

非局域不对称耦合相振子系统中的移动奇异态

朱云, 谢琛, 黄竞雄

(江西理工大学 理学院, 江西 赣州 341000)

摘要:研究发现在随机初始条件下,一维全同相振子系统在非局域不对称耦合作用下演化成的移动奇异态同步部分可移动.移动速度与不对称耦合强度线性相关.利用 Ott-Antonsen 假设方法理论上分析并证实了这一特性.

关键词:非局域;奇异态;不对称耦合;OA 假设

中图分类号:O415

文献标志码:A

全同相振子系统在一定条件作用下演化成相干态与不相干态共存的时空模式,即奇异态^[1-7],如生物学中的“半脑睡眠”^[8].KURAMOTO 等^[1-2]在非局域耦合作用下,数值模拟复 Ginzburg-Landau 方程时,首次发现奇异态.随后出现了很多相关的理论研究.ABRAMS 和 STROGATZ^[3]在余弦核耦合作用下的一维非局域耦合相振子环中发现了奇异态的精确解.在非局域耦合全同相振子环模型中引入延时耦合后,发现了簇状奇异态^[9-10],多个相位相干的振子群在空间分布上被非相干振子群分离且相邻的相干振子群反相.ZHU 在存在异构相位滞后的情况下,不考虑时间延迟耦合,发现了两团簇奇异态^[11-12].ABRAMS 与 STROGATZ 将两个相互作用的振子群组成一个最小模型,其中处于同一个振子群中的振子间全局耦合且耦合强度要比分别处于两个振子群中的振子间的耦合强度大,由此找到了呼吸奇异态^[13].PIKOVSKY 和 ROSENBLUM^[14]将一些相同的振子群非均匀耦合,在这个系统中找到了准周期奇异态.Ott-Antonsen 假设,即 OA 方法,可以对全局耦合相振子系统降维分析^[15-17],LAING^[18-19]利用 OA 方法发现,在引入参数非均匀性的一维系统中可能存在呼吸奇异态.奇异态以自组织模式存在.KURAMOTO^[20]在二维的非局域耦合相振子系统中,其中系统的螺旋波核心为不相干振子,实现了螺旋奇异态.不久之后,MARTENS^[21]对螺旋奇异态进行了理论分析,并利用微扰理论计算了它的旋转速度及其非相干核的大小.有趣的是,GU^[22]发现螺旋奇异态可能存在于复杂的振荡和混沌系统中.朱云在非局域耦合全同相振子系统中忽略延时耦合,找到了 4 团簇奇异态^[23],并且验证了系统移动速度与系统尺寸的关系.关于奇异态的实验证据已在光学或化学装置中提出^[24-25].DUDKOWSKI^[26]在机械系统中,研究了悬在水平振动轮上的自激耦合摆中的移动奇异态.在这项工作中,研究的对象是一维非局域不对称耦合全同相振子系统.

1 模型

使用的模型是在长度为 2π 内均匀分布的一维非局域不对称耦合相振子系统.模型方程如下

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega - \int_{-\pi}^{\pi} G(x' - x) \sin[\theta(x, t) - \theta(x', t) + \alpha] dx', \quad (1)$$

其中, $\theta(x, t)$ 指 t 时刻 x 点振子相位.空间变量 x 在 $(-\pi, \pi)$ 范围内被施加了周期性边界条件.系统中所有振子的固有频率 ω 相同,不失一般性的前提下 ω 在系统中不起作用可以使其为 0.相位移动可调参数 α 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{2})$.余弦核 $G(x' - x)$ 表示振子间的非局域 不对称耦合强度,定义如下

收稿日期:2020-10-23;修回日期:2020-12-14.

基金项目:国家自然科学基金(11405075)

作者简介(通信作者):朱云(1984—),男,江西赣州人,江西理工大学副教授,博士,研究方向为非线性系统, E-mail: zhuyun_84@126.com.

$$G(x' - x) = \begin{cases} \frac{1 + \epsilon + A \cos(x' - x)}{2\pi}, & x' \geq x, \\ \frac{1 - \epsilon + A \cos(x' - x)}{2\pi}, & x' < x, \end{cases} \quad (2)$$

其中, A 为非局域耦合强度且 $0 \leq A \leq 1$, 当 $A = 0$ 时, 系统即为全局域耦合 Kuramoto 模型. 特征参数 ϵ 表示耦合的不对称程度.

