,\tag{4}$$
$$|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{\phi}\cdot\vec{n}v_h\mathrm{d}s|\le Ch^2|\vec{\phi}|_2\|v_h\|_{1,h}.\tag{5}$$

2　问题的逼近与超收敛分析

为了构造问题(1) 的新的混合有限元格式，引入中间变量 $\vec{p}=-\nabla u$，则方程(1) 可变为

$$\begin{cases}u_{tt}+\nabla\cdot\vec{p}_{tt}+\nabla\cdot\vec{p}_t+\nabla\cdot\vec{p}=f(u),(X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ \vec{p}+\nabla u=0,(X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u(X,t)=0,(X,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),\end{cases}\tag{6}$$

与方程(6) 对应的变分问题为：求 $\{u,\vec{p}\}:[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times(H^1(\Omega))^2$，使得

$$\begin{cases}(u_{tt},v)-(\vec{p},\nabla v)-(\vec{p}_t,\nabla v)-(\vec{p}_{tt},\nabla v)=(f(u),v),\forall v\in H_0^1(\Omega),\\ (\vec{p},\vec{w})+(\nabla u,\vec{w})=0,\forall\vec{w}\in(H^1(\Omega))^2,\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

相应的混合有限元逼近为：求 $\{u_h,\vec{p}_h\}:[0,T]\to V_h\times\vec{w}_h$ 满足

$$\begin{cases}(\mathrm{a})(u_{htt},v_h)-(\vec{p}_h,\nabla v_h)_h-(\vec{p}_{ht},\nabla v_h)_h-(\vec{p}_{htt},\nabla v_h)_h=(f(u_h),v_h),\forall v_h\in V_h,\\ (\mathrm{b})(\vec{p}_h,\vec{w}_h)+(\nabla u,\vec{w}_h)_h=0,\forall\vec{w}_h\in W_h,\\ u_h(X,0)=\Pi_h^1u_0(X),u_{ht}(X,0)=\Pi_h^1u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{8}$$

其中$(u,v)_h=\sum\limits_{K\in T_h}\int_K uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在不引起混淆的情况下仍将 $(u,v)_h$ 表示为(u,v).

定理 1 问题(8) 存在唯一解.

证明设$\{\phi_i\}_{i=1}^{r_1}$和$\{\psi_j\}_{j=1}^{r_2}$分别是 V_h 和 $\vec{W}_h$ 的一组基,令

$$u_h=\sum_{i=1}^{r_1}h_i(t)\phi_i,\vec{p}_h=\sum_{j=1}^{r_2}g_j(t)\psi_j.$$

在(8)(a) 中令 $v_h=\phi_i$，在(8)(b) 中令 $\vec{w}_h=\psi_j$,则方程(8) 可变为如下等价形式

$$\begin{cases}A\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{H}(t)}{\mathrm{d}t^2}-B(\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{G}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}\vec{G}(t)}{\mathrm{d}t}+G(t))=\vec{F},\\ C\vec{G}G(t)+B^{\mathrm{T}}\vec{H}(t)=0.\end{cases}\tag{9}$$

其中:$\vec{H}(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_{r_1}(t))^{\mathrm{T}},\vec{G}=(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_{r_2}(t))^{\mathrm{T}},A=(\phi_i,\phi_j)_{r_1\times r_1}$，$B=(\nabla\phi_j,\psi_i)_{r_1\times r_2}$,$C=(\psi_i,\psi_j)_{r_2\times r_2}$，$B^{\mathrm{T}}=(\psi_j,\nabla\phi_i)_{r_2\times r_1}$,$\vec{F}=(f(\sum\limits_{k=1}^{r_1}h_k(t)\phi_k),\phi_j)_{r_1\times 1}$.

