

# 带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统的性能分析

叶晴晴,陈钰

(南京信息工程大学 数学与统计学院,南京 210044)

**摘要:**研究了带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统.基于广义特征值法,根据平衡方程得到了重试空间中顾客数与服务台状态的稳态联合概率分布的显示解,推导出排队系统的重要性能指标,并对任意客户逗留时间分布函数进行 Laplace-Stieltjes 变换,以此获得任意顾客的平均逗留时间.最后,通过数值例子来分析系统的参数变化对系统性性能指标的影响,此外,还将广义特征值法与矩阵几何解法进行了比较.

**关键词:**重试排队;工作故障策略;广义特征值法;逗留时间

**中图分类号:**O226

**文献标志码:**A

在现实生活中,排队系统的服务台长期工作导致故障的出现,传统稳定可靠的排队模型已经不能说明现实情况.2012 年,文献[1]首次提出工作故障策略,即服务台在正常工作状态下可能发生故障,发生故障后服务台立刻进行修理,并且以较低的服务速率继续为顾客服务.2018 年,文献[2]讨论了具有工作故障的 MAP/M/1 队列,采用矩阵几何解法求出系统的稳态队长,并且给出了一个递推公式来获得平均逗留时间的近似值.2021 年,文献[3]考虑了一个具有工作故障和延迟工作休假的 M/M/1 队列,采用广义特征值法推导出系统的稳态概率分布与若干性能指标.同年,文献[4]研究了完全故障且可中断启动时间 M/M/1 排队模型,基于“收益-成本”效用函数,研究顾客进队的个体最优策略,并且通过解平衡方程进而分析统筹全局的社会最优收益.

为了避免服务器在正常工作状况下出现数据的拥堵现象,文献[5]首次发表了有关重试排队研究的文章.当到达的顾客发现服务台处于繁忙状态且暂时不能提供服务时,顾客便会进入一个重试空间,在一段随机时间后顾客再次尝试直至服务台可以进行服务,这便是重试排队系统.近年来,重试排队系统研究引起了众多学者的关注,已经广泛应用于通信网络和计算机网络,解决了许多实际问题.2019 年,文献[6]研究了一类带休假的 M/M/c 阻塞重试排队问题,利用矩阵几何解法导出了系统的稳态队长以及一些性能指标.2020 年,文献[7]考虑了一类具有一般重试次数和单工作休假的 M/G/1 重试队列,使用补充变量方法处理了服务器状态和轨道中的客户数的生成函数,导出了一些系统主要的性能指标.

基于以上分析,本文把重试排队与工作故障策略结合,考虑带有工作故障的 M/M/1 重试排队模型,该模型可应用于铁路 12306、大麦网、景区票务管理系统等网上购票系统.考虑一个拥有无限顾客容量的购票系统,当顾客进入购票系统进行购票请求时,如果系统处于繁忙状态,则顾客需要进行刷新页面来请求购票;如果系统处于空闲状态,则该顾客可以直接进行购票,但是在购票过程中系统可能出现故障,在故障的状态下购票系统并不会完全崩溃,仍然可以为顾客提供购票服务,但是此时系统的抢票速率要低于正常购票状态下的速率.经过一段时间的较低速率的抢票后,购票系统经过自动维修便可以调整为正常工作状态.顾客购票成功后便可退出购票软件.这种网上购票系统由于系统繁忙而进行的刷新页面与重试排队模型相对应,购票系统出现故障的情况与工作故障模型相对应.

本文剩余部分的结构如下:第一部分详细描述了带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统;第二部分证明

**收稿日期:**2022-03-20;**修回日期:**2022-04-05.

**基金项目:**国家自然科学基金(11901307);江苏省自然科学基金(BK20180783).

**作者简介(通信作者):**叶晴晴(1989-),男,江苏徐州人,南京信息工程大学副教授,研究方向为排队理论及模型,E-mail:yeqingzero@gmail.com.

该排队系统的平稳条件,并得到重试空间中的顾客数与服务台状态的稳态联合概率分布的显示解;第三部分推导出该排队系统的几个性能指标;第四部分通过数值实验讨论了系统参数对系统性能指标的影响,并且对该模型进行了广义特征值法和矩阵几何解法的比较.

### 1 模型描述

(1) 顾客的到达服从参数为  $\lambda$  的泊松过程.

(2) 排队系统在正常工作期,服务台的服务时间服从参数为  $\mu$  的指数分布,服务台在正常工作的过程中随时可能发生故障,故障的到达是参数为  $\alpha$  的泊松过程.一旦服务台出现故障,便立刻进行维修,维修时间服从参数为  $\beta$  的指数分布,服务台在维修期间并没有完全停止服务,而是以较低的服务速率  $\eta(\eta < \mu)$  继续提供服务.