研究奇异态的关键在于引入一个类平均场的复序参量 $R e^{i\theta}$ 作为系统的振子间相干程度的一个衡量标准, 其表达式为

$$R(x, t) e^{i\theta(x, t)} = \int_{-\pi}^{\pi} G(x - x') e^{i\theta(x', t)} dx', \quad (3)$$

其中, $R(x, t)$ 表示振幅, 即振子间相干度, $\theta(x, t)$ 表示区域内振子的平均相位. 当 $|R(x)| = 1$ 时, 系统振子全局同步, 当 $|R(x)| = 0$ 时, 系统全局域无序非同步. 若系统振子间由不相干逐渐转变成相干, 振子间相干性递增值, $|R(x)|$ 由 0 趋向 1, 所以 $|R(x)|$ 值越大, 振子间相干性越大.

2 仿真与结果

使用 Runge-Kutta 方法对(1)式积分方程进行数值计算来模拟移动奇异态, 设立随机初始条件为系统相振子数为 $N = 256$, 步长为 0.01, 相位移动可调参数 $\alpha = (\pi/2) - 0.1$, 非局域耦合强度 $A = 0.995$, 不对称耦合强度 $\epsilon = 0.01$. 为了证实移动奇异态的存在, 首先在系统达到稳定状态时截取了相位斑图(图 1(a)), 相干簇中存在同相振子群, 其中振子相位分布在 $-\pi$ 到 π 之间. 由图 1(b)可知, 在相干同相振子群中复序参量 R 的模较大, 而在其他区域较小. 令此时振子的瞬时角速度为 $\Omega(x, t) = \frac{d\theta(x, t)}{dt}$, 当区域内振子角速度相同时, 即振子间的相位差稳定, 该区域振子锁相且同步. 在图 1(c)中观察到的相干簇中, 振子的瞬时角速度 Ω 的值是相等的, 而在不相干区域中, 振子的瞬时角速度 Ω 的值是分散的. 这些证据表明系统演化成了典型的单簇奇异态.

在时空相位斑图(图 2)中可以观察到系统在随机初始条件下演化成移动奇异态的临界状态, 相干簇在向左移动并且相位具有周期性. 相干簇中的振子具有相同的瞬时角速度 $\Omega(x, t)$, 且 $\Omega(x, t)$ 随时间 t 变化, 复序参量 $R(x, t)$ 的最大值所在的区域向左移动. 由(2)式可知, 相干簇与右边的振子的耦合强度大于左边的振子, 假设位于 x 和 x' 处的振子同相, 那么它们之间的耦合强度与(1)式中的 $\sin \alpha$ 成正比. 这意味着两个振子之间的耦合是互斥的而不是吸引的, 即相干簇与右边的振子的互斥耦合强度大于左边的振子, 所以相干簇会向左移动.

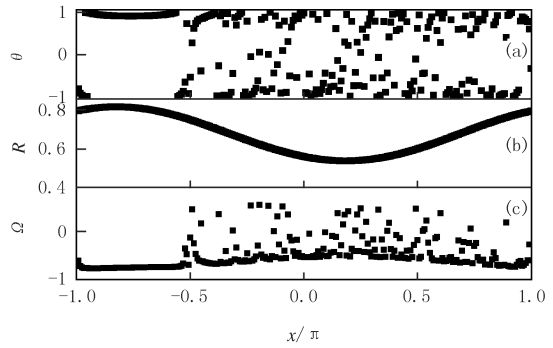


图1 $\epsilon = 0.01$ 的系统状态快照
Fig.1 A snapshot of the system when $\epsilon = 0.01$

为了更简单地了解移动奇异态的移动特性, 以相干簇中心振子的位置 x_c 即 $R(x)$ 值最大的振子作为参考. 从图 3(a)可以发现在 $\epsilon = 0.01$ 时, x_c 点的位置随时间 t 线性左移, 对振子的轨迹拟合出一条斜率约为 -0.0054 的直线. 用 v 来表示 x_c 点的振子即同步簇的移动速度, 由于 v 与时间 t 无关, 考虑 v 与不对称耦合强度 ϵ 之间的关系(图 3(b)), 对图像拟合出一条斜率为 -0.61 的直线, 得出 v 的值小于 0, 且 v 与 ϵ 线性相关, 满足 $v = -0.61\epsilon$. 这就证实了相干簇向左移动, 且移动速度与参数 ϵ 线性相关.

