文章编号:1000-2367(2019)05-0015-10 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2019.05.003

第三类型热弹性 Timoshenko 系统整体解的存在性、渐近性及其一致吸引子

秦玉明,丁洁

(东华大学 理学院,上海 201620)

摘 要:主要研究的是第三类型非自治热弹性 Timoshenko 系统.在一定的假设条件下,利用半群和多乘子的方法证明了解的存在性和渐近性结果,并利用一致压缩函数的方法证明非自治热弹系统一致吸引子的存在性.

关键词:热弹性 Timoshenko 系统;整体存在性;渐近性;一致吸引子

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

1921 年,Timoshenko[1] 首次提出如下形式的系统

$$\begin{cases}\rho\varphi_{tt}=(K(\varphi_x-\psi))_x, & (x,t)\in(0,L)\times(0,+\infty),\\ I_\rho\psi_{tt}=(EI\psi_x)_x+K(\varphi_x-\psi), & (x,t)\in(0,L)\times(0,+\infty)\end{cases}$$

且引起了很多学者的注意和研究.文献[2]研究了带有两个边界控制条件的 Timoshenko 梁,用多乘子的方法证明了指数衰减.文献[3]研究了带有狄利克雷边界条件以及两个弱阻尼项的 Timoshenko 系统,证明了能量的指数衰减.文献[4]研究了不均匀的 Timoshenko 梁以及用多乘子的方法证明了在某些局部分布控制条件下振动梁的指数衰减.

这篇文章研究的是具有时滞项的第三类热弹性 Timoshenko 系统.时滞现象在很多应用中都非常常见,比如物理学、医学、生物学以及一些经济学问题,它不仅仅依赖于系统当前的状态还依赖于系统过去某一段时间的状态.文献[5]证明了一个小的时滞是边界控制系统不稳定的原因之一.文献[6]得出了在一定的摩擦阻尼和时滞条件下能量指数衰减的结果.文献[7]拓展了文献[6]中的结果,研究了在分布时滞的条件下第三类热弹性 Timoshenko 系统.众多情况表明,时滞是系统不稳定的主要原因之一.在没有时滞的情况下,系统是一致渐近稳定的,但是除非在其他条件或者控制关系下,否则一个小小的时滞都可能使其动摇.因此,具有时滞系统的稳定性问题在理论和实践上都有重要的意义.

最近,文献[8]证明了具有时滞项的非自治黏弹性方程的解的存在性,渐近性和吸引子的存在性.文献[9]研究了具有时滞项的非自治第三类热弹系统.在文献[10-14]中有更多关于此类相关问题的讨论和结果.

本篇文章,拓展了文献[7]中的结果证明了以下非自治热弹系统的解的存在性,渐近性和一致吸引子的存在性:

$$\begin{cases}\rho_1\phi_{tt}(x,t)-\kappa(\phi_x+\Psi)_x+\mu_1\phi_t+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\phi_t(x,t-s)\mathrm{d}s=f(x,t), & (1)\\ \rho_2\Psi_{tt}-b\Psi_{xx}+k(\phi_x+\Psi)+\beta\theta_{tx}=g(x,t), & (2)\\ \rho_3\theta_{tt}-\delta\theta_{xx}+\beta\Psi_{tx}-k\theta_{txx}=h(x,t), & (3)\end{cases}$$

其中 ϕ,Ψ,θ 分别是横向位移,旋转角度以及梁的相对温度,$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\kappa,\beta,\delta,k,\mu_1$ 是大于 0 的常数,$\mu_2:[\tau_1,$

收稿日期:2018-07-29;**修回日期**:2019-04-11.

基金项目:国家自然科学基金(11671075)

作者简介:秦玉明(1963-),男,河南焦作人,东华大学教授,博士生导师,博士,研究方向为偏微分方程.

通信作者:丁洁,E-mail:Jie_ding1202@163.com.

$\tau_2] \to \mathbf{R}$ 为有界函数且满足

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\mathrm{d}s < \mu_1. \tag{4}$$

引入一个新的变量

$$z(x,\rho,s,t) = \phi_t(x,t-\rho s), \tag{5}$$

方程组(1)~(3)变为:

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt}(x,t) - \kappa(\phi_x + \Psi)_x + \mu_1\phi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)z(x,1,s,t)\mathrm{d}s = f(x,t), \\ sz_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0, \\ \rho_2\Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\phi_x + \Psi) + \beta\theta_{tx} = g(x,t), \\ \rho_3\theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \beta\Psi_{tx} - k\theta_{txx} = h(x,t), \end{cases} \tag{6}$$

这里, $x,\rho \in (0,1), s \in (\tau_1,\tau_2), t \in (0,\infty)$.

考虑其初边值条件为:

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \\ \Psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, \Psi_x(0,t) = \psi_x(1,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \\ z(x,\rho,s,0) = z_0(x,\rho,s). \end{cases} \tag{7}$$

注 1 由系统(6)的第 3 个方程以及边界条件得出 $\rho_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_0^1 \Psi(x,t)\mathrm{d}x + \kappa\int_0^1 \Psi(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}x$,解得 $\int_0^1 \Psi(x,t)\mathrm{d}x = (\int_0^1 \Psi_0(x)\mathrm{d}x)\cos(\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}t) + (\int_0^1 \Psi_1(x)\mathrm{d}x)\sqrt{\frac{\rho_2}{\kappa}}\sin(\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}t) + \sqrt{\frac{\rho_2}{\kappa}}\int_0^t \sin\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}(t-s)\int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$. 则系统的(6)的第 3 个方程变为 $\rho_2\bar{\Psi}_{tt} - b\bar{\Psi}_{xx} + \kappa(\phi_x + \bar{\Psi}) + \beta\theta_{tx} + \int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}x = g(x,t)$.得到 $\bar{g}(x,t) = g(x,t) - \int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}x$,则方程(6)等价于下列问题

