第 44 卷 第 3 期
2016 年 5 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)

Vol. 44 No. 3
May 2016

文章编号:1000-2367(2016)03-0007-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.03.002

PBR_0 代数的性质及其滤子

龚加安[1,2],吴洪博[1]

(1.陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062;2.商洛职业技术学院,陕西 商洛 056001)

摘 要:在研究 BR_0- 代数的基础上,首先给出了 PBR_0- 代数的概念,讨论了 PBR_0- 代数的一些性质,得到了 PBR_0- 代数的等价刻画定理,然后讨论了 PBR_0- 代数的滤子及其生成滤子的性质.

关键词:逻辑代数;BR_0 代数;PBR_0 代数;滤子;生成滤子

中图分类号:O141.1 **文献标志码**:A

多值逻辑不仅与当今一些前沿学科如模糊控制,人工智能,神经网络和计算机科学有着密切联系,而且多值逻辑理论本身的内容非常丰富.众所周知,不同的模糊逻辑系统对应着不同的逻辑代数.早在 1958 年,著名的逻辑学家 C. C. Chang 为解决 Lukasiewicz 逻辑系统的完备性引入了 MV 代数[1].1997 年,王国俊教授基于对模糊逻辑与逻辑推理方面存在的问题的分析,提出了一种新的形式演绎系统——L^* 系统和与之相配的逻辑代数——R_0 代数[2].此后,吴洪博教授又创建了模糊逻辑系统基础 L^*(BL^*)和基础 R_0(BR_0)代数[3].以上理论的提出与研究,引起了人们极大的兴趣并取得丰硕的成果.在以上的模糊逻辑与推理的研究中,长期占主导地位的是所谓的 t-模逻辑,而通常的 t-模均要求 t-模具有交换性.近年来受非可换线性逻辑(它在逻辑程序设计,计算机语言,模糊数据库等领域有着重要的应用)的影响,几个基于非可换 t-模(也称伪 t-模)的非可换逻辑系统相继提出[4-5].吴洪博教授和他的学生们近年来一直致力于这方面的研究,取得了一些成果[6-11].基于以上的研究,本文提出了对应于广义 t-模的 PBR_0-代数,并给出了 PBR_0-代数的若干性质及其滤子.

1 预备知识

定义 1[3] 设 M 是($\neg$, $\vee$, $\rightarrow$)型代数,如果

(i) M 上有偏序 $\leq$ 使(M, $\leq$) 成为有界分配格,且 $\vee$ 是关于序 $\leq$ 而言的上确界运算;

(ii) $\neg$ 是关于 $\leq$ 而言的逆序对合对应;

(iii) 对任意的 $a,b,c \in M$,以下条件成立:

(B_1) $\neg a \rightarrow \neg b = b \rightarrow a$; ($B_2$) $1 \rightarrow a = a$, $a \rightarrow a = 1$;

(B_3) $b \rightarrow c \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$; ($B_4$) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$;

(B_5) $a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$, $a \rightarrow b \wedge c = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

这里 1 是 M 中的最大元,并记 $0 = \neg 1$,那么称 M 为基础 R_0- 代数,记作 BR_0- 代数.有时用 a' 表示 $\neg a$.由于"$'$"是逆序对合对应,故 De Morgan 对偶律成立,即 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,$(a \wedge b)' = a' \vee b'$.易知 $a' = a \rightarrow 0$.对于 Boole- 代数,若规定 $a \rightarrow b = a' \vee b$,则 Boole- 代数是 BR_0- 代数.

定义 2[3] 满足条件(B_6)$(a \rightarrow b) \rightarrow b = a \vee b$ 的 BR_0- 代数是 MV- 代数.

收稿日期:2015-05-28;**修回日期**:2016-04-12.

基金项目:国家自然科学基金(61562015)

第 1 作者简介:龚加安(1975-),男,陕西商州人,商洛职业技术学院副教授,陕西师范大学青年骨干访问学者,研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑.

通信作者:吴洪博(1959-),男,陕西师范大学教授,研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑,E-mail:sxslgongke@163.com.

定义 3[3]　满足条件(B_6') $(a \to b) \vee ((a \to b) \to \neg a \vee b) = 1$ 的 BR_0- 代数称之为 R_0- 代数.

性质 1[3]　设 M 是 BR_0- 代数,对任意的 $a,b,c \in M$,则

(1) $\neg a = a \to 0$; (2) $a \le b$ 当且仅当 $a \to b = 1$; (3) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$; (4) $a \to b \le a \wedge c \to b \wedge c, a \to b \le a \vee c \to b \vee c$; (5) $a \le b \to c$ 当且仅当 $b \le a \to c$; (6) 若 $a \le b$,则 $b \to c \le a \to c, c \to a \le c \to b$; (7) $a \vee b \le ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$; (8) $\neg a \vee b \le a \to b$.