考虑 ϵ 对相干簇的大小的影响. 令 $P = N_s / N$ 表示相干簇的振子数量在系统中的占比, 其中 N_s 是系统中相干簇的振子数量. 如图 4 所示, P 不会随着 ϵ 改变, 系统相干簇的大小与 ϵ 没有明显的关系.

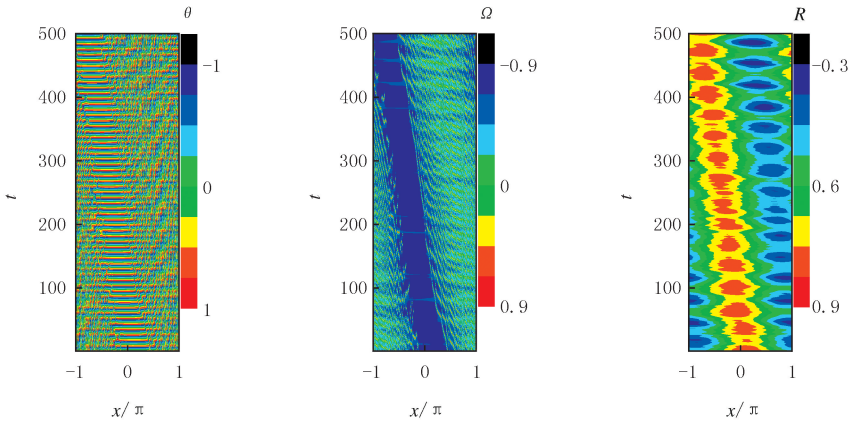


图2 系统的时空演化图

Fig.2 The spatiotemporal pattern of the system

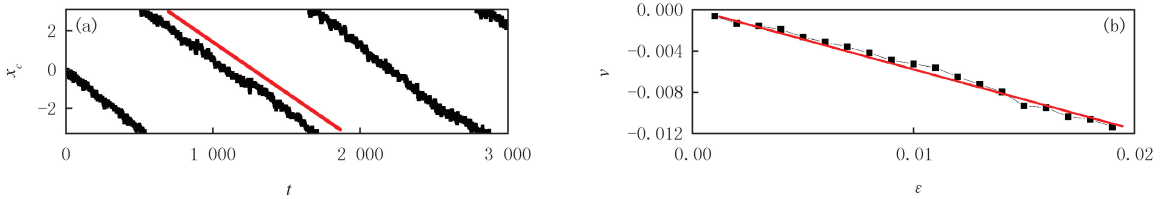


图3 相干簇的速度v(红线是拟合线)

Fig.3 The velocity v of coherent groups (red lines are fitting lines)

3 分析

利用 Ott-Antonsen 假设方法进行理论分析移动奇异态^[15-19,29-32],定义局域平均场 $z(x, t)$ 以及其平均场强为 $\exp[i\theta(x, t)]$ 满足表达式为

$$z(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{i\theta(x+x', t)} dx',$$

将 $z(x, t)$ 演化成如下形式^[11-16,29-32]

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} [e^{-i\Omega} Z(x, t) - z^2(x, t) e^{i\Omega} Z^*(x, t)], \tag{4}$$

其中

$$Z(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x' - x) z(x', t) dx', \tag{5}$$

Z^* 是 Z 的共轭复数.局域平均场 $z(x, t)$ 将非相干区域的相位平滑化,系统转变成简单的动力学系统.通过 (3) ~ (5) 式,计算 $Z(x, t) = R(x, t) e^{i\theta(x, t)}$.奇异态属于(4)式的一类特解.当 N 趋于无穷且不对称强度 ϵ 为 0, 这类特解在坐标系中是稳定的.从图 2(c)可知,有限 N 系统的移动奇异态中相对静止的振子周围的时空变化^[12,33].