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt}(x,t) - \kappa(\phi_x + \Psi)_x + \mu_1\phi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)z(x,1,s,t)\mathrm{d}s = f(x,t), \\ sz_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0, \\ \rho_2\Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\phi_x + \Psi) + \beta\theta_{tx} = \bar{g}(x,t), \\ \rho_3\theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \beta\Psi_{tx} - k\theta_{txx} = h(x,t), \end{cases} \tag{8}$$

则 $(\phi,z,\bar{\Psi},\theta)$ 为方程(8) 的解,且 $\bar{\Psi}$ 满足以下条件 $\bar{\Phi}(x,0) = \Psi_0(x) - \int_0^1 \Phi_0\mathrm{d}x, \bar{\Psi}_t(x,0) = \Psi_1(x) - \int_0^1 \Psi_1(x)\mathrm{d}x$. 进一步可以得到:

$$\int_0^1 \bar{\Psi}(x,t) = 0. \quad \int_0^1 \bar{g}(x,t) = 0. \tag{9}$$

在本篇文章中,为了方便书写,用 Ψ, g 代替 $\bar{\Psi}, \bar{g}$.

1 整体适定性

在这一部分,研究解的存在性和唯一性,为了得到这一结果,引入新的变量 $u = \phi_t, v = \Psi_t, w = \theta_t$,且将系统(6)写成以下形式

$$\begin{cases} U_t = \mathscr{A}U + F, \\ U(x,0) = (\phi_0,\phi_1,\Psi_0,\Psi_1,\theta_0,\theta_1,z_0), \end{cases} \tag{10}$$

这里

$$\mathscr{A}U=\begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{\rho_1}(\kappa\phi_{xx}+\kappa\Psi_x-\mu_1 u-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)z(x,1,s)\mathrm{d}s) \\ v \\ \frac{1}{\rho_2}(b\Psi_{xx}-\kappa\phi_x-\kappa\Psi_\beta w_x) \\ w \\ \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta_{xx}-\beta v_x+kw_{xx}) \\ -\frac{1}{s}z_\rho \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$F=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\rho_1}f & 0 & \frac{1}{\rho_2}g & 0 & \frac{1}{\rho_3}h & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

令 $\mathscr{H}=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_*^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L_w^2((0,1)\times(0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_1))$,这里 $H_*^1(0,1)=\{\overline{\Psi}\in H^1(0,1)\mid\int_0^1\overline{\Psi}(x)=0\}$,

$$L_w^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))=\{z\mid\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\mu_2(s)z^2(x,\rho,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x<+\infty\}.$$

以及

$$D(\mathscr{A})=\{(\phi,u,\Psi,v,\theta,w,z)^{\mathrm{T}}\in\mathscr{H}\mid\phi,\theta\in H^2(0,1),u,w\in H_0^1(0,1),\Psi\in H_*^2(0,1),$$
$$v\in H_*^1(0,1),\delta\theta+kw\in H^2(0,1),z_\rho\in L_w^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)),z(\cdot,0,\cdot)=v\}.$$

这里 $H_*^2(0,1)=\{\Psi\in H^2(0,1)\mid\Psi_x(0)=\Psi_x(1)=0\}$.

接下来介绍以下定理.

定理 1　假设 $\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\le\mu_1$.令 $f(x,t),g(x,t),h(x,t)\in C^1([0,+\infty),L^2[0,1])$,对于任意的$(\phi_0,\phi_1,\Psi_0,\Psi_1,\theta_0,\theta_1,z_0)\in D(\mathscr{A})$,问题(6)存在唯一的经典解

$$\phi(x,t)\in C^1([0,+\infty),H_0^1(0,1))\cap C(0,+\infty),H^2(0,1)),$$
$$\Psi(x,t)\in C^1([0,+\infty),H_*^1(0,1))\cap C(0,+\infty),H_*^2(0,1)),$$
$$\theta(x,t)\in C^1([0,+\infty),H_0^1(0,1))\cap C(0,+\infty),H^2(0,1)),$$
$$z\in C^1([0,+\infty),H_0^1(0,1))\cap C(0,+\infty),H^2(0,1)).$$

为了完整的证明定理 1,给出以下引理.

引理 1　设 $\mathscr{A}$ 希尔伯特空间 $\mathscr{H}$,$\mathscr{A}$ 上的线性算子,$D(\mathscr{A})\subset\mathscr{H}\to\mathscr{H}$.那么 $\mathscr{A}$ 是极大增生算子的充要条件是(i)$\mathrm{Re}(\mathscr{A}x,x)\le 0,\forall x\in D(\mathscr{A})$,(ii)$R(I-\mathscr{A})=\mathscr{H}$.

证明　见参考文献[15].

引理 2　设 $F(t)=0$ 以及 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{H}$ 上的极大增生算子,$(\phi_0,\phi_1,\Psi_0,\Psi_1,\theta_0,\theta_1,z_0)\in D(\mathscr{A})$.则问题(6) 存在经典解 $y(t)\in C([0,+\infty),D(\mathscr{A}))\cap C^1([0,+\infty),\mathscr{H})$.

证明　见参考文献[7].

引理 3　假设 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{H}$ 上的极大增生算子,$F(t)\in C^1([0,+\infty),\mathscr{H})$,$y_0\in D(\mathscr{A})$,则问题(6)存在唯一经典解 $y(t)$ 使得 $y(t)\in C([0,+\infty),D(\mathscr{A}))\cap C^1([0,+\infty),\mathscr{H})$,也可表示为 $y(t)=S(t)y_0+\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau$.

证明　见参考文献[15].