(3) 顾客到达系统时,如果服务台处于空闲状态,则立刻为该顾客提供服务.如果服务台处于繁忙状态,则顾客进入重试空间等待重试.重试空间发出服务请求的过程是参数为  $\theta$  的泊松过程,即系统采取常数重试策略.

(4) 假设顾客的到达间隔时间、服务台故障的到达间隔时间、重试的间隔时间、正常工作期服务时间、工作故障期服务时间和服务台维修时间相互独立.服务顺序为先来先服务(FCFS),重试空间的容量是无限的.

带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统在任意时刻  $t$  可用 2 个随机变量进行描述: $N(t)$  表示  $t$  时刻重试空间中的顾客数, $I(t)$  表示  $t$  时刻服务台所处状态且  $I(t) = 0$  表示服务台处于工作故障状态且空闲, $I(t) = 1$  表示服务台处于工作故障状态且繁忙, $I(t) = 2$  表示服务台处于正常工作状态且空闲, $I(t) = 3$  表示服务台处于正常工作状态且繁忙.该随机过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  是一个二维的连续时间马尔科夫过程,状态空间为  $\Omega = \{(k, i), k \geq 0, i = 0, 1, 2, 3\}$ , 状态转移图见图 1.

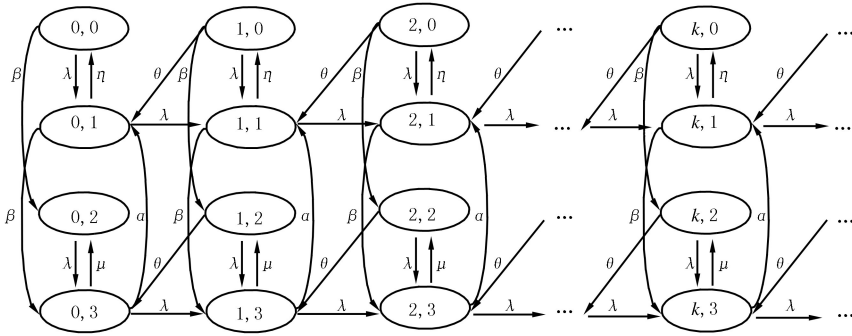


图1 状态转移图

Fig.1 State transition diagram

按照字典顺序排列,该连续时间马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  的无穷小生成元可表示为

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{C} & & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & & \\ & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \beta) & \lambda & \beta & 0 \\ \eta & -(\lambda + \beta + \eta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda + \mu + \alpha) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \theta \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \beta + \theta) & \lambda & \beta & 0 \\ \eta & -(\lambda + \beta + \eta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -(\lambda + \theta) & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda + \mu + \alpha) \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

## 2 稳态分析

**引理 1** 连续时间马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  的稳态条件为:

$$\frac{\lambda(\lambda + \theta)[(\alpha + \beta)(\lambda + \beta + \theta) + \eta\beta]}{(\alpha\eta\theta + \mu\theta\beta)(\lambda + \beta + \theta) + \mu\eta\theta\beta} < 1. \quad (2)$$

**证明** 注意到  $\mathbf{T} = \mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{C}$  为不可约矩阵, 设 4 维行向量  $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*)$ , 满足  $\boldsymbol{\pi}^* \mathbf{T} = 0$ ,  $\boldsymbol{\pi}^* \mathbf{e} = 1$ , 其中  $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)^\top$ . 根据文献[8]中定理 1.7.1 可知该马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  遍历的充要条件为:

$$\boldsymbol{\pi}^* \mathbf{C} \mathbf{e} < \boldsymbol{\pi}^* \mathbf{B} \mathbf{e}, \quad (3)$$

将  $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*)$  代入  $\boldsymbol{\pi}^* \mathbf{T} = 0$  得到以下方程组

$$-(\lambda + \beta + \theta)\pi_1^* + \eta\pi_2^* = 0, \quad (4)$$

$$(\lambda + \theta)\pi_1^* - (\beta + \eta)\pi_2^* + \alpha\pi_4^* = 0, \quad (5)$$

$$\beta\pi_1^* - (\lambda + \theta)\pi_3^* + \mu\pi_4^* = 0, \quad (6)$$

$$\beta\pi_2^* + (\lambda + \theta)\pi_3^* - (\mu + \alpha)\pi_4^* = 0. \quad (7)$$

根据方程(4)~(6), 向量  $\boldsymbol{\pi}^*$  可用  $\pi_1^*$  表示为

$$\boldsymbol{\pi}^* = \left( 1, \frac{\lambda + \beta + \theta}{\eta}, \frac{\alpha\eta\beta + \mu\beta(\lambda + \beta + \theta + \eta)}{\alpha\eta(\lambda + \theta)}, \frac{\beta(\lambda + \beta + \theta + \eta)}{\alpha\eta} \right) \pi_1^*, \quad (8)$$

由于不等式(3)等同于  $\lambda(\pi_2^* + \pi_4^*) < \theta(\pi_1^* + \pi_3^*)$ , 利用式(8), 可化简得到稳态条件为不等式(2), 引理 1 得证.