将(2)式分成两部分 $G(x', x) = G_0(x' - x) + \Delta G(x' - x)$,其中 $G_0(x' - x) = \frac{1 + A \cos(x' - x)}{2\pi}$ 且不

$$\text{对称强度 } \Delta G(x' - x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2\pi}, x' \geq x, \\ -\frac{\epsilon}{2\pi}, x' < x. \end{cases} \quad \text{当 } \epsilon = 0, \text{ 在坐标系中加入振子的角频率 } -\Omega_0, \text{ 因此, 旋转波为 } z(x,$$

$t) = \tilde{\varepsilon}(x) e^{-i\Omega_0 t}$ 以及 $Z(x, t) = \tilde{Z}(x) e^{-i\Omega_0 t}$. 那么(4)式化简为

$$i\Omega_0 \tilde{\varepsilon}(x) + \frac{1}{2} [e^{-i\alpha} \tilde{Z}(x) - \tilde{\varepsilon}^2(x, t) e^{i\alpha} \tilde{Z}^*(x)] = 0, \tag{6}$$

其中

$$\tilde{Z}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G_0(x' - x) \tilde{\varepsilon}(x', t) dx'. \tag{7}$$

(1)式在 $x \rightarrow x + x_0$ 的平移下是不变的,因此如果 $\tilde{\varepsilon}(x)$ 和 $\tilde{Z}(x)$ 是(6)~(7)式的解,那么 $\tilde{\varepsilon}(x + x_0)$ 和 $\tilde{Z}(x + x_0)$ 也是不变的,采用 $\tilde{\varepsilon}(x - x_c)$ 和 $\tilde{Z}(x - x_c)$ 其中 x_c 是相干簇的中心振子的位置,对于单簇奇异态, $\tilde{Z}(x - x_c)$ 是偶函数, $\tilde{\varepsilon}(x - x_c)$ 是偶函数^[14-16].

在不对称耦合强度 $\varepsilon > 0$ 的情况下,图 3(a) 显示系统演化成移动奇异态且 x_c 向左移动,于是将(4)~(5)式演化成

$$-v \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_c} = i\Omega_0 \tilde{\varepsilon}(x - x_c) + \frac{1}{2} [e^{-i\alpha} \tilde{Z}(x - x_c) - \tilde{\varepsilon}^2(x - x_c, t) e^{i\alpha} \tilde{Z}^*(x - x_c)], \tag{8}$$

$$\tilde{Z}(x - x_c) = \int_{-\pi}^{\pi} [G_0 + \Delta G](x' - x) \tilde{\varepsilon}(x' - x_c, t) dx', \tag{9}$$

将(4)~(5)式与(8)~(9)式进行比较,可以得出

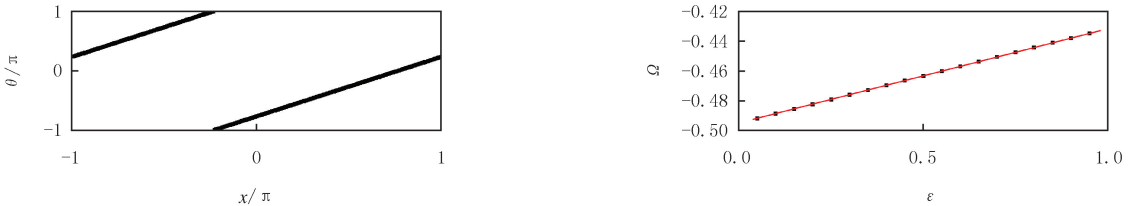
$$-v \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_c} = \frac{1}{2} [e^{-i\alpha} \tilde{\Delta Z}(x - x_c) - \tilde{\varepsilon}^2 e^{i\alpha} \tilde{\Delta Z}^*(x - x_c)],$$

其中

$$\tilde{\Delta Z}^*(x - x_c) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{x_c}^{x_c + \pi} \tilde{\varepsilon}(x' - x_c) dx',$$

结合图 3(b) 可以得出相干簇的移动速度与不对称耦合强度 ε 有关.