证明定理 1　由引理 1 可以得到 $\mathscr{A}$ 是一个极大增生算子.由假设有$(\phi,u,\Psi,v,\theta,w,z)^{\mathrm{T}}\in D(\mathscr{A})$,结合引理 3 完成定理 1 的证明.

2 一致稳定性

这部分主要证明衰减的结果,因此先介绍以下引理.

引理 4 假设$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\mathrm{d}s<\mu_1$,若$(\phi,z,\Psi,\theta)$是方程(6)~(7)的解,则能量函数为

$$E(t)=\frac{1}{2}(\rho_1\int_0^1\phi_t^2\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^1\Psi_t^2\mathrm{d}x+b\int_0^1\Psi_x^2\mathrm{d}x+\kappa\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\mathrm{d}x)+$$
$$\frac{1}{2}(\rho_3\int_0^1\theta_t^2\mathrm{d}x+\delta\int_0^1\theta_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\mu_2(s)z\mu^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x), \tag{13}$$

对任意的$\varepsilon>0$,

$$E'(t)\leqslant-(\mu_1-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\mathrm{d}s-\varepsilon)\int_0^1\phi_t^2\mathrm{d}x-(k-\varepsilon)\int_0^1\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+$$
$$\varepsilon\int_0^1\Psi_t^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1(f^2+g^2+h^2)\mathrm{d}x. \tag{14}$$

证明 用ϕ_t,Ψ_t以及θ_t分别乘以(6)式中第1、3、4式,再分别进行(0,1)上积分,此外用$s\mu_2(s)z(x,\rho,s,t)$,乘以(6)式中第2式,再对其进行$(0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)$上积分,由 Young 不等式以及 Poincáe 不等式可以得到(14)式.

引理 5 若(ϕ,z,Ψ,θ)是方程(6)~(7)的解,则定义函数I_1为$I_1(t)=\rho_2\int_0^1\Psi\Psi_t\mathrm{d}x$,满足

$$I'_1(t)\leqslant-(\frac{b}{2}-\varepsilon)\int_0^1\Psi_x^2\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^1\Psi_t^2\mathrm{d}x+\frac{\kappa^2}{b}\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\mathrm{d}x+\frac{\beta^2}{b}\int_0^1\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1g^2\mathrm{d}x. \tag{15}$$

证明 对I_1求导,结合(6)式中第3式,得到

$$I'_1(t)=\rho_1\int_0^1\Psi_t^2\mathrm{d}x-b\int_0^1\Psi_x^2\mathrm{d}x-\kappa\int_0^1(\phi_x+\Psi)\Psi\mathrm{d}x-\beta\int_0^1\theta_{tx}\Psi\mathrm{d}x+\int_0^1g(x,t)\Psi\mathrm{d}x.$$

由 Young 不等式以及 Poincáe 不等式可以得到(15)式.

引理 6 若(ϕ,z,Ψ,θ)是方程(6)~(7)的解,则定义函数I_2为$I_2(t)=\rho_1\int_0^1\phi_t(\phi+\int_0^x\Psi(y,t)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$,满足

$$I'_2(t)\leqslant-\frac{\kappa}{4}\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\mathrm{d}x+(\frac{\mu_1^2}{\kappa}+\rho_1+\frac{c}{\varepsilon})\int_0^1\phi_t^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{\mu_1}{\kappa}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)z^2(x,1,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^1\Psi_t^2(x,t)\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_0^1f^2\mathrm{d}x. \tag{16}$$

证明 对I_2求导,结合(6)式中第1式,由$\phi(x,t)+\int_0^x\Psi(y,t)\mathrm{d}y=0,x=0,x=1$,利用 Poincáe 不等式,得到$\int_0^1(\phi+\int_0^x\Psi(y,t)\mathrm{d}y)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\mathrm{d}x$.

因此,结合 Young 不等式 Poincaré 不等式以及 Cauchy-Schwarz′不等式,完成(16)式的证明.

引理 7 若(ϕ,z,Ψ,θ)是方程(6)~(7)的解,则定义函数I_3为$I_3=-\rho_2\rho_3\int_0^1\theta_t(\int_0^x\Psi_t(y,t)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x-\delta\rho_2\int_0^1\theta_x\Psi\mathrm{d}x$,满足

$$I'_3(t)\leqslant-\frac{\rho_2\beta}{4}\int_0^1\Psi_t^2\mathrm{d}x+(\frac{k^2\rho_2}{2\beta}+\frac{c}{\varepsilon}+\frac{5}{4}\rho_2\beta)\int_0^1\theta_{tx}\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^1\Psi_x^2\mathrm{d}x+$$
$$\varepsilon\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\mathrm{d}x+\frac{\rho_2}{\beta}\int_0^1h(x,t)\mathrm{d}x+\frac{\rho_3}{\beta}\int_0^1g(x,t)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

证明 对I_3求导,结合(6)中第3、4式和 Young 不等式以及 Poincaré 不等式完成对(17)式的证明.

引理 8 若(ϕ,z,Ψ,θ)是方程(6)~(7)的解,则定义函数I_6为$I_4(t)=\rho_3\int_0^1\theta\theta_t\mathrm{d}x+\frac{k}{2}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{d}x+$

$\beta\int_0^1 \Psi_x\theta\,\mathrm{d}x$，满足

$$I'_4(t)\leq -\frac{3}{4}\int_0^1\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^1\Psi_x^2\,\mathrm{d}x+(\rho_3+\frac{\beta^2}{4\varepsilon})\int_0^1\theta_{tx}^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta}\int_0^1 h^2(x,t)\mathrm{d}x. \tag{18}$$

证明　对 I_4 求导,结合(6)式第 4 式、Young 不等式以及 Poincaré 不等式完成对(18)式的证明.