当稳态条件成立时, 随机过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  达到平稳状态, 定义重试空间中的顾客数与服务台状态的稳态联合概率分布为

$$\pi_{ki} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = k, I(t) = i\}, (k, i) \in \Omega, \quad (9)$$

引入稳态概率向量为  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k, \dots)$ , 其中  $\pi_k (k \geq 0)$  为 4 维行向量. 根据矩阵  $\mathbf{Q}$  得到平稳方程

$$\boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_1 \mathbf{B} = 0, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{C} + \boldsymbol{\pi}_k \mathbf{A} + \boldsymbol{\pi}_{k+1} \mathbf{B} = 0, k \geq 1. \quad (11)$$

方程(11)所满足的特征矩阵为

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \mathbf{B}x^2 + \mathbf{A}x + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \beta + \theta)x & \theta x^2 + \lambda x & \beta x & 0 \\ \eta x & -(\lambda + \beta + \eta)x + \lambda & 0 & \beta x \\ 0 & 0 & -(\lambda + \theta)x & \theta x^2 + \lambda x \\ 0 & \alpha x & \mu x & -(\lambda + \mu + \alpha)x + \lambda \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$\boldsymbol{\Psi}(x)$  对应的特征行列式为:  $\det[\boldsymbol{\Psi}(x)] = x^2 \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + h)$ , 其中

$$a = \theta^2 \eta \mu, b = -\theta(\eta l_1 + \mu_2 + \alpha \beta \eta), h = \lambda^2(\lambda + \theta)(\lambda + \beta + \theta),$$

$$c = \lambda \theta \eta (\lambda + \theta) + \lambda \theta \mu (\lambda + \beta + \theta) - \alpha \beta [(\lambda + \beta + \theta)(\lambda + \theta) + \lambda \eta] + l_1 l_2,$$

$$d = -\lambda(\lambda + \theta)[(\lambda + \beta + \theta)(\lambda + \beta + \eta) - \lambda \eta] - \lambda(\lambda + \beta + \theta)[(\lambda + \theta)(\lambda + \mu + \alpha) - \lambda \mu],$$

$$l_1 = (\lambda + \theta)(\lambda + \mu + \alpha) - \lambda \mu, l_2 = (\lambda + \beta + \theta)(\lambda + \beta + \eta) - \lambda \eta.$$

特征方程  $\det[\boldsymbol{\Psi}(x)] = 0$  为一元六次方程, 其中有 2 个零特征值. 对于一元四次方程  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + h = 0$  的求解可参阅文献[9], 得到以下 4 个非零特征值

$$m_{1,2} = -\frac{b}{4a} + Y \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4Y^2 - 2K - \frac{H}{Y}}, m_{3,4} = -\frac{b}{4a} - Y \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4Y^2 - 2K - \frac{H}{Y}},$$

其中

$$\delta_0 = c^2 - 3bd + 12ah, \delta_1 = 2c^2 - 9bcd + 27b^2h + 27ad^2 - 72ach,$$

$$\Delta = ((\delta_1 + (\delta_1^2 - 4\delta_0^3)^{\frac{1}{2}})/2)^{\frac{1}{3}}, K = (8ac - 3b^2)/8a^2,$$

$$H = (b^3 - 4abc + 8a^2d)/8a^2, Y = (-2K/3 + (\Delta + \delta_0/\Delta)/3a)^{\frac{1}{2}}/2.$$

根据文献[10]的命题 2,如果排队系统处于平稳状态,  $\Psi(x)$  有且仅有 4 个特征值严格处于单位圆盘中. 注意到  $\Psi(x)$  有 2 个零特征值,故设在单位圆盘中 2 个非零特征值为  $r_1$  和  $r_2$ ,对应的左特征向量为  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ . 根据方程  $\gamma_n \Psi(r_n) = 0, n = 1, 2$ , 得到非零特征值  $r_1$  和  $r_2$  的左特征向量为

$$\gamma_n = (1, f_1, f_2(r_n), f_3(r_n)), n = 1, 2, \quad (13)$$

其中,

$$f_1 = \frac{\lambda + \beta + \theta}{\eta},$$

$$f_2(x) = \frac{\alpha\beta\eta x - \mu\eta(\theta x^2 + \lambda x) + \mu[(\lambda + \beta + \eta)x - \lambda](\lambda + \beta + \theta)}{(\lambda + \theta)\alpha\eta},$$

$$f_3(x) = \frac{[(\lambda + \beta + \eta)x - \lambda](\lambda + \beta + \theta) - \eta(\theta x^2 + \lambda x)}{\alpha\eta x}.$$