引理 1[3]　在 BR_0- 代数 M 中引进二元运算 $*: M \times M \to M$,对任意的 $a,b \in M$, $a * b = \neg(a \to \neg b)$,则 $(*, \to)$ 是伴随对,且 $(M, *, 1)$ 是带单位元 1 的 Abel 半群.

引理 2　若 M 是有界格,且满足:(1) $(M, *, 1)$ 是带单位元 1 的 Abel 半群;(2) 对任意的 $a,b,c \in M$, $a * b \le c$ 当且仅当 $a \le b \to c$. 则

(1) $a \le b$ 当且仅当 $a \to b = 1$;　(2) $b \to (\wedge_{i \in I} a_i) = \wedge_{i \in I}(b \to a_i)$, $(a_i \in M, i \in I)$;

(3) $(\vee_{i \in I} a_i) * b = \vee_{i \in I}(a_i * b)$;　(4) $(\vee_{i \in I} a_i) \to b = \wedge_{i \in I}(a_i \to b)$;

(5) 若 $a \le b$,则 $a * c \le b * c$;　(6) 若 $a \le b$,则 $c \to a \le c \to b$, $b \to c \le a \to c$;

(7) $a \to b \le a \wedge c \to b \wedge c$, $a \to b \le a \vee c \to b \vee c$; (8) $b \to c \le (a \to b) \to (a \to c)$.

2　PBR_0 代数及其性质

定义 4　若一个结构 $(M, \vee, \wedge, *, \to, \Rightarrow, 0, 1)$,对任意的 $a,b,c \in M$,满足下列条件:

(PB_1) $(M, \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界格;

(PB_2) $(M, *, 1)$ 是有单位元 1 的半群;

(PB_3) $a * b \le c$ 当且仅当 $a \le b \to c$ 当且仅当 $b \le a \Rightarrow c$;

(PB_4) $(a \to b) \vee (b \to a) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$;

(PB_5) $(a \to 0) \Rightarrow 0 = (a \Rightarrow 0) \to 0 = a$,

则称该代数结构为 PBR_0- 代数,记作 PBR_0- 代数.

注 1　PBR_0- 代数正是 BR_0- 代数去掉 $*$ 运算的交换条件而导致了双蕴涵运算的一种代数结构.

性质 2　若 M 是 PBR_0- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \to, \Rightarrow, 0, 1)$,对任意的 $a,b,c \in M$,则下列性质成立:

(P_1) $a \le b$ 当且仅当 $a \to b = 1$ 当且仅当 $a \Rightarrow b = 1$;

(P_2) $a * (a \Rightarrow b) \le b \le a \to (a * b)$, $a * (a \Rightarrow b) \le a \le b \Rightarrow (b * a)$;

(P_3) $(a \to b) * a \le a \le b \to (a * b)$, $(a \to b) * a \le b \le a \to (b * a)$;

(P_4) $1 \Rightarrow a = 1 \to a = a$;

(P_5) $a * 0 = 0 * a = 0$;

(P_6) $a \vee b = ((a \Rightarrow b) \to b) \wedge ((b \Rightarrow a) \to a) = ((a \to b) \Rightarrow b) \wedge ((b \to a) \Rightarrow a)$;

(P_7) $a \to (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \to c)$;

(P_8) 若 $a \le b$,则 $a * c \le b * c$, $c * a \le c * b$;

(P_9) $a \to b \le (c \to a) \to (c \to b)$, $a \Rightarrow b \le (c \Rightarrow a) \Rightarrow (c \Rightarrow b)$;

(P_{10}) $a \to b \le (b \to c) \Rightarrow (a \to c)$, $a \Rightarrow b \le (b \Rightarrow c) \to (a \Rightarrow c)$.

证明　只证(P_2).

因 $a \Rightarrow b \le a \Rightarrow b$,所以由($PB_3$)可得 $a * (a \Rightarrow b) \le b$. 又因 $a * b \le a * b$,所以由(PB_3)得 $b \le a \Rightarrow (a * b)$. 得证 $a * (a \Rightarrow b) \le b \le a \Rightarrow (a * b)$.

