第 48 卷　第 1 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol.48　No.1
2020 年 1 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Jan. 2020

文章编号:1000-2367(2020)01-0001-04　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.01.001

非线性发展方程的初值随机化问题研究

黄建华[1],闫威[2]

(1.国防科技大学 文理学院,长沙 410073;2.河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:主要介绍一些非线性发展方程的初值随机化问题.首先给出了薛定谔方程的初值随机化问题,KdV 方程的初值随机化问题,波动方程的初值随机化问题;接着,给出了初值随机化所用到的调和分析工具;最后,提出了一些非线性发展方程在初值随机化方面未解决的问题.

关键词:初值随机化;非线性发展方程;调和分析

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A

1　主要进展

初值随机化,顾名思义就是对初值进行随机.初值随机化最早是由文献[1]研究薛定谔方程 $iu_t+\Delta u=|u|^{p-1}u$ 的统计力学性质而提出来的,其中 u 是复值函数.主要工具是带权重的高斯测度-Gibbs 测度.后来,文献[1-2]利用傅里叶限制范数方法、双线性估计和初值随机化以及 Gibbs 测度研究 KdV 方程 $u_t+u_{xxx}+uu_x=0$. 和薛定谔方程的几乎整体适定性和不变测度.后来文献[3-4]利用高斯级数的一些性质来研究当空间是紧流形时超临界波动方程 $u_{tt}+\Delta u=|u|^{p-1}u$ 的适定性问题.具体是在确定初值情况下,波动方程的柯西问题是不适定的,然而在对初值进行随机化下,在除去一个测度非常小的样本空间,仍然能够建立适定性.

具体会用到下面两个关键引理.

引理 1　设 $(l_n(w))_{n=1}^{\infty}$ 是一列实的期望为零的独立的随机变量,假设$(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\exists c>0,\forall\gamma\in R$, $\forall n\geq 1,\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{\gamma x}d\mu_n(x)\right|\leq e^{c\gamma^2}$.则存在 $\alpha>0,\lambda>0,(c_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$ 使得 $P\left(\omega:\left|\sum_{n=1}^{\infty}c_nl_n(w)\right|>\lambda\right)\leq 2e^{-\frac{\alpha\lambda^2}{\sum_n c_n^2}}$,因此对于 $p\geq 2$ 有下面不等式成立 $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}c_nl_n(w)\right\|_{L^p}\leq C\sqrt{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

这个引理对于初值随机化柯西问题的研究非常重要.它的本质体现了概率的作用.如果定义映射 $T:l^2\to L^p$,则意味着将 l^2 随机化之后变成 L^p 可积性变好了.进一步有引理 2.

引理 2　设 $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立的期望为零的复值随机变量满足$\int_{\Omega}|h_n(\omega)|^{2k}dp(\omega)\leq c(\forall n\geq 1)$,则 $\forall 2\leq p\leq 2k,\exists c>0,\forall(c_n)_{n\in N^*}\in l^2(N^*,C),\left\|\sum_n c_nh_n\right\|_{L^p}\leq C\left(\sum_n c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

利用上面这两个引理,将时间空间的联合估计变好了,从而在除去一个测度很小的样本空间,可以将确定情况下不适定的柯西问题经过初值随机化之后变成适定.具体结果如下.

收稿日期:2019-10-15;**修回日期**:2019-12-16.

基金项目:国家自然科学基金(11771449)

作者简介:黄建华(1968-),男,湖北随州人,国防科技大学教授,主要从事非自治与随机动力系统的研究,E-mail:jhhuang32@nudt.edu.cn.

通信作者:闫威(1982-),男,河南周口人,河南师范大学特聘教授,博士生导师,主要从事偏微分方程的研究,E-mail:yanwei19821115@sina.cn.