系统的稳态概率向量  $\pi_k (k \geq 0)$  可表示为特征值  $r_1$  和  $r_2$  与其对应的左特征向量  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  的线性组合

$$\pi_k = t_1 r_1^k \gamma_1 + t_2 r_2^k \gamma_2, k \geq 0, \quad (14)$$

其中  $t_1$  和  $t_2$  是待定系数.注意到  $\pi_0 \mathbf{A}_0 + \pi_1 \mathbf{B} = 0$  等价于

$$(\lambda + \beta)\pi_{00} = \eta\pi_{01}, \quad (15)$$

$$(\lambda + \beta + \eta)\pi_{01} = \lambda\pi_{00} + \alpha\pi_{03} + \theta\pi_{10}, \quad (16)$$

$$\lambda\pi_{02} = \beta\pi_{00} + \mu\pi_{03}, \quad (17)$$

$$(\lambda + \mu + \theta)\pi_{03} = \beta\pi_{00} + \lambda\pi_{02} + \theta\pi_{12}. \quad (18)$$

结合归一化条件  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \mathbf{e} = \sum_{k=0}^{\infty} (t_1 r_1^k \gamma_1 + t_2 r_2^k \gamma_2) \mathbf{e} = 1$ , 便可确定参数  $t_1$  和  $t_2$  为

$$t_1 = \left\{ \frac{\gamma_1 \mathbf{e}}{1 - r_1} - \frac{[\lambda f_2(r_1) - \beta - \mu f_3(r_1)] \gamma_2 \mathbf{e}}{[\lambda f_2(r_2) - \beta - \mu f_3(r_2)](1 - r_2)} \right\}^{-1}, t_2 = -\frac{\lambda f_2(r_1) - \beta - \mu f_3(r_1)}{\lambda f_2(r_2) - \beta - \mu f_3(r_2)} t_1. \quad (19)$$

### 3 性能指标

本部分基于上述理论结果,分析系统的各项性能指标如下:

(1) 重试空间的平均顾客数为  $E(N)$ :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k \mathbf{e} = \left( t_1 r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dr_1} r_1^k \gamma_1 + t_2 r_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dr_2} r_2^k \gamma_2 \right) \mathbf{e} = \left[ \frac{t_1 r_1}{(1 - r_1)^2} \gamma_1 + \frac{t_2 r_2}{(1 - r_2)^2} \gamma_2 \right] \mathbf{e}, \quad (20)$$

其中  $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)^T$ .

(2) 重试空间中没有顾客的概率为  $P_0$ :

$$P_0 = \pi_0 \mathbf{e} = (t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2) \mathbf{e}. \quad (21)$$

(3) 系统服务台处于空闲和繁忙状态的概率为  $P_F$  和  $P_B$ :

$$P_F = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \mathbf{e}_1 = \left( \frac{t_1}{1 - r_1} \gamma_1 + \frac{t_2}{1 - r_2} \gamma_2 \right) \mathbf{e}_1, P_B = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \mathbf{e}_2 = \left( \frac{t_1}{1 - r_1} \gamma_1 + \frac{t_2}{1 - r_2} \gamma_2 \right) \mathbf{e}_2, \quad (22)$$

其中  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ .

(4) 系统服务台处于正常工作和工作故障状态的概率为  $P_N$  和  $P_W$ :

$$P_N = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \mathbf{e}_3 = \left( \frac{t_1}{1 - r_1} \gamma_1 + \frac{t_2}{1 - r_2} \gamma_2 \right) \mathbf{e}_3, P_W = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \mathbf{e}_4 = \left( \frac{t_1}{1 - r_1} \gamma_1 + \frac{t_2}{1 - r_2} \gamma_2 \right) \mathbf{e}_4, \quad (23)$$

其中  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 1)^T, \mathbf{e}_4 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

(5) 任意顾客的平均逗留时间  $E(W)$ .

定义  $W^*(s)$  为任意顾客逗留时间分布函数  $W(x)$  的 Laplace-Stieltjes 变换(简称 LST),  $W_{k,i}^*(s)$  为当系统处于  $(k, i)$  状态时到达顾客的条件逗留时间分布函数  $W_{k,i}(x)$  的 LST,

$$W^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW(x), s \geq 0,$$

$$W_{k,i}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW_{k,i}(x), k, i \in \Omega, s \geq 0.$$