因 $a \Rightarrow b \le 1, a \Rightarrow a = 1$,所以 $a \Rightarrow b \le a \Rightarrow a$,从而由($PB_3$)得 $a * (a \Rightarrow b) \le a$. 又因 $b * a \le b * a$,所以由(PB_3)得 $a \le b \Rightarrow (b * a)$. 得证 $a * (a \Rightarrow b) \le a \le b \Rightarrow (b * a)$.

性质 3　若 M 是 PBR_0- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \Rightarrow, 0, 1)$,对任意的 $a,b,c \in M$,则

(P_{11}) 若 $a \le b$,则 $c \Rightarrow a \le c \Rightarrow b, c \to a \le c \to b$;

(P_{12}) 若 $a \le b$,则 $b \Rightarrow c \le a \Rightarrow c, b \to c \le a \to c$;

(P_{13}) 若 $a \le b$,则 $a \le c \Rightarrow b, a \le c \to b$;

(P_{14}) $(a \rightarrow b) * a \leq a \wedge b$, $a * (a \Rightarrow b) \leq a \wedge b$.

证明　由(P_2)，(P_3)，结合(PB_3)可证.

性质 4　若 M 是完备的 PBR_0- 代数，对任意的 $a,b,c,\in M$，$\{a_i \mid i \in I\} \subseteq M$，则

(P_{15}) $a * (\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I}(a * a_i)$，$(\bigvee_{i\in I} a_i) * a = \bigvee_{i\in I}(a_i * a)$；

(P_{16}) $b \Rightarrow (\bigwedge_{i\in I} a_i) = \bigwedge_{i\in I}(b \rightarrow a_i)$，$b \rightarrow (\bigwedge_{i\in I} a_i) = \bigwedge_{i\in I}(b \rightarrow a_i)$；

(P_{17}) $(\bigvee_{i\in I} a_i) \Rightarrow b = \bigwedge_{i\in I}(a_i \Rightarrow b)$，$(\bigvee_{i\in I} a_i) \rightarrow b = \bigwedge_{i\in I}(a_i \rightarrow b)$；

(P_{18}) $a \Rightarrow b \vee c = (a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$，$a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$；

(P_{19}) $a \wedge b \Rightarrow c = (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$，$a \wedge b \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$.

证明　以(P_{15})，(P_{19})为例.

(P_{15}) 由(PB_3)得 $\forall x \in M, a * (\bigvee_{i\in I} a_i) \leq x$ 当且仅当 $\bigvee_{i\in I} a_i \leq a \Rightarrow x$ 当且仅当 $\forall i \in I, a_i \leq a \Rightarrow x$ 当且仅当 $\forall i \in I, a * a_i \leq x$ 当且仅当 $\bigvee_{i\in I}(a * a_i) \leq x$. 由 x 的任意性得 $a * (\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I}(a * a_i)$.

同理可证$(\bigvee_{i\in I} a_i) * a = \bigvee_{i\in I}(a_i * a)$. (P_{15}) 成立.

(P_{19}) 一方面，由性质(P_{12})得 $a \wedge b \Rightarrow c \geq a \Rightarrow c, b \Rightarrow c$，从而 $a \wedge b \Rightarrow c \geq (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.

另一方面，由(P_{11})，(P_{10})，(P_{16})，(P_1)，(PB_4)得

$(a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c) \geq ((a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c)) \vee ((a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (b \Rightarrow c)) \geq (a \Rightarrow a \wedge b) \vee (b \Rightarrow a \wedge b) = ((a \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow b)) \vee ((b \Rightarrow a) \wedge (b \Rightarrow b)) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$，即$(a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c) = 1$. 利用$(P_1)$得 $a \wedge b \Rightarrow c \leq (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.

综上两方面得证 $a \wedge b \Rightarrow c = (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.

同理得证 $a \wedge b \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$. (P_{19}) 成立.

性质 5　若 M 是 PBR_0- 代数，则对任意的 $a,b,c,\in M$ 有

(P_{20}) $(a * b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$，$(b * a) \Rightarrow c = a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$；

(P_{21}) $a * b \leq a \wedge b \leq a, b$；

(P_{22}) $a \vee (b * c) \geq (a \vee b) * (a \vee c)$.

证明　只证(P_{22}). 由(P_{15})得

$$(a \vee b) * (a \vee c) = (a * a) \vee (a * c) \vee (b * a) \vee (b * c) \leq$$
$$a \vee a \vee a \vee (b * c) = a \vee (b * c).$$

定义 5　在 PBR_0- 代数$(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$中定义两个非运算$-$，$\sim$：$M \rightarrow M$. 对任意的 $a \in M$，$a^- = a \rightarrow 0$，$a^\sim = a \Rightarrow 0$.