方程(9) 第 2 式对 t 求一阶导，二阶导再代入方程(9) 第 1 式得

$$(A+BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\frac{\mathrm{d}^2\vec{H}(t)}{\mathrm{d}t^2}+BC^{-1}B^{\mathrm{T}}(\frac{\mathrm{d}\vec{H}(t)}{\mathrm{d}t}+\vec{H}(t))=\vec{F}.$$

由于 $A+BC^{-1}B^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵,$\vec{F}$ 满足 Lipschitz 连续,初值 $\vec{H}(0)$ 由 $u_h(X,0)$，$u_{ht}(X,0)$ 所确定,由文献[20] 可知,当 $t>0$ 时,$\vec{H}(t)$ 有唯一解，进而,$\vec{G}(t)$ 有唯一解,所以问题(8) 存在唯一解：

下面给出上述问题的超逼近分析.

定理 2 设$\{u,\vec{p}\}$ 和 $\{u_h,\vec{p}_h\}$ 分别是方程(7) 和(8) 的解，u，u_t，$u_{tt}\in H^2(\Omega)$,$\vec{p}=(p^1,p^2)\in(H^2(\Omega))^2$，则

$$\|\Pi_h^1u-u_h\|_{1,h}+\|\Pi_h^1u_t-u_{ht}\|_{1,h}\leq Ch^2[\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Pi_h^2\vec{p}-\vec{p}_h\|_0\leq Ch^2[\|\vec{p}\|_2+\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 记 $u-u_h=(u-\Pi_h^1u)+(\Pi_h^1u-u_h)\doteq\eta+\xi,\vec{p}-\vec{p}_h=(\vec{p}-\Pi_h^2\vec{p})+(\Pi_h^2\vec{p}-\vec{p}_h)\doteq\vec{\rho}+\vec{\theta}$.
由(3)、(7) 和(8) 式可得

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\ (\xi_{tt},v_h)-(\vec{\theta},\nabla v_h)-(\vec{\theta}_t,\nabla v_h)-(\vec{\theta}_{tt},\nabla v_h)=(f(u)-\\ f(u_h),v_h)-(\eta_{tt},v_h))+(\vec{\rho},\nabla v_h)+(\vec{\rho}_t,\nabla v_h)+(\vec{\rho}_{tt},\nabla v_h)+\\ \sum\limits_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}_{v_h}\mathrm{d}s+\sum\limits_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\vec{n}_h\mathrm{d}s+\sum\limits_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}_{tt}\cdot\vec{n}_{v_h}\mathrm{d}s,\\ (\mathrm{b})\ (\vec{\theta},\vec{w}_h)+(\nabla\xi,\vec{w}_h)=-(\vec{\rho},\vec{w}_h).\end{cases}\tag{10}$$

对(10)(b) 求导可得

$$(\vec{\theta}_t,\vec{w}_h)+(\nabla\xi_t,\vec{w}_h)=-(\vec{\rho}_t,\vec{w}_h),\tag{11}$$

$$(\vec{\theta}_{tt},\vec{w}_h)+(\nabla\xi_{tt},\vec{w}_h)=-(\vec{\rho}_{tt},\vec{w}_h).\tag{12}$$

在(10)(a) 中令 $v_h=\xi_t$,在(10)(b) 和(11)、(12) 式中令 $\vec{w}_h=\nabla\xi_t$,得

$$(\xi_{tt},\xi_t)+(\nabla\xi_{tt},\nabla\xi_t)+(\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)+(\nabla\xi,\nabla\xi_t)=(f(u)-f(u_h),\xi_t)-(\eta_{tt},\xi_t)+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\xi_t\mathrm{d}s+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\vec{n}\xi_t\mathrm{d}s+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}_{tt}\cdot\vec{n}\xi_t\mathrm{d}s.\tag{13}$$

根据(4)、(5) 式,插值理论,Schwarz 不等式,Young 不等式,Lipschitz 连续对(13) 式进行估计

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2)+\|\xi_t\|_{1,h}^2\leq C(\|\eta\|_0+\|\xi\|_0)\|\xi_t\|_0+Ch^2\|u_{tt}\|_2\|\xi_t\|_0+Ch^2\|\vec{p}\|_2\|\xi_t\|_{1,h}+Ch^2\|\vec{p}_t\|_2\|\xi_t\|_{1,h}+Ch^2\|\vec{p}_{tt}\|_2\|\xi_t\|_{1,h}\leq Ch^4(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+$$

$$\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)+C(\|\xi\|_{1,h}^2+\|\xi_t\|_0^2+\|\xi_t\|_{1,h}^2).$$