得到如下递归关系:

$$W_{k,0}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \beta + \theta + s} W_{k,1}^*(s) + \frac{\beta}{\lambda + \beta + \theta + s} W_{k,2}^*(s) + \frac{\theta}{\lambda + \beta + \theta + s} W_{k-1,1}^*(s), k \geq 1, \quad (24)$$

$$W_{k,1}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \beta + \eta + s} W_{k,1}^*(s) + \frac{\beta}{\lambda + \beta + \eta + s} W_{k,3}^*(s) + \frac{\eta}{\lambda + \beta + \eta + s} W_{k,0}^*(s), k \geq 0, \quad (25)$$

$$W_{k,2}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \theta + s} W_{k,3}^*(s) + \frac{\theta}{\lambda + \theta + s} W_{k-1,3}^*(s), k \geq 1, \quad (26)$$

$$W_{k,3}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \alpha + s} W_{k,3}^*(s) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \alpha + s} W_{k,2}^*(s) + \frac{\alpha}{\lambda + \mu + \alpha + s} W_{k,1}^*(s), k \geq 0. \quad (27)$$

其中  $W_{0,0}^*(s) = W_{0,2}^*(s) = 1$ . 对式(25)和(26)进行化简得:

$$W_{k,1}^*(s) = \frac{\beta}{\beta + \eta + s} W_{k,3}^*(s) + \frac{\eta}{\beta + \eta + s} W_{k,0}^*(s), k \geq 0, \quad (28)$$

$$W_{k,3}^*(s) = \frac{\mu}{\mu + \alpha + s} W_{k,2}^*(s) + \frac{\alpha}{\mu + \alpha + s} W_{k,1}^*(s), k \geq 0. \quad (29)$$

将  $W_{0,0}^*(s) = W_{0,2}^*(s) = 1$  代入式(28)和(29)可得

$$W_{0,1}^*(s) = \frac{\alpha\beta\eta + \mu\beta(\beta + \eta + s)}{(\mu + \alpha + s)(\beta + \eta + s)^2 - \alpha\beta(\beta + \eta + s)} + \frac{\eta}{\beta + \eta + s}, \quad (30)$$

$$W_{0,3}^*(s) = \frac{\alpha\eta + \mu(\beta + \eta + s)}{(\mu + \alpha + s)(\beta + \eta + s) - \alpha\beta}. \quad (31)$$

结合式(30)和(31),对式(24)、(26)、(28)和(29)进行求解得  $W_{k,0}^*(s), W_{k,1}^*(s), W_{k,2}^*(s)$  和  $W_{k,3}^*(s), k \geq 1$ . 根据 PASTA 定理<sup>[11]</sup>得到:

$$W^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{k,0}^*(s) \pi_{k-1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{k,1}^*(s) \pi_{k-1,1} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{k,2}^*(s) \pi_{k-1,2} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{k,3}^*(s) \pi_{k-1,3}, \quad (32)$$

任意顾客的平均逗留时间为

$$E(W) = -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (33)$$

对于式(33)的计算本文采用自动微分算法,具体原理可见文献[12].其实现可在 MATLAB 平台下,利用 ADMAT 自动微分工具将作为输入变量,通过调用函数在计算函数值的同时实现导数值的自动计算.任意顾客的平均逗留时间  $E(W)$  的具体计算过程可见表 1 中的算法 1.

表 1 计算任意顾客的平均逗留时间  $E(W)$

Tab. 1 Calculate the average sojourn time of any customer  $E(W)$

算法 1 计算任意顾客的平均逗留时间 $E(W)$ .	
输入	$\{A_0, A, B, C\}$ .
输出	任意顾客的平均逗留时间 $E(W)$ .
步骤 1	确定 $\Psi(x)$ 的两个非零特征值 $r_1$ 和 $r_2$ 与对应的左特征向量 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ .
步骤 2	计算系统的稳态概率向量 $\pi_k (k \geq 0)$ .
步骤 3	利用 PASTA 定理得到任意顾客逗留时间分布函数的 LST 为 $W^*(s)$ .
步骤 4	计算 $E(W) = -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big _{s=0}$ .

## 4 数值实验

### 4.1 参数的灵敏度分析

基于以上研究所获得的系统稳态性能指标,本部分进行数值实验来说明系统参数对这些性能指标的影响.每个数值实验的参数值选择需满足引理 1 中连续时间马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  的稳态条件.

图 2 至图 5 假设系统参数为  $\lambda = 1.5, \theta = 4, \mu = 2.5, \eta = 1.6, \alpha = 0.5, \beta = 2$ , 绘制重试空间中没有顾客的概率  $P_0$ , 服务台空闲的概率  $P_F$  以及服务台处于工作故障状态的概率  $P_W$  分别随参数  $\mu, \eta, \theta$  和  $\beta$  的变化曲线. 图 2 表明:  $P_0$  和  $P_F$  随  $\mu$  的增大而增大,  $P_W$  随  $\mu$  的增大而减小; 图 3 表明:  $P_0, P_F$  和  $P_W$  随  $\eta$  的增大而增大; 图 4 表明:  $P_0$  随  $\theta$  的增大而增大,  $P_F$  和  $P_W$  随  $\theta$  的增大而缓慢减小; 图 5 表明:  $P_0, P_F$  和  $P_W$  随  $\beta$  的增大而减小. 故从现实排队系统管理者的角度来考虑, 系统可以通过提高服务台在正常工作状态的服务速率, 并加快对故障服务台的维修速率, 以此降低服务台发生故障的概率, 使服务台得到最有效的使用. 其次, 增大服务台在正常工作状态与维修状态下的服务速率, 能够有效缓解重试排队系统的拥塞现象.