性质 6　若 M 是 PBR_0- 代数$(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$，对任意的 $a,b \in M$，则

(P_{23}) $1^\sim = 1^- = 0$，$0^* = 0^- = 1$；(P_{24}) $a * a^\sim = a^- * a = 0$；

(P_{25}) $a \leq b^-$ 当且仅当 $a * b = 0$；(P_{26}) $a \leq b^\sim$ 当且仅当 $b * a = 0$；

(P_{27}) $a \rightarrow b^- = (a * b)^-$，$a \Rightarrow b^\sim = (b * a)^\sim$；$(P_{28})$ $a \leq b^-$ 当且仅当 $b \leq a^\sim$；

(P_{29}) 若 $a \leq b$，则 $b^- \leq a^-$，$b^\sim \leq a^\sim$；(P_{30}) $a \rightarrow b = b^- \Rightarrow a^-$，$a \Rightarrow b = b^\sim \rightarrow a^\sim$；

(P_{31}) $a \rightarrow b^\sim = b \Rightarrow a^-$，$a \Rightarrow b^- = b \rightarrow a^\sim$；$(P_{32})$ $a * b = (a \rightarrow b^-)^\sim = (b \Rightarrow a^\sim)^-$；

(P_{33}) $a \rightarrow b = (a * b^\sim)^-$，$a \Rightarrow b = (b^- * a)^*$.

证明　以(P_{27})为例进行证明，其余的可利用性质 2 和性质 3 得证.

由(PB_3)知 $\forall x \in M$，$x \leq (a * b) \rightarrow 0$ 当且仅当 $x * (a * b) \leq 0$ 当且仅当$(x * a) * b \leq 0$ 当且仅当 $x * a \leq b \rightarrow 0$ 当且仅当 $x \leq a \rightarrow (b \rightarrow 0)$，由 x 的任意性得$(a * b) \rightarrow 0 = a \rightarrow (b \rightarrow 0)$，即 $a \rightarrow b^- = (a *)^-$.

同理得证 $a \Rightarrow b^\sim = (b * a)^\sim$.

性质 7　若 M 是一个 PBR_0- 代数$(M, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$，对任意的 $a,b,c \in M$，则

(P_{34}) $(a \vee b)^- = a^- \wedge b^-$，$(a \vee b)^\sim = a^\sim \wedge b^\sim$；

(P_{35}) $(a \wedge b)^- = a^- \vee b^-$，$(a \wedge b)^\sim = a^\sim \vee b^\sim$；

(P_{36}) $a \Rightarrow b \leq a \vee c \Rightarrow b \vee c$，$a \rightarrow b \leq a \vee c \rightarrow b \vee c$；

(P_{37}) $a \Rightarrow b \leq a \wedge c \Rightarrow b \wedge c$，$a \rightarrow b \leq a \wedge c \rightarrow b \wedge c$；

(P_{38}) $a\to b\leq(a\to c)\vee(c\to b)$, $a\Rightarrow b\leq(a\Rightarrow c)\vee(c\Rightarrow b)$.

证明 (P_{34}),(P_{35}),由两个非运算的定义和(P_1),(P_{17}),(P_{19}),(P_{30})可证.

下证(P_{36}),(P_{38})成立.

(P_{36}) 根据(P_1),(P_{11})和(P_{17})得

$$(a\vee c)\to(b\vee c)=(a\to b\vee c)\wedge(c\to b\vee c)=a\to b\vee c\geq a\to b,$$

所以$(a\vee c)\to(b\vee c)\geq a\to b$.

同理可证 $a\Rightarrow b\leq a\vee c\Rightarrow b\vee c$. (P_{36})成立.

(P_{38}) 因 $a\to b\leq a\vee c\to b\vee c$,且由$(P_{17})$,$(P_{18})$得

$$a\vee c\to b\vee c=(a\vee c\to b)\vee(a\vee c\to c)=((a\to b)\wedge(c\to b))\vee((a\to c)\wedge(c\to c))=$$
$$((a\to b)\wedge(c\to b))\vee(a\to c)\leq(a\to c)\vee(c\to b),$$

所以 $a\to b\leq(a\to c)\vee(c\to b)$.

同理得证 $a\Rightarrow b\leq(a\Rightarrow c)\vee(c\Rightarrow b)$. 即$(P_{38})$成立.

注 2 由(P_{34}),(P_{35})知 De Morgan 对偶律对两个非运算都成立.

定理 1 一个 PBR_0- 代数$(M,\wedge,\vee,*,\to,\Rightarrow,0,1)$是一个有界分配格.

证明 由性质(P_1),(P_{18}),(P_{37})可得.