引理 9　若 (ϕ,z,Ψ,θ) 是方程(6)～(7)的解,则定义函数 I_5 为 $I_5(t)=\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-s\rho}\mu_2(s)z^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}x$，满足

$$\begin{aligned}I'_5(t)\leq &-e_{-\tau_2}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\mu_s z^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}x+\\ &\mu_1\int_0^1\phi_t(x,t)\mathrm{d}x-e^{-\tau_2}\int_0^1\int_{\tau 1}^{\tau_2}\mu_2(s)z^2(x,1,s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{19}$$

证明　对 I_5 求导,结合(6)式中第 2 式,完成对(19)式的证明.

引理 10　假设 $y(t)\in C_1(\mathbf{R}^+)$, $y(t)\geq 0$, $\forall t>0$, 且满足

$$y(t)\leq -C_0y(t)+\lambda(t),\ \forall t>0, \tag{20}$$

这里 $0\leq\lambda(t)\in L^1(\mathbf{R}^+)$ 以及 C_0 是正常数,则有

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=0. \tag{21}$$

再者,(1)如果对于常数 $C_1>0$, $\alpha_0>0$ 有 $\lambda(t)\leq C_1e^{-\alpha_0 t}$, $\forall t>0$, 那么

$$y(t)\leq C_2e^{-\alpha t},\ \forall t>0, \tag{22}$$

其中 $C_2>0$, $\alpha>0$ 为常数.

(2)如果对于常数 $p>0$, $C_3>0$ 由 $\lambda(t)\leq C_3(1+t)^{-p}$, $\forall t>0$, 那么

$$y(t)\leq C_4(1+t)^{-p+1},\ \forall t>0. \tag{23}$$

其中 $C_4>0$ 为常数.

证明　见参考文献[16].

定理 2　假设 $(\phi_0,\phi_1,\Psi_0,\Psi_1,\theta_0,\theta_1,z_0)\in D(\mathscr{A})$, (ϕ,z,Ψ,θ) 是方程(6)～(7)的解, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $h(x,t)\in C^1([0,+\infty),L^2(0,L))$. 那么

$$\lim_{t\to+\infty}E(t)=0. \tag{24}$$

进一步,若

$$\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2\leq C_0e^{-\alpha_0 t},\ \forall t>0, \tag{25}$$

其中 $C_0>0$ 以及 $\alpha_0>0$ 为常数,则存在常数 M, 使得

$$E(t)\leq Me^{-\alpha t},\ \forall t>0. \tag{26}$$

若

$$\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2\leq\frac{C'}{(1+t)^p},\ \forall t>0, \tag{27}$$

其中 $C'>0$, $p>1$ 为常数,则存在常数 $C^*>0$, 使得

$$E(t)\leq C^*(1+t)^{-p+1},\ \forall t>0. \tag{28}$$

证明　定义如下 Lyapunov 泛函

$$\mathscr{L}=NE(t)+I_1(t)+\frac{8\kappa}{b}I_2(t)+\frac{8}{\beta}I_3(t)+I_4(t)+N_1(t), \tag{29}$$

由(15)～(19)式,选取 N, N_1 足够大以及 ε 足够小,得:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\leq &-\gamma_1\int_0^1\phi_t^2\,\mathrm{d}x-\gamma_2\int_0^1\Psi_t^2\,\mathrm{d}x-\gamma_3\int_0^1\Psi_x^2\,\mathrm{d}x-\gamma_4\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2\,\mathrm{d}x-\gamma_5\int_0^1\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\gamma_6\int_0^1\theta_x^2\,\mathrm{d}x-\\ &\gamma_8\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\mu_2(s)z^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}x+C'(\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2),\end{aligned}$$

其中 $C'>0$ 是常数,由 Poincaré 不等式,得到:

$$\mathscr{L}'(t) \leq -\gamma' E(t) + C'(\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2), \tag{30}$$

其中 $\gamma' > 0$ 是常数.

另一方面,可以看出 $\mathscr{L}$ 是等价于 $E(t)$,即 $\mathscr{L}(t) \sim E(t)$,因此由(30)式可知存在常数 $\gamma > 0$ 使得

$$\mathscr{L}'(t) \leq -\gamma \mathscr{L}(t) + C'(\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2). \tag{31}$$

由引理 10 可以得出定理 2 的结论.

3 一致吸引子

这部分将证明系统(6)的一致吸引子存在性结果.

令 $u = \phi_t, v = \Psi_t$,和 $w = \theta_t, R_\tau = [\tau, +\infty), \tau \geq 0$,探究如下系统

$$\begin{cases} \phi_t - u = 0, \\ \rho_1 \phi_{tt}(x,t) - \kappa(\phi_x + \Psi)_x + \mu_1 \phi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_1} \mu_2(s) z(x,1,s,t) \mathrm{d}s = f(x,t), \\ \Phi_t - v = 0, \\ \rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\phi_x + \Psi) + \beta\theta_{tx} = g(x,t), \\ \theta_t - w = 0, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \beta\Psi_{tx} - k\theta_{txx} = h(x,t), \\ s z_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0, \end{cases} \tag{32}$$

这里 $x, \rho \in (0,1), s \in (\tau_1, \tau_2), t \in (\tau, \infty)$.