对上式两边从 0 到 t 积分，并注意到 $\xi(X,0)=\xi_t(X,0)=0$，再由 Gronwall 引理，得

$$\|\xi_t\|_{1,h}^2+\|\xi\|_{1,h}^2\leq Ch^4\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s,$$

$$\|\xi_t\|_{1,h}+\|\xi\|_{1,h}\leq Ch^2[\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}.$$

另一方面，在(10)(b) 中令 $\vec{w}_h=\vec{\theta}$，则有 $(\vec{\theta},\vec{\theta})+(\nabla\xi,\vec{\theta})=-(\vec{\rho},\vec{\theta})$，所以，$\|\vec{\theta}\|_0^2\leq C\|\xi\|_{1,h}\|\vec{\theta}\|_0+Ch^2\|\vec{p}\|_2\|\vec{\theta}\|_0$，
即

$$\|\vec{\theta}\|_0\leq C\|\xi\|_{1,h}+Ch^2\|\vec{p}\|_2.\tag{15}$$

将(14) 式代入(15) 式，可得

$$\|\vec{\theta}\|_0\leq Ch^2\{\|\vec{p}\|_2+[\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2\|+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}.\tag{16}$$

为了得到整体超收敛，类似于文献[10]构造插值后处理算子 Π_{2h}^1 和 Π_{2h}^2：$\bar{K}\in T_{2h}$ 把相邻 4 个小单元格合并构成的一个大单元，$\bar{K}\in\bigcup_{i=1}^{4}K_i$，并有如下结论成立

定理 3　设 $\{u,\vec{p}\}$ 和 $\{u_h,\vec{p}_h\}$ 分别是(7) 和(8) 的解，$u,u_{tt}\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$\vec{p}=(p^1,\ p^2)\in(H^2(\Omega))^2$，则有

$$\|u-\Pi_{2h}^1u_h\|_{1,h}\leq Ch^2\{\|u\|_3+[\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}\},$$

$$\|\vec{p}-\Pi_{2h}^2\vec{p}_h\|_0\leq Ch^2\{\|\vec{p}_2+[\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2+\|\vec{p}_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}\}.$$

3　全离散及误差分析

设 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$ 是$[0,T]$上步长为 $\tau=T/N$ 的剖分，$t_n=n\tau$，$n=1,2,\cdots,N$，$u^n=u(t_n)$，U^n代表 $t=t_n=n\tau$ 对 $u^n=u(t_n)$ 在 V_h中的逼近，为了方便起见，引入一些记号

$$\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),\partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\tau^{-1}(\varphi^{n+1}-\varphi^n),$$

$$\varphi^{n,\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}(\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\partial_t\varphi^n=(2\tau)^{-1}(\varphi^{n+1}-\varphi^{n-1})=\tau^{-1}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\varphi^{n-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\partial_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\partial_{tt}\varphi^n=\tau^{-2}(\varphi^{n+1}-2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\tau^{-1}(\partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\partial_t\partial^{n-\frac{1}{2}}).$$

由于以上记号，方程(7) 可改写为如下形式

$$\begin{cases}(\partial_{tt}u^n,v)-(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)-(\partial_t\vec{p}^n,\nabla v)-(\partial_{tt}\vec{p}^n,\nabla v)=\\(f^{n,\frac{1}{4}}(u),v)+(R_1^n,v)+(\nabla R_2^n,\nabla v)+(\nabla R_3^n,\nabla v),\\(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})=-(\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}).\end{cases}\tag{17}$$

其中，$R_1^n=\partial_{tt}u^n-u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$，$R_2^n=\partial_t\vec{p}^n-\vec{p}_t^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$，$R_2^n=\partial_{tt}\vec{p}^n-\vec{p}_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$.