定义 6 一个 PBR_0- 代数$(M,\vee,\wedge,*,\to,\Rightarrow,0,1)$是交换的,如果对任意的 $a,b\in M$,有 $a*b=b*a$.

定理 2 一个 PBR_0- 代数$(M,\vee,\wedge,*,\to,\Rightarrow,0,1)$是交换的,当且仅当对任意的 $a,b\in M$,有 $a\to b=a\Rightarrow b$.

证明 (必要性)由(PB_3)得 $\forall x\in M$,$x\leq a\to b$ 当且仅当 $x*a\leq b$ 当且仅当 $a*x\leq b$ 当且仅当 $x\leq a\to b$. 由 x 的任意性得证 $a\to b=a\Rightarrow b$.

(充分性)设 $\forall a,b\in M$,$a\to b=a\Rightarrow b$,由(P_{32})和(P_7)得

$$a*b=(a\to b^-)^\sim=(a\to(b\to 0))\Rightarrow 0=(a\to(b\Rightarrow 0))\Rightarrow 0=$$
$$(b\Rightarrow(a\to 0))\Rightarrow 0=(b\to(a\to 0))\Rightarrow 0=b*a.$$

推论 1 一个交换的 PBR_0- 代数$(M,\vee,\wedge,*,\to,\Rightarrow,0,1)$是一个 BR_0- 代数.

推论 2 若 PBR_0- 代数$(M,\vee,\wedge,*,\to,\Rightarrow,0,1)$中的 $*$ 运算是连续的,则 PBR_0- 代数就是 BR_0-代数.

引理 3 若(P_1),(P_7)成立,则(P_9)等价与(P_{10}).

证明 设(P_9)成立,由(P_1),(P_7)知

$$1=(a\to b)\Rightarrow((c\to a)\to(c\to b))=(c\to a)\to((a\to b)\Rightarrow(c\to b)),$$

故 $c\to a\leq(a\to b)\Rightarrow(c\to b)$.

同理可证 $c\Rightarrow a\leq(a\Rightarrow b)\to(c\Rightarrow b)$. (P_{10})成立.

反之,设(P_{10})成立,类似可得(P_9)成立.

在 PBR_0- 代数中,这些性质不是独立的,下面给出它们之间的联系.

定理 3 在有界格 M 中

(i) 若(P_{18})成立,则(P_{11})成立;

(ii) 若(P_4),(P_{30})成立,则(PB_5)成立;

(iii) 若(P_1),(P_{30})成立,则(P_{29})成立;

(iv) 若(P_{29}),(PB_5)成立,则(P_{34}),(P_{35})成立;

(v) 若(PB_3),(P_8)成立,则(P_{12})成立;

(vi) 若(P_{17})成立,则(P_{12})成立;

(vii) 若(P_1),(P_{11}),(P_{17})成立,则(P_{36})成立;

(viii) 若(P_{17}),(P_{18}),(P_{36})成立,则(P_{38})成立;

(ix) 若(PB_3),(P_{12}),(P_{15})成立,则(P_{17})成立.

证明　略.

定理 4　M 是一个 PBR_0- 代数(M, $\vee$, $\wedge$, $*$, $\to$, $\Rightarrow$, 0, 1) 的充要条件是对任意的 $a,b,c \in M$ 满足

(PB_1) (M, $\vee$, $\wedge$, 0, 1) 是有界格；

(P_4) $1 \Rightarrow a = 1 \to a = a$;

(P_7) $a \to (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \to c)$;

(P_9) $a \to b \leq (c \to a) \to (c \to b)$, $a \Rightarrow b \leq (c \Rightarrow a) \Rightarrow (c \Rightarrow b)$;

(P_{18}) $a \Rightarrow b \vee c = (a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$, $a \to b \vee c = (a \to b) \vee (a \to c)$;

(P_{30}) $a \to b = b^- \Rightarrow a^-$, $a \Rightarrow b = b^\sim \to a^\sim$.

其中 $a^\sim = a \Rightarrow 0$, $a^- = a \to 0$, $1^\sim = 1^- = 0$, $0^\sim = 0^- = 1$.

证明　(必要性) 由定义 4、性质 2、性质 4 及性质 6 可得证.

(充分性) 首先，在 M 上定义二元运算 $* \ M \times M \to M$, $\forall a, b \in M$,

$$a * b = (a \to b^-)^\sim = (b \Rightarrow a^\sim)^-.$$

其次，由定理 3(ii) 知(PB_5) 也成立.

下面分 3 步证明其余条件也成立.