其初边值条件为:

$$\begin{cases} \phi(x,\tau) = \phi_\tau(x), \phi_t(x,\tau) = \phi_{1\tau}(x), \\ \Psi(x,\tau) = \psi_\tau(x), \psi_t(x,\tau) = \psi_{1\tau}(x), \\ \theta(x,\tau) = \theta_\tau(x), \theta_t(x,\tau) = \theta_{1\tau}(x), \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, \Psi_x(0,t) = \psi_x(1,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \forall t \geq \tau, \\ z(x,\rho,s,\tau) = z_\tau(x,\rho,s). \end{cases} \tag{33}$$

令

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_1} f & 0 & \frac{1}{\rho_2} g & 0 & \frac{1}{\rho_3} h & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in Y = L^2(R_\tau, (L^2(0.L))^7), \tag{34}$$

$$\mathscr{H}_1 = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_*^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L_w^2((0,1) \times (0,1) \times (0,1) \times (\tau_1, \tau_1)). \tag{35}$$

系统(32)的能量函数为:

$$E(t) = \frac{1}{2}(\int_0^1 \phi_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \Psi_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \Psi_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2 \mathrm{d}x) + \frac{1}{2}(\int_0^1 \theta_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau 2} s\mu_2(s) z\mu^2(x,\rho,s,t) \mathrm{d}s \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x). \tag{36}$$

对于任意的 $(\phi_\tau, \phi_{\tau 1}, \Psi_\tau, \Psi_{\tau 1}, \theta_\tau, \theta_{\tau 1}, z_\tau) \in \mathscr{H}_1$,以及 $F \in Y$,定义

$$U_F(t,\tau): (\phi_\tau, \phi_{\tau 1}, \Psi_\tau, \Psi_{\tau 1}, \theta_\tau, \theta_{\tau 1}, z_\tau) \in \mathscr{H}_1 \mapsto (\phi(t), \phi_t(t), \Psi(t), \Psi_t(t), \theta(t), \theta_t(t), z(t)) = U_F(t,\tau)(\phi_\tau, \phi_{\tau 1}, \Psi_\tau, \Psi_{\tau 1}, \theta_\tau, \theta_{\tau 1}, z_\tau),$$

这里 $t \geq \tau, \tau \geq 0$,且 $(\phi(t), \phi_t(t), \Psi(t), \Psi_t(t), \theta(t), \theta_t(t), z(t))$ 是方程(32)的解.

研究的是 $\mathscr{H}_1$ 上的吸引子,定义 $F_0 \in Y$ 的壳如下

$$\Sigma = H(F_0) = [F_0(t+h) \mid h \in R^+]_Y, \tag{37}$$

这里 $[.]_Y$ 表示 Banach 空间 Y 上的闭包.

容易得到 $F_0 \in Y \subseteq \hat{Y} = L_{\mathrm{loc}}^2(R^+, (L^2(0,L))^7)$,这里 F_0 是空间 $\hat{Y}$ 中弱拓扑下的一个平移紧函数,这意味着 $H(F_0)$ 在 $\hat{Y}$ 上是紧的.考虑 Banach 空间 $L_{\mathrm{loc}}^p(R^+, Y_1)$ 下的函数 $\sigma(s), s \in R^+$,其在 Bochner 意义下,在

Banach 空间 Y_1 上具有局部 p 介可积性.特别地，对于任意的时间区间 $[t_1,t_2]\subseteq \mathbf{R}_+$，$\int_{t_1}^{t_2}\|\sigma(s)\|_{Y_1}^{p}\mathrm{d}s<+\infty$，令 $\sigma(s)\in L_{\mathrm{loc}}^2(R^+,Y_1)$，考虑 $\epsilon_\sigma(h)=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}_+}\int_t^{t+h}\|\sigma(s)\|_{Y_1}^{p}\mathrm{d}s$.

引理 11　Σ 如上述定义所示，$F_0\in Y$，则

(1)若 F_0 在 $\hat{Y}$ 上转移紧，则任意 $F\in\Sigma=H(F_0)$ 在 $\hat{E}$ 也为转移紧，更者 $H(F)\subseteq H(F_0)$；

(2)集合 $H(F_0)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^+,(L^2(0,1))^7)$ 上有界，且有 $\epsilon F(h)\leq \epsilon F_0(h)<+\infty$，$\forall F\in\Sigma$.

证明　见参考文献[17].

类似于定理 2，有如下结果.

定理 3　令 $\Sigma=[F_0(t+h)\mid h\in\mathbf{R}^+]_Y$，其中 $F_0\in E$ 是一个固定但任意的函数.对 $\forall F\in\Sigma$ 和$(\phi_\tau,\phi_{\tau1},\Psi_\tau,\Psi_{\tau1},\theta_\tau,\theta_{\tau1},z_\tau)\in\mathscr{H}_1,\tau\geq 0$，方程组(32)存在唯一整体解$(\phi(t),\phi_t(t),\Psi(t),\Psi_t(t),\theta(t),\theta_t(t),z(t))\in\mathscr{H}_1$，该解在 $\mathscr{H}_1$ 产生唯一双参数的过程族$\{U_F(t,\tau)\}(t\geq\tau,\tau\geq 0)$，使得对 $\forall t\geq\tau,\tau\geq 0$，有

$$U_F(t,\tau)(\phi_\tau,\phi_{\tau1},\Psi_\tau,\Psi_{\tau1},\theta_\tau,\theta_{\tau1},z_\tau)=(\phi(t),\phi_t(t),\Psi(t),\Psi_t(t),\theta(t),\theta_t(t),z(t))\in\mathscr{H}_1,$$

$$\phi(t)\in C(R_\tau,H_0^1(0,1)),\phi_t(t)\in C(R_\tau,L^2(0,1)),\Psi(t)\in C(R_\tau,H_*^1(0,1)),$$

$$\Psi_t(t)\in C(R_\tau,L^2(0,1)),\theta(t)\in C(R_\tau,H_0^1(0,1)),\theta_t(t)\in C(R_\tau,L^2(0,1)),$$

$$z(t)\in C(R_\tau,L_W^2(0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)).$$

为了证明这个结果，引入以下基本的引理和概念.