定理 1 设 ∂M 为空集,$s \geq \frac{1}{4}$ 且 $f_1 \in H^s(M)$,$f_2 \in H^{s-1}(M)$.$f_1^\omega \in H^s(M)$,$f_2^\omega \in H^{s-1}(M)$ 是相联系的随机函数.则存在 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 使得对几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 存在 $T_\omega > 0$ 和一个唯一的解,初值连续嵌入在 $X_\omega = \left(\cos(t-\sqrt{-\Delta})f_1^\omega + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f_2^\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C([-T_\omega, T_\omega]; H^\sigma(M))$.较为确切地,存在 $C>0$,$\delta \geq 0$,$1 < T \leq 1$,Ω_T,使得 $P(\Omega_T) \geq 1 - CT^{1+\delta}$.对每一个 $\omega \in \Omega_T$,则存在唯一的解并且初值连续嵌入在 $C([-T,T]; H^s(M))$.进一步,如果随机变量是标准的高斯的,则

$$P(\Omega_T) \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\frac{c}{T^\delta}}, c, \delta > 0.$$

定理 2 设 ∂M 为非空,$s \geq \frac{8}{21}$ 且 $\exists C > 0$:$n \geq 1$,$\int_\Omega (|h_n(\omega)|^6 + |l_n(\omega)|^6)\mathrm{d}p(\omega) < C$.且 $f_1 \in H^s(M)$,$f_2 \in H^{s-1}(M)$.$f_1^\omega \in H^s(M)$,$f_2^\omega \in H^{s-1}(M)$ 是相联系的随机函数.则存在 $\sigma \geq \frac{2}{3}$ 使得对几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 存在 $T_\omega > 0$ 和一个唯一的解,初值连续嵌入在 $X_\omega = \left(\cos(t\sqrt{-\Delta})f_1^\omega + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f_2^\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C([-T_\omega, T_\omega]; H^\sigma(M))$.较为确切地,存在 $C > 0$,$\delta \geq 0$,$0 < T \leq 1$,Ω_T 使得 $P(\Omega_T) \geq 1 - CT^{1+\delta}$ 对每一个 $\omega \in \Omega_T$,则存在唯一的解并且初值连续嵌入在 $C([-T,T]; H^s(M))$.进一步,如果随机变量是标准的高斯的,则

$$P(\Omega_T) \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\frac{c}{T^\delta}}, c, \delta > 0.$$

事实上,从这两个定理可知:非线性波动方程的解有线性和非线性组成.线性部分的正则性比非线性的正则性低.因此这和确定的情况是不一样的.换句话说,将不好的情况都转移到随机化的初值上去.文献[5]研究了当空间是紧流形时超临界波动方程 $u_{tt} + \Delta u = u^5$ 的初值随机化的适定性问题.并且推广了 Burq,Tzvetkov 的概率 Strichartz 估计.主要结果如下.

定理 3 设 ∂M 为空集,$s \geq \frac{1}{6}$ 且 $f_1 \in H^s(M)$,$f_2 \in H^{s-1}(M)$.$f_1^\omega \in H^s(M)$,$f_2^\omega \in H^{s-1}(M)$ 是相联系的随机函数.则存在 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 使得对几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 存在 $T_\omega > 0$ 和一个唯一的解,初值连续嵌入在 $X_\omega = \left(\cos(t-\sqrt{-\Delta})f_1^\omega + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f_2^\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C([-T_\omega, T_\omega]; H^\sigma(M))$.较为确切地,存在 $C>0$,$\delta \geq 0$,$0 < T \leq 1$,Ω_T 使得 $P(\Omega_T) \geq 1 - CT^{1+\delta_1}$ 对每一个 $\omega \in \Omega_T$,则存在唯一的解并且初值连续嵌入在 $C([-T,T]; H^s(M))$.进一步,如果随机变量是标准的高斯的,则

$$P(\Omega_T) \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\frac{c}{T^{\delta_1}}}, c, \delta > 0.$$

定理 4 设 ∂M 为非空,$s \geq \frac{23}{90}$,且 $\exists C > 0$:$n \geq 1$,$\int_\Omega (|h_n(\omega)|^6 + |l_n(\omega)|^6)\mathrm{d}p(\omega) < C$.且 $f_1 \in H^s(M)$,$f_2 \in H^{s-1}(M)$.$f_1^\omega \in H^s(M)$,$f_2^\omega \in H^{s-1}(M)$ 是相联系的随机函数.则存在 $\sigma \geq \frac{2}{3}$ 使得对几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 存在 $T_\omega > 0$ 和一个唯一的解,初值连续嵌入在 $X_\omega = \left(\cos(t\sqrt{-\Delta})f_1^\omega + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f_2^\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C([-T_\omega, T_\omega]; H^\sigma(M))$.较为确切地,存在 $C > 0$,$\delta_2 \geq 0$,$0 < T \leq 1$,Ω_T 使得 $P(\Omega_T) \geq 1 - CT^{1+\delta_2}$ 对每一个 $\omega \in \Omega_T$,则存在唯一的解并且初值连续嵌入在 $C([-T,T]; H^s(M))$.进一步,如果随机变量是标准的高斯的,则