(Ⅰ) (1) 由 $*$ 运算的定义，(PB_5) 及(P_4) 知

$$a * 1 = (a \to 1^-)^\sim = (a \to 0)^\sim = a, 1 \sim a = (1 \to a^-)^\sim = (a^-)^\sim = a,$$

所以 1 是(M, $*$, 1) 的单位元.

(2) 由 $*$ 运算的定义，(P_7)，(PB_5) 和(P_{30}) 知

$$a * (b * c) = (a \to (b * c)^-)^\sim = (a \to ((b \to c^-)^\sim)^-)^\sim = (a \to (b \to c^-))^\sim,$$

$$(a * b) * c = ((a * b) \to c^-)^* = ((a \to b^-)^\sim \to c^-)^\sim = ((c^-)^- \to (((a \to b^-)^\sim)^-)^\sim =$$

$$((c^-)^- \to (a \to b^-))^\sim = (a \to ((c^-)^- \to b^-))^\sim = (a \to (b \to c^-))^\sim,$$

所以 $a * (b * c) = (a * b) * c$，即 $*$ 运算满足结合律，从而(M, $*$) 是半群. (PB_2) 成立.

(Ⅱ) 先证 $a * b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \to c$.

(1) (必要性) 由 $*$ 运算的定义，(PB_5)，(P_1)，(P_7)，(P_{30}) 得 $a * b \leq c$，即

$$1 = (a \to b^-)^\sim \to c = c^- \Rightarrow (a \to b^-) = a \to (c^- \Rightarrow b^-) = a \to (b \to c),$$

所以 $a \leq b \to c$.

(2) (充分性) 由(PB_5)，(P_1)，(P_7)，(P_{30}) 得

$$1 = a \to (b \to c) = a \to (c^- \Rightarrow b^-) = c^- \Rightarrow (a \to b^-) = a \to b^-)^\sim \to c,$$

所以 $a * b \leq c$. 类似可证 $a * b \leq c$ 当且仅当 $b \leq a \to c$. (PB_3) 成立.

(Ⅲ) 由(P_1)，(P_{38}) 知

$$(a \to b) \vee (b \to a) \geq a \to a = 1, (a \to b) \vee (b \to a) \geq a \Rightarrow a = 1,$$

所以$(a \to b) \vee (b \to a) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$. ($PB_4$) 成立.

由此得证满足上述条件的 M 是 PBR_0- 代数.

推论 3　PBR_0- 代数类是一个簇[6]，即是等式代数类. 因此 PBR_0- 代数类关于子代数、同态像以及直积都是封闭的.

(P_9) 可写成等式的形式：

$$(a \to b) \wedge ((c \to a) \to (c \to b)) = (a \to b),$$

$$(a \wedge b) \wedge ((c \Rightarrow a) \to (c \Rightarrow b)) = (a \Rightarrow b).$$

3　PBR_0 代数的滤子

定义 7　M 的非空子集 F 称为 M 的滤子，如果它满足下列条件：

(F_1) $x, y \in F$ 时，$x * y \in F$；(F_2) $x \in F$, $x \leq y$ 时，$y \in F$.

若 $F \neq M$，则称 F 是 M 的真滤子.

定理 5 若 F 是 M 的滤子,则

(1) $1 \in F$;(2) 若 $x,y \in F$,则 $x \wedge y \in F$;

(3) 若 $x \in F, y \in M$,则 $y \to x \in F, y \Rightarrow x \in F$.

注 3 PBR_0- 代数的滤子是格滤子[12].

定理 6 设 F 是 M 的子集,则下列条件等价:

(i) F 是一个滤子;(ii) $1 \in F$,且 $a, a \Rightarrow b \in F$ 时,$b \in F$;

(iii) 若 $a,b \in F$, $b \leq a \Rightarrow c$,则 $c \in F$;(iv) $1 \in F$,且 $a, a \to b \in F$ 时,$b \in F$;

(v) 若 $a,b \in F$, $b \leq a \to c$,则 $c \in F$.

证明 (i)⇒(ii) 由(F_2)得 $1 \in F$ 若 $a, a \Rightarrow b \in F$,则由(F_1)得 $a * (a \Rightarrow b) \in F$. 又($P_2$) $a * (a \Rightarrow b) \leq b$,再利用($F_2$)知 $b \in F$.

(ii)⇒(iii) 由(P_1)知 $b \leq a \Rightarrow c$ 当且仅当 $b \Rightarrow (a \Rightarrow c) = 1 (1 \in F)$. 又 $b \in F$,故 $a \Rightarrow c \in F$. 再由 $a \in F$ 得 $c \in F$.