当系统不对称耦合程度数值较大时($\varepsilon \geq 0.02$), 系统演化成行波状态,所有的振子同步且角速度 Ω 相同. 由于行波解表达式为 $\theta(x, t) = \Omega t + x$, 于是将(1)式简化为 $\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} G(x' - x) \sin(x' - x - \alpha) dx'$. 将(2)式代入上式得到 $\Omega = \frac{A}{2} \sin \alpha + \frac{2\varepsilon}{\pi} \cos \alpha$, 将其添加在图 5(b) 中与仿真结果一致.



红线段是 $\Omega = (A \sin(\alpha)/2) + (2\varepsilon \cos(\alpha)/\pi)$ 的拟合线.

图5 $\varepsilon = 0.1$ 的系统相位快照和角速度 Ω 随不对称耦合强度 ε 改变

Fig. 5 The snapshot of phase pattern and the relationship between angular velocity Ω and ε

4 结 论

通过数值模拟以及 Ott-Antonsen 假设理论分析验证发现,非局域不对称耦合相振子组成的一维系统在

较小的不对称耦合条件下($\epsilon < 0.02$),系统演化出移动奇异态,其相干簇向左移动,移动速度 v 随着度 ϵ 的增加而增大,当不对称耦合较大时即 $\epsilon \geq 0.02$,系统全同相干,出现行波,证实了数值模拟与仿真结果一致。

参 考 文 献

- [1] KURAMOTO Y, BATTOGTOKH D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators: A Soluble Case [J]. *Physics*, 2002(4): 385.
- [2] TANAKA D, KURAMOTO Y. Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling [J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 26219.
- [3] ABRAMS D M, STROGATZ S H. Chimera states for coupled oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(17): 174102.
- [4] KAWAMURA Y. Chimera Ising walls in forced nonlocally coupled oscillators [J]. *Physical Review E*, 2007, 75: 056204.
- [5] OMELCHENKO O E, MAISTRENKO Y L, TASS P A. Chimera states: the natural link between coherence and incoherence [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(4): 044105.
- [6] THOUBAAN M, ASHWIN P. Existence and stability of chimera states in a minimal system of phase oscillators [J]. *Chaos*, 2018, 28(10): 103121.
- [7] MOTTER A E. Nonlinear dynamics: spontaneous synchrony breaking [J]. *Nature Physics*, 2010, 6(3): 164-165.
- [8] RATTENBORG N C, VOIRIN B, CRUZ S M, et al. Evidence that birds sleep in mid-flight [J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 12468.
- [9] SHEEBA J H, CHANDRASEKAR V K, LAKSHMANAN M. Chimera and globally clustered chimera: impact of time delay [J]. *Physical Review E*, 2010, 81: 046203.
- [10] SETHIA G C, SEN A, ATAY F M. Clustered chimera states in delay-coupled oscillator systems [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(14): 144102.
- [11] ZHU Y, ZHENG Z, YANG J. Reversed two-cluster chimera state in non-locally coupled oscillators with heterogeneous phase lags [J]. *EPL*, 2013, 103(1): 10007.
- [12] ZHU Y, LI Y, ZHANG M, et al. The oscillating two-cluster chimera state in non-locally coupled phase oscillators [J]. *EPL*, 2011, 97(1): 10009.
- [13] ABRAMS D M, MIROLLO R, STROGATZ S H, et al. Solvable model for chimera states of coupled oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(8): 084103.
- [14] PIKOVSKY A, ROSENBLUM M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(26): 264103.
- [15] OTT E, ANTONSEN T M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators [J]. *Chaos*, 2008, 18(3): 037113.
- [16] MARTENS E A, BICK C. Controlling chimeras [J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(3): 33030-33039.
- [17] OMELCHENKO O E. The mathematics behind chimera states [J]. *Nonlinearity*, 2018, 31(5): R121-R164.
- [18] LAING C R. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks [J]. *Physica D*, 2009, 238(16): 1569-1588.
- [19] LAING C R. Chimera states in heterogeneous networks [J]. *Chaos*, 2009, 19(1): 013113.
- [20] SHIMA S I, KURAMOTO Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators [J]. *Physical Review E*, 2004, 69: 036213.
- [21] MARTENS E A, LAING C R, STROGATZ S H. Solvable model of spiral wave chimeras [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(4): 044101.
- [22] GU C, ST-YVES G, DAVIDSEN J. Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(13): 134101.
- [23] 朱云, 黄竞雄, 谢琛, 等. 4 团簇奇异态的移动特性 [J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 47(6): 45-50.
ZHU Y, HUANG J X, XIE C, et al. Traveling performances of four-cluster Chimera states [J]. *Journal Henan Normal University(Natural Science Edition)*, 2019, 47(6): 45-50.
- [24] HAGERSTROM A M, MURPHY T E, ROY R, et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices [J]. *Nature Physics*, 2012, 8(9): 658-661.
- [25] TINSLEY M R, NKOMO S, SHOWALTER K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators [J]. *Nature Physics*, 2012, 8(9): 662-665.
- [26] DUDKOWSKI D, KRZYSZTOF C, KAPITANIAK T. Traveling chimera states for coupled pendula [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(3): 1859-1866.
- [27] DUDKOWSKI D, CZOLECZYŃSKI K, KAPITANIAK T. Traveling amplitude death in coupled pendula [J]. *Chaos*, 2019, 29(8): 083124.
- [28] OMELCHENKO O E. Travelling chimera states in systems of phase oscillators with asymmetric nonlocal coupling [J]. *Nonlinearity*, 2020, 33(2): 611-642.
- [29] OMELCHENKO O E. Traveling chimera states [J]. *Journal of Physics A*, 2019, 52(10): 104001.