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$\hat{\Sigma}$ 是一个参数集，算子$\{U_F(t,\tau)\}(t\geq\tau,\tau\geq 0,F\in\hat{\Sigma})$在带有符号空间 $\hat{\Sigma}$ 的 $\mathscr{X}$ 上是一个过程族

$$U_F(t,s)U_F(s,t)=U_F(t,\tau)\ \forall t\geq s\geq\tau,\tau\geq 0, \tag{38}$$

$$U_F(\tau,\tau)=Id,\ \forall\tau\geq 0. \tag{39}$$

引理 12　在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上，设$\{U_F(t,\tau)\}(F\in\hat{\Sigma},t\geq\tau,\tau\geq 0)$是一过程族满足(38)式和(39)式，且有一个吸收集 $A_0\subseteq X$.对任意 $\varepsilon>0$ 存在时间 $T=T(A_0,\varepsilon)>0$ 以及 $A_0\times A_0$ 上存在一个一致压缩函数 φ_T 使得 $\|U_{F_1}(T,0)x-U_{F_2}(T,0)y\|\leq\varepsilon+\varphi_T(x,y;F_1,F_2)$，$\forall x,y\in A_0$，$\forall F_1,F_2\in\hat{\Sigma}$.则$\{U_F(t,\tau)\}(F\in\hat{\Sigma},t\geq\tau,\tau\geq 0)$在 $\mathscr{X}$ 一致渐近紧.

证明　见参考文献[18].

引理 13　对任意 $\tau\in\mathbf{R}$，假设 φ_0 是 $R_\tau\equiv[\tau,+\infty)$ 上的非负局部可加函数，且对任意 $\iota>0$，有

$$\sup_{t\geq\tau}\int_\tau^t\varphi_0(s)e^{-\iota(t-s)}\mathrm{d}s\leq\frac{1}{1-e^{-\iota}}\sup_{t\geq\tau}\int_t^{t+1}\tau^{t+1}\varphi_0(s)\mathrm{d}s.$$

对 $t\geq\tau$ 几乎处处成立.

证明　见参考文献[19].

接下来的定理就是证明 $\{U_F(t,\tau)\}$ 有一个一致吸收集.

定理 4　在(34)式的假设下，过程族 $\{U_F(t,\tau)\}(F\in\Sigma,t\geq\tau,\tau\geq 0)$ 关于(32)～(34)式有一个有界吸收集 $A_0\in\mathscr{H}_1$.

证明　类似于定理 2 的证明，得到 $\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leq-\gamma E(t)+C_1(\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)$，这里 γ,C_1 是一个正常数.下面 C 是一个不依赖于初值的正常数，且在不同的估计里 C 的取值不同.显然，有

$$E(t)\leq E(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}+C\int_\tau^t(\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)e^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}s. \tag{40}$$

对(40)式运用引理 13 和引理 11，可以得到：

$$E(t)\leq E(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}+C\int_\tau^t\|F\|_E^2e^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}s\leq E(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}+$$

$$C\frac{1}{1-e^{-\tau}}\sup_{t\geq\tau}\int_t^{t+1}\|F\|_E^2\mathrm{d}s\leq E(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}+C\frac{1}{1-e^{-\tau}}\epsilon_{F_0}(1). \tag{41}$$

对于一切有界集 $A_0 \subseteq \mathscr{H}_1$,以及一切$(\phi_\tau,\phi_{\tau 1},\Psi_\tau,\Psi_{\tau 1},\theta_\tau,\theta_{\tau 1},z_\tau)\in A_0,\tau>0$,存在常数 $C_{A_0}>0,E(\tau)\leq C_{A_0}$.令 $R_0^2=2(2\dfrac{\epsilon_{F_0}(1)}{1-e^{-\gamma}}+1),t_0=t_0(\tau,F_0)=\tau-\gamma^{-1}\lg(\dfrac{\epsilon_{F_0}(1)+1}{C_{A_0}(1-e^{-\gamma})})$,则对于 $\forall F\in\Sigma,A_0(0,R_0)=\{(\phi(t),\phi_t(t),\Psi(t),\Psi_t(t),\theta(t),\theta_t(t),z(t))\in\mathscr{H}_1:\|(\phi(t),\phi_t(t),\Psi(t),\Psi_t(t),\theta(t),\theta_t(t),z(t))\|_{\mathscr{H}1^2}\leq R_0^2\}\subseteq\mathscr{H}_1$ 是一个一致吸收集,也就是对于任何一个有界集 $A_0\in\mathscr{H}_1$,存在一个时间 $t_0=t_0(\tau,F_0)\geq\tau$ 使得对于任意的 $t\geq t_0$ 都有 $\bigcup\limits_{F\in\Sigma}U_F(t,\tau)A\subseteq A_0$,

接下的部分主要目的是证明一致渐近紧.

对于任意的$(\phi_\tau^i,\phi_{1\tau}^i,\Psi_\tau^i,\Psi_{1\tau}^i,\theta_\tau^i,\theta_{1\tau}^i,z_\tau^i)\in A_0$,令$(_i(t),\phi_{it}(t),\Psi_i(t),\Psi_{it}(t),\theta_i(t),\theta_{it}(t),z_i(t))$是 $F_i\in\Sigma$ 的对应解,且其初值是$(\phi_\tau^i,\phi_{\tau 1}^i,\Psi_\tau^i,\Psi_{\tau 1}^i,\theta_\tau^i,\theta_{\tau 1}^i,z_\tau^i),i=1,2$.令

$$\begin{aligned}Q(t)=(\pi(t),\lambda(t),o(t),\alpha(t))^{\mathrm{T}}=U_1(t)-U_2(t)=\\(\pi_1(t)-\pi_1(t),\lambda_1(t)-\lambda_2(t),o_1(t)-o_2(t),\alpha_1(t)-\alpha_1(t))^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{42}$$