(iii)⇒(i) 设 $a,b \in F$,由(P_2)得 $b \leq a \Rightarrow (a * b)$,则 $a * b \in F$. (F_1)成立.

设 $a \in F, a \leq b$,又 $a \leq 1 = a \Rightarrow b$,故 $b \in F$. (F_2)成立.

同理可证(i)⇒(iv),(iv)⇒(v),(v)⇒(i).

由此可证(i)等价于(ii)等价于(iii)等价于(iv)等价于(v).

容易证明 M 的滤子之交也是滤子,下面考虑生成滤子.

定义 8 设 $A \subseteq M$,包含 A 的最小的滤子称为由 A 生成的滤子,记为 $[A)$. 若 $A = \{a\}$,则 $[\{a\})$ 记成 $[a)$,显然 $[A) = \bigcap \{F \mid A \subseteq F \subseteq M, F \text{ 是 } M \text{ 的滤子}\}$.

定理 7 设 F 是 M 的非空子集,则

$$[F) = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, \text{及 } a_1, \cdots, a_n \in F, \text{使得 } a_1 * a_2 * \cdots * a_n \leq x\} =$$
$$\{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, \text{及 } a_1, \cdots, a_n \in F, \text{使得 } a_n \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (a_1 \Rightarrow x) \cdots) = 1\} =$$
$$\{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, \text{及 } a_1, \cdots, a_n \in F, \text{使得 } a_1 \to (\cdots \to (a_n \to x) \cdots) = 1\}.$$

证明 仅证第 1 个等式. 应用(PB_3)到第 1 个等式右边的式子即可得其余两个等式.

令 $A = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, \text{及 } a_1, \cdots, a_n \in F, \text{使得 } a_1 * a_2 * \cdots * a_n \leq x\}$.

(1) $\forall a \in F$,由(P_8)知 $a * a \leq a * 1 = a$,故 $a \in A$,从而 $F \subseteq A$.

(2) 若 $a,b \in A$,则 $\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N}$,和 $a_1, \cdots, a_{n_1}, b_1, \cdots, b_{n_2} \in F$,使得

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_{n_1} \leq a, b_1 * b_2 * \cdots * b_{n_2} \leq b.$$

由(P_8)得 $(a_1 * a_2 * \cdots * a_{n_1}) * (b_1 * b_2 * \cdots * b_{n_2}) \leq a * b$,故 $a * b \in A$ 若 $a \in A, a \leq b$,则 $\exists n \in \mathbf{N}$,和 $a_1, \cdots, a_n \in F$,使得 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n \leq a$,从而 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n \leq b$,所以 $b \in A$.

得证 A 是一个滤子.

(3) 设 C 是 M 的任意一个滤子,且 $F \subseteq C$,则 $\forall a \in A, \exists n \in \mathbf{N}$,和 $a_1, \cdots, a_n \in F \subseteq C$,使得 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n \leq a$. 由 C 为滤子知 $a \in C$,所以 $A \subseteq C$.

综上(1)、(2)、(3)得证 A 是包含 F 的最小滤子,即 $A = [F)$.

为简便,记 $a^n = \overbrace{a * \cdots * a}^{n}$, $a^0 = 1$, $a \overset{n}{\Rightarrow} x = \overbrace{a \Rightarrow (a \Rightarrow \cdots (a \Rightarrow x) \cdots)}^{n}$, $a \overset{0}{\Rightarrow} x = x$, $a \overset{0}{\to} x = x$, $a \overset{n}{\to} x = \overbrace{a \to (a \to \cdots (a \to x) \cdots)}^{n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

推论 4 $a \in M$,则 $[a) = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, \text{使 } a^n \leq x\} = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, a \overset{n}{\Rightarrow} x\} = 1\} = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, a \overset{n}{\to} x = 1\}$.

推论 5 设 F 是 M 的滤子,$a \in M$,则 $[F \cup \{a\}) = \{x \in M \mid \exists m \in N, a_1, \cdots, a_m \in F, \text{和 } n_1, \cdots, n_m \geq 0, \text{使得 } (a_1 * a^{n_1}) * \cdots * (a_m * a^{n_m}) \leq x\}$.