- [30] WOLFRUM M, OMELCHENKO O E, YANCHUK S, et al. Spectral properties of chimera states[J]. *Chaos*, 2011, 21(1): 013112.
- [31] WOLFRUM M, GUREVICH S V, OMELCHENKO O E. Turbulence in the Ott-Antonsen equation for arrays of coupled phase oscillators[J]. *Nonlinearity*, 2015, 29(2): 257-270.
- [32] XIE J, KNOBLOCH E, KAO H C. Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators[J]. *Physical Review E*, 2014, 90: 022919.
- [33] SIEBER J, OMELCHENKO O E, WOLFRUM M. Controlling unstable chaos: stabilizing chimera states by feedback[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(5): 054102.

The traveling chimera state in non-locally asymmetric coupled phase oscillators

Zhu Yun, Xie Chen, Huang Jingxiang

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In this paper, we study the traveling chimera state of one-dimensional array of nonlocally coupled identical phase oscillators with asymmetric coupling under random initial conditions. It is found that the coherent groups can move and the velocity is linearly related to the asymmetric coupling. The results are confirmed by the theoretical analysis based on the Ott-Antonsen(OA) ansatz.

Keywords: nonlocal; chimera state; asymmetric coupling; OA ansatz

[责任编辑 杨浦 刘洋]

(上接第 18 页)

Response of soil microorganisms to atmospheric nitrogen deposition: A review

Wang Qinggui^{1,2}, Zhang Xiaoying¹

(1. College of Modern Agriculture and Ecological Environment, Heilongjiang University, Harbin 150080, China;

2. School of Life Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

Abstract: Stable ecosystems are of great significance to maintain ecological balance, and soil microorganisms are an important factor affecting the stability of ecosystems, but atmospheric nitrogen deposition caused by human activities has a huge impact on soil microorganisms. Nitrogen deposition will increase the accumulation of available nitrogen in terrestrial ecosystems, and drive changes in structure, diversity, and functions of soil microbial communities by changing the relationship between biogeochemical cycles, soil environment and microbes. Therefore, this article sorts out domestic and foreign studies on simulated nitrogen deposition leading to microbial changes, and discusses its impact on microorganisms from the aspects of nitrogen deposition on soil microbial biomass, community structure and diversity, functional groups, and response mechanisms, and aims to explore how nitrogen deposition will change the function of microorganisms and then affect the structure, function and dynamics of the ecosystem.

Keywords: nitrogen deposition; microbial biomass; microbial community structure; microbial diversity; functional groups

[责任编辑 刘洋 杨浦]