则 $Q(t)$ 满足

$$\begin{cases}\rho_1\pi_{tt}-\kappa(\pi_x+\lambda)_x+\mu_1\pi_t+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\alpha(x,1,s,t)=f_1(x,t)-f_2(x,t),\\ s\alpha_t(x,\rho,s,t)+\alpha_\rho(x,\rho,s,t)=0,\\ \rho_2\lambda_{tt}-b\lambda_{xx}+\kappa(\pi_x+\lambda)+\beta o_{tx}=g_1(x,t)-g_2(x,t),\\ \rho_3 o_{tt}-\delta o_{xx}+\beta\lambda_{tx}-ko_{txx}=h_1(x,t)-h_2(x,t),\\ \pi(0,t)=\pi(1,t)=0,\lambda_x(0,t)=\lambda_x(1,t)=0,o(0,t)=o(1,t)=0,\\ \pi(x,\tau)=\phi_\tau^1(x)-\phi_\tau^2(x),\pi_t(x,\tau)=\phi_{1\tau}^1(x)-\phi_{1\tau}^2(x),\\ \lambda(x,\tau)=\Psi_\tau^1(x)-\Psi_\tau^2(x),\lambda_t(x,\tau)=\Psi_{1\tau}^1(x)-\Psi_{1\tau}^2(x),\\ o(x,\tau)=\theta_\tau^1(x)-\theta_\tau^2(x),o_t(x,\tau)=\theta_{1\tau}^1(x)-\theta_{1\tau}^2(x),\\ \alpha(x,\rho,s,\tau)=z_\tau^1-z_\tau^2,\end{cases}\tag{43}$$

这里 $x,\rho\in(0,1),s\in(\tau_1,\tau_2),t\in(\tau,\infty)$.

能量方程为:

$$\begin{aligned}E_Q(t)=\frac{1}{2}(\int_0^1\pi_t^2\mathrm{d}x+\int_0^1\lambda_t^2\mathrm{d}x+\int_0^1\lambda_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(\pi_x+\lambda)^2\mathrm{d}x)+\frac{1}{2}(\int_0^1 o_t^2\mathrm{d}x+\\ \int_0^1 o_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau 2}s\mu_2(s)\alpha^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x).\end{aligned}\tag{44}$$

不失一般性,假设 $\rho_1=\rho_2=b=\kappa=\rho_3=\delta=1$,那么,得到:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_Q(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\int_0^1\pi_t^2\mathrm{d}x+\int_0^1\lambda_t^2\mathrm{d}x+\int_0^1\lambda_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(\pi_x+\lambda)^2\mathrm{d}x)\}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\int_0^1 o_t^2\mathrm{d}x+\int_0^1 o_x^2\mathrm{d}x+\\ \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau 2}s\mu_2(s)\alpha^2(x,\rho,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\}=-\int_0^1 o_{tx}{}^2\mathrm{d}x-(\mu_1-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\mathrm{d}s)\int_0^1\pi_t^2\mathrm{d}x-\\ \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\alpha^2(x,1,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x-\int_0^1\pi_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\alpha(x,1,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_0^1(f_1-f_2)\pi_t\mathrm{d}x+\\ \int_0^1(g_1(x)-g_2(x))\lambda_t\mathrm{d}x+\int_0^1(h_1(x)-h_2(x))o_t\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{45}$$

对(45)式依次在 $[\sigma,T]$ 上关于 t 积分,在$[0,T]$ 上关于 σ 积分,得:

$$\begin{aligned}TE(t)+\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1\sigma_{tx}{}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma+\int_0^T\int_\sigma^T(\mu_1-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau 2}\mu_2(s)\mathrm{d}s)\int_0^1\pi_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma+\\ \frac{1}{2}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\alpha^2(x,1,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma+\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1\pi_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\alpha(x,1,s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma=\\ \int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(f_1-f_2)\pi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma+\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(g_1-g_2)\lambda_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma+\end{aligned}$$

$$\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(h_1-h_2)o_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^T E_Q(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\tag{46}$$

利用 Young 不等式和 Poincaré 不等式，可得：

$$TE_Q(t)\le\frac{1}{2}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(f_1-f_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(h_1-h_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(g_1-g_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^T\int_\sigma^T E_Q(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^T E_Q(\sigma)\mathrm{d}\sigma.\tag{47}$$

由(43)～(44)式，得到：

$$\int_0^T|E_Q(\sigma)|\mathrm{d}\sigma\le\int_0^T(E_{U_1}(\sigma)+E_{U_2}(\sigma))\mathrm{d}\sigma\le 2\int_0^T[E(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}+$$

$$C\int_\tau^\sigma(\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)e^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s]\mathrm{d}\sigma\le C_1,\tag{48}$$

这里 $C_1=C(T,\tau,\gamma)$ 是一个正常数.类似于(48)式，可以得到：

$$\int_0^T\int_\sigma^T E_Q(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma\le C_2,\tag{49}$$

因此可以推得：

$$TE_Q(t)\le\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(g_1-g_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(h_1-h_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma,\tag{50}$$

令

$$R((\phi_0^1,\phi_{10}^1,\Psi_0^1,\Psi_{10}^1,\theta_0^1,\theta_{10}^1,Z_0^1),(\phi_0^2,\phi_{10}^2,\Psi_0^2,\Psi_{10}^2,\theta_0^2,\theta_{10}^2,Z_0^2),F_1,F_2)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(f_1-f_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(g_1-g_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(h_1-h_2)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma.\tag{51}$$

则

$$E_Q(T)\le\frac{C_M}{T}+\frac{1}{T}R((\phi_0^1,\phi_{10}^1,\Psi_0^1,\Psi_{10}^1,\theta_0^1,\theta_{10}^1,Z_0^1),(\phi_0^2,\phi_{10}^2,\Psi_0^2,\Psi_{10}^2,\theta_0^2,\theta_{10}^2,Z_0^2);F_1,F_2).\tag{52}$$

接下来，即将证明空间 $\mathscr{H}_1$ 上的一致渐近紧.