与(17) 式对应的全离散格式为：求 $(U^n,\vec{P}^n)\in V_h\times\vec{W}_h$，满足

$$\begin{cases}(\partial_{tt}U^n,v_h)-(\vec{P}^{n,\frac{1}{4}},\nabla v_h)-(\partial_{tt}\vec{P}^n,\nabla v_h)-(\partial_t\vec{P}^n,\nabla v_h)=(f^{n,\frac{1}{4}}(U),v_h),\\(\vec{P}^n,\vec{w}_h)=-(\nabla U^n,\vec{w}_h),\\U^0=\Pi_h^1u_0,U^1=\Pi_h^1(u_0+u_1\tau+\frac{1}{2}u_{tt}(0)\tau^2).\end{cases}\tag{18}$$

定理 4　设 u^n 和 U^n 分别是(17) 和(18) 的解，$u,u_{tt}\in H^2(\Omega)\cap W^{2,\infty}$，则

$$\|\Pi_h^1u^n-U^n\|_{1,h}=O(h^2+\tau^2),\ \|\Pi_h^2\vec{p}^n-\vec{P}^n\|_0=O(h^2+\tau^2).$$

证明 记 $u^n - U^n = (u^n - \Pi_h^1 u^n) + (\Pi_h^1 u^n - U^n) \doteq \eta^n + \xi^n$,

$$\vec{p}^n - \vec{P}^n = (\vec{p}^n - \Pi_h^2 \vec{p}^n) + (\Pi_h^2 \vec{p}^n - \vec{P}^n) \doteq \vec{\rho}^n + \vec{\theta}^n.$$

由(17) 和(18) 得误差方程

$$\begin{cases}(a)(\partial_{tt}\xi^n, v_h) - (\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v_h) - (\partial_t \vec{\theta}^n, \nabla v_h) - (\partial_{tt}\vec{\theta}^n, \nabla v_h) = -(\partial_{tt}\eta^n, v_h) + \\ (\vec{\rho}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v_h) + (\partial_t \vec{p}^n, \nabla v_h) + (\partial_{tt}\vec{\rho}^n, \nabla v_h) + (f^{n,\frac{1}{4}}(u) - \\ f^{n,\frac{1}{4}}(U), v_h) + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n}_{v_h} \mathrm{d}s + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}_t^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n}_{v_h} \mathrm{d}s + \\ \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}_{tt}^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n}_{v_h} \mathrm{d}s + (R_1^n, v) + (\nabla R_2^n, \nabla v) + (\nabla R_3^n, \nabla v), \\ (b)(\vec{\theta}^n, \vec{w}_h) = -(\nabla \xi^n, \vec{w}_h) - (\vec{\rho}^n, \vec{w}_h).\end{cases} \tag{19}$$

由方程(19) 第 2 式可得

$$(\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}, \vec{w}_h) = -(\nabla \xi^{n,\frac{1}{4}}, \vec{w}_h) - (\vec{\rho}^{n,\frac{1}{4}}, \vec{w}_h), \tag{20}$$

$$(\partial_t \vec{\theta}^n, \vec{w}_h) = -(\partial_t \nabla \xi^n, \vec{w}_h) - (\partial_t \vec{\rho}^n, \vec{w}_h), \tag{21}$$

$$(\partial_{tt} \vec{\theta}^n, \vec{w}_h) = -(\partial_{tt} \nabla \xi^n, \vec{w}_h) - (\partial_{tt} \vec{\rho}^n, \vec{w}_h). \tag{22}$$

在方程(19) 第 1 式中取 $v_h = \partial_t \xi^n$, 在(17)、(18)、(19) 式中取 $\vec{w}h = \partial_t \nabla \xi^n$,可得