定理 8 设 F 是 M 的滤子,且 $a,b \in M$,则

$$[F \cup \{a\}) \cap [F \cup \{b\}) = [F \cup \{a \vee b\}).$$

证明　设 $x \in [F \cup \{a\}) \cap [F \cup b\}$，则存在 $t,s \in \mathbf{N}, n_1, \cdots, n_t, m_1, \cdots, m_s \geq 0$，和 $a_1, \cdots, a_t, b_1, \cdots, b_s \in F$，使得 $(a_1 * a^{n_1}) * \cdots * (a_t * a^{n_t}) \leq x, (b_1 * b^{m_1}) * \cdots * (b_s * a^{m_s}) \leq x$. 令 $p = a_1 * \cdots * a_t * b_1 * \cdots * b_s$，$l = \max\{n_1, \cdots, n_t, m_1, \cdots, m_s\}$，则由 F 为滤子知 $p \in F$，且由(P_8)得 $(p * a^l)^t \leq x, (p * b^l)^s \leq x$. 于是由($P_{22}$)得 $x \geq (p * a^l)^t \vee (p * b^l)^s \geq ((p * a^l)^t \vee (p * b^l))^s \geq ((p * a^l) \vee (p * b^l))^{ts} = (p * (a^l \vee b^l))^{ts} \geq (p * (a \vee b)^{l^2})^{ts}$，所以 $x \in [F \cup \{a \vee b\})$，从而 $[F \cup \{a\}) \cap [F \cup \{b\}) \subseteq [F \cup \{a \vee b\})$.

反之，设 $x \in [F \cup \{a \vee b\})$，由推论 5 知 $\exists k \in \mathbf{N}, n_1, \cdots, n_k \geq 0$，和 $a_1, \cdots, a_k \in F$，使得 $(a_1 * (a \vee b)^{n_1}) * \cdots * (a_k * (a \vee b)^{n_k}) \leq x$. 利用 ($P_8$) 得 $x \geq (a_1 * a^{n_1}) * \cdots * (a_k * a^{n_k})$，且 $x \geq (a_1 * b^{n_1} * \cdots * (a_k * b^{n_k})$，故 $x \in [F \cup \{a\})$，且 $x \in [F \cup \{b\})$，从而 $[F \cup \{a \vee b) \subseteq [F \cup \{a\}) \cap [F \cup \{b\})$.

得证 $[F \cup \{a\} \cap [F \cup \{b\}) = [F \cup \{a \vee b\})$.

推论 6　设 F 是 M 的滤子，$a, b \in M$，若 $a \vee b \in F$，则 $[F \cup \{a\}) \cap [F \cup \{b\}) = F$.

推论 7　设 $a, b \in M$，则 $[a) \cap [b) = [a \vee b)$.

参 考 文 献

[1] Chang C C. Algebraic analysis of many valued logic[J]. Trans Amer Math Soc, 1958, 88: 467-490.

[2] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2006.

[3] 吴洪博. 基础 R_0 代数与基础 $\mathscr{L}^*$ 系统[J]. 数学进展，2003，32(5)：565-576.

[4] 张小红. 基于 T-模与伪 T-模的逻辑系统及其代数分析[D]. 西安：西北工业大学，2005.

[5] 张小红. 非可换模糊逻辑系统 P^* 及其完备性[J]. 数学学报，2007，50(2)：421-442.

[6] 王霞霞，吴洪博. *BL*-代数的余零化算子及其 *BL* 同态像[J]. 吉林大学学报(理学版)，2014，52(6)：1112-1118.

[7] 汪　宁，吴洪博. $SWBR_0$- 代数的蕴涵理想及其诱导的商代数[J]. 吉林大学学报(理学版)，2013，51(1)：21-26.

[8] 高李红，吴洪博. *QBL*-代数及其余 BL 代数的等价性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2011，49(1)：41-46.

[9] 汪　宁，吴洪博. 基于 MBR_0 代数的 MTL_0 代数的表现形式[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(12)：48-52.

[10] 周建仁，吴洪博. R_0 蕴涵算子所导出的逻辑函数的特征[J]. 数学学报(中文版)，2014，57(2)：235-248.

[11] 吴洪博，谢晶晶. 一种度量结构在四种逻辑代数上的共性[J]. 模糊系统与数学，2014，28(2)：104-110.

[12] 郑崇友，樊　磊，崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 北京：首都师范大学出版社，2000.

Properties of PBR_0- Algebras and Its Filters

GONG Jiaan[1,2], WU Hongbo[1]

((1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China; 2. Shangluo Vocational and Technical Instituion, Shangluo 726000, China)

Abstract: Based on the BR_0- Algebra, the concept of PBR_0- Algebra has been given, and some properties are discussed. The equivalence of the PBR_0- Algebra is obtained. Then the properties of the filter and generated filter of PBR_0- Algebra are discussed.

Keywords: logical Algebras; BR_0- Algebras; PBR_0- Algebras; filter; generated filter