定理 5　假设 F 满足(34)式，则由方程(32)的生成的半过程族 $U_F(t,\tau)(F\in\Sigma,t\ge\tau,\tau\ge 0)$，在 $\mathscr{H}_1$ 中一致紧.

证明　因为半过程族 $U_F(t,\tau)(F\in\Sigma,t\ge\tau,\tau\ge 0)$ 有一个一致有界吸收集，根据 C_M 的定义，可以知道对于任意的 $\varepsilon>0$，可以选择足够大的 $T>0$，使得 $\frac{C_M}{T}\le\varepsilon$.由引理 11 知，只需证明对任意固定的 T 都有 $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(A_0,\Sigma)$，由定理 3 的证明过程可知，对任意的 T，有

$$\bigcup_{F\in\Sigma}\bigcup_{t\in[\tau,T]}\bigcup_F(t,\tau)A_0.\tag{53}$$

在 $\mathscr{H}_1$ 中有界并依赖于 T.

令 $(\phi_i,\phi_{it},\Psi_i,\Psi_{it},\theta_i,\theta_{it},z_i)$ 是有关符号函数 $F_n\in\Sigma,i=1,2,\cdots$.对应初值为$(\phi_\tau^i,\phi_{1\tau}^i,\Psi_\tau^i,\Psi_{1\tau}^i,\theta_\tau^i,\theta_{1\tau}^i,z_\tau^i)\in A_0$ 的解，那么由(34)式可知

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(f_i-f_j)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma=0,\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(g_i-g_j)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^1(h_i-h_j)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

因此由(52)～(53)式，可以得到 $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(A_0,\Sigma)$.

定理 6　假设 f,g,h 满足(34)式以及 Σ 是由(37)式所定义，则关于(32)式的半过程族 $U_F(t,\tau)(F\in\Sigma,t\ge\tau,\tau\ge 0)$ 存在一致$(w.r.tF\in\Sigma)$吸引子 $\mathscr{A}_\Sigma$.

证明　由定理 4 以及定理 5 可以得出一致吸引子的存在.

参 考 文 献

[1] Timoshenko S.On the correction for shear of the differential equation for trans-verse vibrations of prismatic bars[J].Philos Mag,1921,41:744-746.

[2] Kim J U,Renardy Y.Boundary control of the Timoshenko beam[J].SIAM J Control Optim,1987,25:1417-1429.

[3] Raposo C A,Ferreira J,Santos M L,et al.Expoenetial stability for the Timoshenko system with two weak dampings[J].Appl Math Letters,2005,18:535-541.

[4] Shi H,Feng X.Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback[J].IMA J Math Cont Inf,2001,18:395-403.

[5] Datko I,Lagnese J.Polis An example on the effect of time delays in the boundary feedback stabilization of wave equations[J].SIAM Journal on Control and Optimization,1986,24(1):152-156.

[6] Apalara T A.Well-posedness and exponential stability for a linear damped Timoshenko system with seconed sound Thermoelasticity and internal distributed delay[J].Electron J Differential Equations,2014,254:1-15.

[7] Fareh A,Messaoudi S A.Stabilization a type III thermoelastic Timoshenko system in the presence of a time-distributed delay[J].Math Nachr,2017,290:1017-1032.

[8] Qin Y,Ren J.Global existence,asymptotic behavior,and uniform attractor for a nonautonomous equation[J].Math Meth Appl Sci,2013,36:2540-2553

[9] Qin Y,Wei T,Ren J.Global existence,asymptotic stability,and uniform attractors for non-autonomous thermoelastic systems with constant time delay[J].J Math Phys,2012,53:063701.

[10] Jiang H,Jing W.Global existence and stability results for a nonlinear Timoshenko system of thermoelasticity of type III with delay[J].Boundary Value Problems,2018,2018(1):65.

[11] Kirane M.Stability result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks[J].Commubicatons on Pure and Applied Analysis,2011,10(2):667-686.

[12] Kafini M,Messaoudi S A,Mustafa M I.Energy decay result in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with distributive delay[J].Journal of Mathematical Physics,2013,54(10):103-121.

[13] Keddia A,Messaoudib S A,Benaissaa A.A general decay result for a memory-type Timoshenko-thermoelasticity system with second sound[J].J Math Anal Appl,2017,456:1261-1289.

[14] Mori N.Dissipative structure,global existence in critical space for Timoshenko system of memory type[J].J Differential Equations,2018,265:1627-1653.

[15] Zheng S.Nonlinear Evolution Equations[M].Florida:CRC Press,2004.

[16] Qin Y.Nonlinear parabolic-hyperbolic coupled systems and their attractor[M].switzerland:Birkhäuser,2008.

[17] Chepyzhov V V,Vishik M I.Attractors for equations of mathematical physics[M].Rhode Island:American Mathematical Society,2002.

[18] Chueshov I,Lasiecka I.Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equation with Nonlinear Damping[J].American Mathematical Society,2008,195(912):183.

[19] Chepyzhov V V,Pata V,Vishik M I.Averaging of 2D Navier-Stokes equations with singularly oscillating external forces[J].Nonlinearity,2009,22:351-370.

Global existence,asymptotic behavior and uniform attractors for a type III non-autonomous thermoelastic timoshenko system

Qin Yuming,Ding Jie

(College of Science,Donghua University,Shanghai 201620,China)

Abstract:In this paper, we investigate a Timoshenko system of thermoelastic of type III. We prove the global existence and asymptotic behavior of solutions by using the semigroup method and multiplicative technique, then we prove the existence of uniform attractor for a non-autonomous thermoelastic system by using the method of uniform contractive function.

Keywords:Timoshenko system of thermoelasticity;global existence;asymptotic behavior;uniform attractors

[责任编校 陈留院 赵晓华]