$$(\partial_{tt}\xi^n, \partial_t\xi^n) + (\partial_{tt} \nabla \xi^n, \partial_t\xi^n) + (\partial_t \nabla \xi n, \nabla \partial_t \xi^n) + (\nabla \xi^{n,\frac{1}{4}}, \nabla \partial_t \xi^n) =$$
$$(f^{n,\frac{1}{4}}(u) - f^{n,\frac{1}{4}}(U), \partial_t \xi^n) - (\partial_{tt}\eta^n, \partial_t\xi^n) + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n} \partial_t \xi^n \mathrm{d}s +$$
$$\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}_t^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n} \partial_t \xi^n \mathrm{d}s + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \vec{p}_{tt}^{n,\frac{1}{4}} \cdot \vec{n} \partial_t \xi^n \mathrm{d}s +$$
$$(R_1^n, \partial_t \xi^n) + (\nabla R_2^n, \nabla \partial_t \xi^n) + (\nabla R_3^n, \nabla \partial_t \xi^n) \doteq \sum_{i=1}^{8} A_i. \tag{23}$$

先估计(23) 式左端项

$$(\partial_{tt}\xi^n, \partial_t\xi^n) = (2\tau)^{-1}(\| \partial_t \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_0^2 - \| \partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_0^2),$$

$$(\partial_{tt} \nabla \xi^n, \partial_t \nabla \xi^n) = (2\tau)^{-1}(\| \partial_t \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 - \| \partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2),$$

$$(\partial_t \nabla \xi^n, \partial_t \nabla \xi^n) = \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2,\ (\nabla \xi^{n,\frac{1}{4}}, \nabla \partial_t \xi^n) = (2\tau)^{-1}(\| \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 - \| \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2).$$

接下来估计(23) 式右端项

$$| A_1 | = \frac{1}{4}[(f^{n+1}(u) - f^{n+1}(U)) + 2(f^n(u) - f^n(U)) + (f^{n-1}(u) - f^{n-1}(U)), \partial_t \xi^n] \le$$
$$C(\| \eta^{n+1} \|_0^2 + \| \eta^n \|_0^2 + \| \eta^{n-1} \|_0^2) + C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \| \le$$
$$Ch^4(\| ^{n+1} \|_2^2 + \| u^n \|_2^2 + \| u^{n-1} \|_2^2) + C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \| \le$$
$$Ch^4 \| u \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2,$$

其中

$$\| u \|_{L^\infty(H^2(\Omega))} = \sup_{0 \le t \le T} \| u \|_{H^2(\Omega)}.$$

$$| A_2 | = (\partial_{tt}\tau^n, \partial_t \xi^n) \le C \| \partial_{tt}\tau^n \|_0 \| \partial_t \xi^n \|_0 \le C \| \partial_{tt}\tau^n \|_0^2 + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le C(2\tau)^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \| \tau_{tt} \|_0^2 \mathrm{d}s +$$
$$\frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le C(2\tau)^{-1} h^4 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \| u_{tt} \|_2^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le Ch^4 \| _{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2,$$

$$| A_3 | + | A_4 | + | A_5 \le Ch^2 \| \vec{p}^{n,\frac{1}{4}} \|_2 \partial_t \xi^n \|_{1,h} + Ch^2 \| \vec{p}_t^{n,\frac{1}{4}} \|_2 \partial_t \xi^n \|_{1,h} +$$
$$Ch^2 \| \vec{p}_{tt}^{n,\frac{1}{4}} \|_2 \partial_t \xi^n \|_{1,h} \le Ch^4(\| \vec{p} \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p}_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 +$$
$$\| \vec{p}_{tt} \| \ |_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2) + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2,\ | A_6 | + | A_7 | + | A_8 | \le C(\| R_{1,h}^n \|_0^2 +$$

$$\| \nabla R_2^n \|_0^2 + \| \nabla R_3^n \|_0^2) + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 + \frac{1}{5} \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2 \le C\tau^4 + \frac{2}{5} \| \partial_t \xi^n \|_{1,h}^2.$$

将上述结果代入(23)式可得

$$\frac{1}{2\tau}(\| \partial_t \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_0^2 - \| \partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_0^2) + \frac{1}{2}\tau(\| \partial_t \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 - \| \partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2) + \frac{1}{2}\tau(\| \xi^{n+\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 - \| \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2) \le Ch^4(\| u \|_{L^\infty H^2(\Omega)}^2 + \| u_{tt} \|_{L^\infty H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p} \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p}_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p}_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2) + C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + C\tau^4. \tag{24}$$