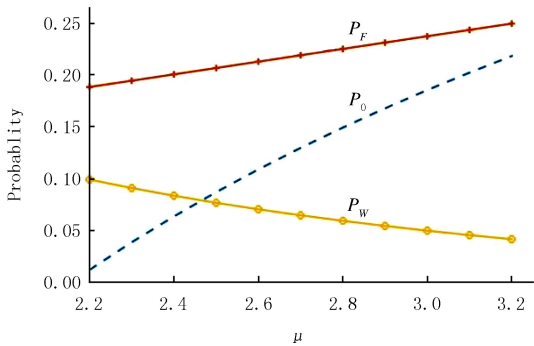


图2  $P_0, P_F$ 和 $P_W$ 随 $\mu$ 的变化曲线  
Fig. 2  $\mu$  versus  $P_0, P_F$  and  $P_W$

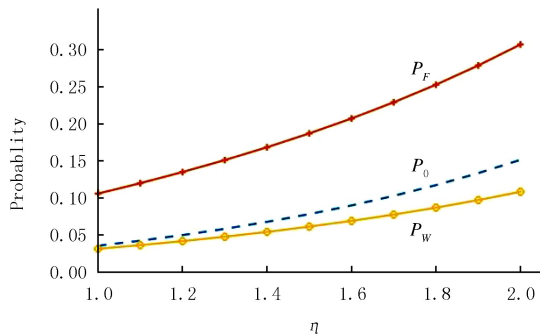


图3  $P_0, P_F$ 和 $P_W$ 随 $\eta$ 的变化曲线  
Fig. 3  $\eta$  versus  $P_0, P_F$  and  $P_W$

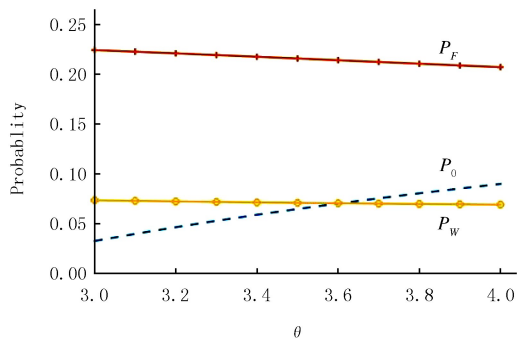


图4  $P_0, P_F$ 和 $P_W$ 随 $\theta$ 的变化曲线  
Fig. 4  $\theta$  versus  $P_0, P_F$  and  $P_W$

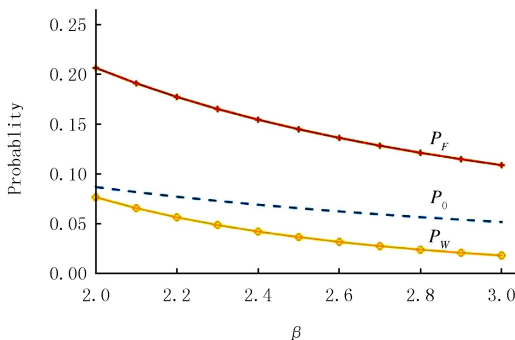


图5  $P_0, P_F$ 和 $P_W$ 随 $\beta$ 的变化曲线  
Fig. 5  $\beta$  versus  $P_0, P_F$  and  $P_W$

图 6 至图 9 假设系统参数为  $\lambda = 1.5, \theta = 4, \mu = 2.5, \eta = 1.6, \alpha = 0.5, \beta = 2$ , 绘制重试空间中的平均顾客数  $E(N)$  和任意顾客的平均逗留时间  $E(W)$  随参数  $\lambda, \mu, \theta$  和  $\beta$  的变化曲线. 图 6 和图 7 表明:  $\beta$  分别取 2.0, 2.5, 3.0, 改变  $\mu$  的值,  $E(N)$  和  $E(W)$  随  $\mu$  的增大而减小, 其中当  $\mu$  增大到某一固定值时,  $E(N)$  趋近于 0. 当  $\mu$  一定时,  $E(N)$  和  $E(W)$  随  $\beta$  的增大而减小. 图 8 和图 9 表明:  $\theta$  分别取 6, 8, 10, 改变  $\lambda$  的值,  $E(N)$  和  $E(W)$  随  $\lambda$  的增大而增大. 当  $\lambda$  一定时,  $E(N)$  和  $E(W)$  随  $\theta$  的增大而减小. 故从排队系统管理者的角度来考虑, 系统的顾客量过大会导致队列拥挤, 新到达顾客要想接受服务需要等待较长的时间. 对此管理者可做出提高服务台正常工作期的服务速率, 加快对故障服务台的维修以及增大重试空间的重试率等策略来缓解队列的拥塞现象, 以此提高排队系统整体的服务质量.

### 4.2 矩阵几何解法

20 世纪, 文献[8]对结构矩阵分析方法进行了系统的研究. 随后, 文献[13]中提到的矩阵几何解的方法被引入到 GI/M/1 休假排队研究, 将矩阵几何解从数值形式推广到矩阵的形式.

根据  $Q$  矩阵的特殊结构, 本文研究的连续时间马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  为拟生灭过程, 对该过程也可运用矩阵几何解法进行分析. 首先需要求得二次矩阵方程  $R^2B + RA + C = 0$  的最小非负解  $R$ , 由于  $A$  矩阵的结构不能得到  $R$  的精确值, 为此通过迭代公式  $R[n + 1] = -(R^2[n]B + C)A^{-1}$  在 MATLAB 软件中得到矩阵  $R$  的近似值. 利用矩阵几何解法可将系统的稳态概率向量表示为  $\pi_k = \pi_0 R^k, k \geq 0$ , 其中  $\pi_0$  根据



矩阵方程  $\pi_0(\mathbf{A}_0 + \mathbf{R}\mathbf{B}) = 0$  和归一化条件  $\pi_0(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{e} = 1$  确定,其中  $\mathbf{I}$  为 4 阶单位矩阵,  $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)^T$ . 重试空间的平均顾客数可表示为  $E(N) = \pi_0\mathbf{R}[(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}]^2\mathbf{e}$ .

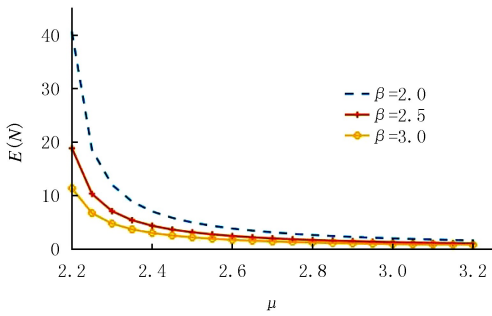


图6  $E(N)$  随  $\mu$  和  $\beta$  的变化曲线  
Fig.6  $\mu$  and  $\beta$  versus  $E(N)$

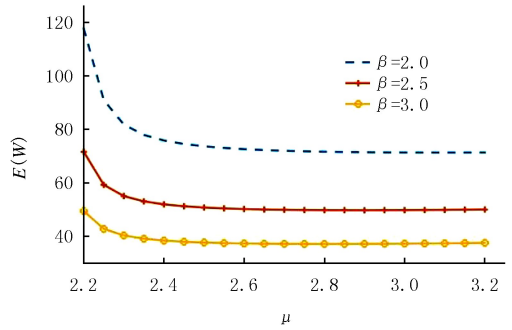


图6  $E(W)$  随  $\mu$  和  $\beta$  的变化曲线  
Fig.6  $\mu$  and  $\beta$  versus  $E(W)$

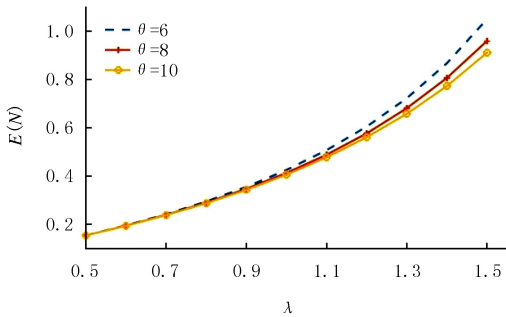


图8  $E(N)$  随  $\lambda$  和  $\theta$  的变化曲线  
Fig.8  $\lambda$  and  $\theta$  versus  $E(N)$

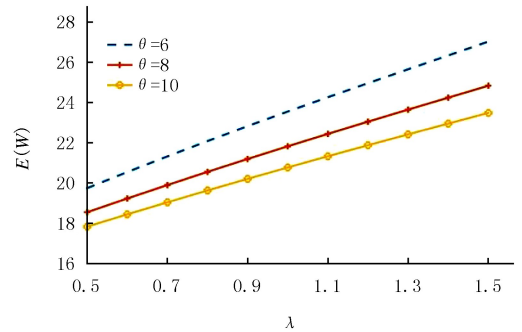


图9  $E(W)$  随  $\lambda$  和  $\theta$  的变化曲线  
Fig.9  $\lambda$  and  $\theta$  versus  $E(W)$

对于本文研究的带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统,设定几组不同的参数值,把采用广义特征值法和矩阵几何解法得到的重试空间的平均顾客数分别记为  $E(N_1)$  和  $E(N_2)$ ,所有参数值的选择满足引理 1 中连续时间马尔科夫过程  $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$  的稳态条件,比较结果可见表 2.