对(24)关于 n 从 1 到 $M-1$ 求和,得

$$\| \partial_t \xi^{M-\frac{1}{2}} \|_0^2 + \| \partial_t \xi^{M-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 + \| \xi^{M-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 \le C(\| \partial_t \xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 + \| \partial_t \xi^{\frac{1}{2}} \|_1^2 + \| \xi^{\frac{1}{2}} \|_1^2) + Ch^4\tau \sum_{n=1}^{M-1} (\| u \|_{L^\infty H^2(\Omega)}^2 + \| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| \vec{p} \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p}_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega)}^2 + \| \vec{p}_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + C\tau \sum_{n=1}^{M-1} (\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + C\sum_{n=1}^{M-1} \tau. \tag{25}$$

又因为 $\xi^1 = U^1 - \Pi_h^1 u^1 = O(\tau^3), \xi^0 = 0$,

所以,有

$$\| \partial_t \xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 + \| \partial_t \xi^{\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 + \| \xi^{\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 = \frac{1}{\tau^2} \| \xi^1 - \xi^0 \|_0^2 + \frac{1}{\tau^2} \| \xi^1 - \xi^0 \|_{1,h}^2 + \frac{1}{4} \| \xi^1 + \xi^0 \|_{1,h}^2 = O(\tau^4), \tag{26}$$

另一方面

$$Ch^4\tau \sum_{n=1}^{M-1} (\| u \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| \vec{p} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + C\sum_{n=1}^{M-1} \tau^5 = O(h^4 + \tau^4). \tag{27}$$

将(26),(27)式代入(25)得

$$\| \xi^{M-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 \le C(h^4 + \tau^4) + C\sum_{n=1}^{M-1} (\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2). \tag{28}$$

由于 $\| \xi^{M-\frac{1}{2}} \|_{1,h}^2 = \frac{1}{4}(\| \xi^M \|_{1,h}^2 + \| \xi^{M-1} \|_{1,h}^2) + \frac{1}{2}(\nabla \xi^M, \nabla \xi^{M-1})$,

$$(\nabla \xi^M, \nabla \xi^{M-1}) \le \| \xi^{M-1} \|_{1,h}^2 + \frac{1}{4} \nabla^M \|_{1,h}^2.$$

因此,(28)式可变为

$$\| \xi^M \|_{1,h}^2 \le \| \xi^{M-1} \|_{1,h}^2 + \frac{1}{4} \| \xi^M \|_{1,h}^2 + C(h^4 + \tau^4) + C\sum_{n=1}^{M-1} (\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2),$$

$$(1 - C\tau) \| \xi^M \|_{1,h}^2 \le C(h^4 + \tau^4) + C\tau \sum_{n=0}^{M-2} \| \xi^n \|_{1,h}^2 + (C\tau + 2) \| \xi^{M-1} \|_0^2.$$

选取 τ 适当小,使 $1 - C\tau$ 为正数,再由离散的 Gronwall 引理,得

$$\| \xi^M \|_{1,h} = O(h^2 + \tau^2).$$

在(19)(b)式中令 $\vec{w}_h = \vec{\theta}^n$, $(\vec{\theta}^n, \vec{\theta}^n) = -(\nabla \xi^n, \vec{\theta}^n) - (\vec{\rho}^n, \vec{\theta}^n)$

$$\| \vec{\theta}^n \|_0 \le \| \xi^n \|_{1,h} + Ch^2 \| \vec{p}^n \|_2.$$

所以有 $\| \vec{\theta}^n \|_0 = O(h^2 + \tau^2)$.

参 考 文 献

[1] 尚亚东. 方程 $u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u = f(u)$ 的初边值问题[J]. 应用数学学报,2000,23(3):385-392.

[2] Xu R Z, Liu Y C. Global Existence and Nonexistence of Solution for Cauchy Problem of Multidimensional Double Dispersion Equations[J]. J Math Anal Appl,2009,359(2):739-751.