表 2 广义特征值法和矩阵几何解法重试空间平均顾客数  $E(N)$  的比较

Tab. 2 Comparison of  $E(N)$  between the spectral expansion method and the matrix geometric solution method

组号	$\lambda$	$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\eta$	$\theta$	广义特征值法 $E(N_1)$	矩阵几何解法 $E(N_2)$
1	1.0	3.0	0.10	2	1.5	3	0.605 3	0.604 4
2	1.5	2.5	0.05	2	1.6	4	3.574 2	3.580 1
3	2.0	4.0	0.50	3	2.0	5	2.460 2	2.458 4
4	8.0	15.0	1.00	8	12.0	15	16.659 9	16.661 0
5	10.0	20.0	10.00	10	15.0	30	7.085 2	7.088 6

通过表 2 中进行的 5 组数值实验对  $E(N_1)$  和  $E(N_2)$  进行比较得到:采用广义特征值法与矩阵几何解法得到的重试空间的平均顾客数的结果几乎一致.相比矩阵几何解法,本文采用的广义特征值法能够得到重试空间中的顾客数与服务台状态的稳态联合概率分布  $\pi_k(k \geq 0)$  的显示解,具有更高的实用性.

## 5 结 论

本文研究了带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统,通过工作故障策略和重试排队模型的结合,考虑二维的连续时间马尔科夫过程.基于广义特征值法,将重试空间中的顾客数与服务台状态的稳态联合概率分布表示为特征值与特征向量的线性组合形式,并得到了重试空间中的平均顾客数与任意顾客的平均逗留时间等相关性能指标,通过数值例子讨论了系统参数对系统性能指标的影响.

## 参 考 文 献

- [1] KALIDASS K, KASTURI R. A queue with working breakdowns[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(4): 779-783.
- [2] YE Q Q, LIU L. Analysis of MAP/M/1 queue with working breakdowns[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2018, 47(13): 3073-3084.
- [3] YANG D Y, CHUNG C H, WU C H. Sojourn times in a Markovian queue with working breakdowns and delayed working vacations[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2021, 156: 107239.
- [4] 徐秀丽, 王蕊. 完全可见下具有两类顾客和故障启动排队系统的均衡分析[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2021, 49(2): 7-14.
- XU X L, WANG R. Equilibrium strategies of queueing system with two types of parallel customers, breakdowns and setup times in fully visible case[J]. *Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)*, 2021, 49(2): 7-14.
- [5] VAN D T. An efficient solution to a retrial queue for the performability evaluation of DHCP[J]. *Computers & Operations Research*, 2010, 37(7): 1191-1198.
- [6] KE J C, CHANG F M, LIU T H. M/M/c balking retrial queue with vacation[J]. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2019, 16(1): 54-66.
- [7] LI T, ZHANG L, GAO S. An M/G/1 retrial queue with single working vacation under Bernoulli schedule[J]. *RAIRO-Operations Research*, 2020, 54(2): 471-488.
- [8] NEUTS M F. Matrix-geometric solution in stochastic model[M]. Baltimore: Hopkins University Press, 1981.
- [9] JIANG T, XIN B. Computational analysis of the queue with working breakdowns and delaying repair under a Bernoulli-schedule-controlled policy[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2019, 48(4): 926-941.
- [10] MITRANI I, CHAKKA R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: Application and comparison with the matrix-geometric method[J]. *Performance Evaluation*, 1995, 23(3): 241-260.
- [11] WOLFF R W. Poisson arrivals see time averages[J]. *Operations Research*, 1982, 30(2): 223-231.
- [12] BISCHOF C, LANG B, VEHRSCCHILD A. Automatic differentiation for MATLAB programs[C]//PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. Berlin: WILEY-VCH Verlag, 2003.
- [13] 田乃硕, 岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- TIAN N S, YUE D Q. Quasi birth death process and geometric solution of matrix[M]. Beijing: Science Press, 2002.

## Performance analysis of M/M/1 retrial queueing system with working breakdowns

Ye Qingqing, Chen Yu

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

**Abstract:** This paper studies the M/M/1 retrial queueing system with working breakdowns. Basing on the spectral expansion method, we solve the balance equations to obtain the explicit solution of the steady-state joint probability distribution of the number of customers in the orbit and the server state. Further, some important performance measures of queueing system are derived. Particularly, the expected sojourn time of the customers is obtained by Laplace-Stieltjes transformation. Finally, we provide numerical examples to illustrate the effects of various system parameters on performance measures. In addition, we compare the spectral expansion method with the matrix geometric solution method in the analysis of retrial queue with working breakdowns.

**Keywords:** retrial queueing; working breakdown; spectral expansion method; sojourn time

[责任编辑 陈留院 赵晓华]