[3] Xu R Z, Liu Y C, Yu T. Global Existence of Solution for Cauchy Problem of Multidimensional Double Dispersion Equations[J]. Nonlinear Analysis,2009,71(10):4977-4983.

[4] 孙同军. 一类高维非线性色散耗散波动方程的有限元分析[J]. 山东大学学报(理学版),2003,33(6):712-716.

[5] Fan M Z, Zhang J J, Shi D Y. Hermite-type Finite Element Analysis for Nonlinear Dispersion-dissipative Wave Equations[J]. Math Appl, 2012, 25(2): 341-349.

[6] 张亚东,李新祥,石东洋.强阻尼波动方程的非协调混合元超收敛分析[J].山东大学学报(理学版),2014,49(5):28-35.

[7] 石东洋,唐启立,董晓静.强阻尼波动方程 H^1-Galerkin 混合有限元超收敛分析[J].计算数学,2012,34(3):317-328.

[8] 王芬玲,石东洋.非线性色散耗散波动方程双线性元的高精度分析[J].数学物理学报,2014,34A(6):1599-1610.

[9] 陈绍春,陈红如.二阶椭圆问题新的混合元格式[J].计算数学,2010,32(2):213-218.

[10] 王芬玲,樊明智,石东洋.非线性 sine-Gordon 方程最低阶新混合元格式高精度分析[J].山西大学学报(自然科学版),2014,37(3):342-348.

[11] 樊明智,王芬玲,石东洋.广义神经传播方程最低阶新混合元格式高精度分析[J].山东大学学报(理学版),2015,50(8):78-89.

[12] 王芬玲,樊明智,石东洋.非线性 sine-Gordon 方程的一个新的非协调混合元格式[J].应用数学,2014,27(3):498-506.

[13] 赵艳敏,王芬玲,石东洋.非线性 Schrödotodinger 方程新混合元方法精度分析[J].计算数学,2015,37(2):162-178.

[14] 张厚超,石东洋,王瑜.一类非线性四阶双曲方程扩展的混合元方法超收敛分析[J].计算数学,2016,38(1):66-82.

[15] 石东洋,张亚东.抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛分析及外推[J].计算数学,2013,34(4):452-463.

[16] 石东洋,闫凤娜.Sobolev 程一非协调混合有限元格式的收敛分析[J].郑州大学学报(理学版),2015,47(4):7-16.

[17] Shi D Y, Zhang Y D. High accuracy analysis of a new nonconforming mix finite element scheme for Sobolev equations[J]. Appl Math Comput, 2011, 218(7): 3176-3186.

[18] 林 群,严宁宁.高效有限元构造与分析[M].保定:河北大学出版社,1996:75-77.

[19] Shi D Y, Mao S P, Chen S C. *Anisotropic nonconforming finite element with some superconvergence results*[J]. *J Comput Math*, 2005, 3(3): 261-274.

[20] Hale J K. Ordinary differential equations[M]. New York: Wiley-Inter Science, 1969: 28-30.

A Nonconforming Mixed Element Analysis for Nonlinear Strongly Damped Wave Equations

MAO Fengmei, DIAO Qun

(School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China)

Abstract: In this paper, with help of $EQ_1^{rot}+Q_{10}\times Q_{01}$ element, a nonconforming mixed finite element method for nonlinear strongly damped wave Equation is investigated By utilizing high accuracy analysis, two special properties of EQ_1^{rot} element: (a) the consistency error is of order $O(h^2)$ which is one order higher than its interpolation error; (b) the interpolation operator is equivalent to its Ritz-projection operator, the super-close and the global super-convergence results with order $O(h^2)$ for the primitive solution u in broken H^1-norm and flux variable $\vec{p}$ in L^2-norm are obtained through interpolated postprocessing approach, respectively for semi-discrete scheme. At the same time, the super-close results with order $O(h^2+\tau^2)$ are obtained through constructing a new full-discrete scheme.

Keywords: strongly damped wave equations; nonconforming mixed element; semi-discrete; full-discrete schemes; super-close; super-convergence