$$P(\Omega_T) \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\frac{c}{T^{\delta_2}}}, c, \delta > 0.$$

最初，一些学者只在紧流形上考虑随机化，因为紧流形有很好的结构，确切的是紧流形上具有标准正交基，因此相应的紧流形上的 Sobolev 空间具有非常好的定义.随后，初值随机化被越来越多的学者所关注.初值随机化被用到 KdV 类型方程和流体方程等，例如文献[6－25].初值随机化与随机偏微分方程的区别在于初值随机化对方程的适定性问题起好的作用，而随机偏微分方程中噪声不一定起好的作用.因为噪声是加在方程的后面，这样有可能破坏方程的结构等.

维纳随机化在非紧流形下是非常有用的.后来一些学者在非紧流形上进行考虑，并且进行随机化.如何进行随机是一件非常重要的事情.事实上，对初值的维纳随机化.下面给出维纳随机化的具体定义.设 $\psi \in C_c^{\infty}(R^4)$ 是偶的非负缓冲函数，并且 $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq B(0,1)$ 和 $\sum_{k\in Z^4}\psi(\xi-k)=1, \xi \in R^4$.设 $s \in R, f \in H^s(R^4)$，对 $k \in Z^4$ 定义函数 $P_k f: R^4 \to C$ 如下 $(P_k f)(x)=F^{-1}(\psi(\xi-k)Ff(\xi))(x)$.对于 $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty, k \in Z^4$，有单位范围的 Bernstein 不等式 $\| P_k f \|_{L^{r_2}} \leq C \| P_k f \|_{r_1}$.设 $(g_k)_{k\in Z^4}$ 是定义在概率空间 (Ω, A, P) 一列期望为零，复值高斯随机变量，给定一个复值函数 $f \in H^s(R^4)$，定义 $f^{\omega}=\sum_{k\in Z^4} g_k(\omega) P_k f$.

2　所用工具

初值随机对于初值随机化来说，常用的工具是调和分析、算子半群、Sobolev 空间以及偏微分方程理论等.具体说来经常用到的工具是 Strichartz 估计、各种各样的函数分解、对偶思想和 TT^* 思想等.对于初值随机化来说，除了注意随机因素带来的有利条件，要想得到确定方程得不到的结果，必须注意三点.第一，是对确定方程的结构有很好地理解和掌握；第二，选择合适的函数空间；第三，必须建立一些新的有用的时间和空间联合估计.

3　未解决问题

初值随机化是比较有意思的一个方向.很多研究者对径向初值进行随机，用来研究非线性色散波方程在临界指标之下的适定性和散射性，例如文献[4－6].能不能用初值随机化来研究非线性色散波方程的爆破性和稳定性等其他方向仍然未可知.

对薛定谔方程和波动方程的研究主要限制在散焦情况，散焦情况能量恒正.然而聚焦情况，能量符号不确定，因此结构更加复杂，目前还没有学者研究聚焦情况的薛定谔方程和波动方程的初值随机化.国内一些学者也先后对流体力学的初值随机化以及薛定谔方程的初值随机化做出一些深刻的研究.

本文认为还有一些有意思的问题需要探讨.第一，Benjamin-Ono 方程的初值随机化问题；第二，一维、二维薛定谔方程的初值随机化问题；第三，薛定谔映射和波映射的初值随机化问题；第四，Yang-Mills 方程的初值随机化问题；第五，Maxwell-Klein-Gordon equation 的初值随机化问题；第六，Chern-Simons-Schrödinger 的初值随机化问题.

参　考　文　献

[1]　BOUARD de, DEBUSSCHE A, TSUTSUMI Y. White noise driven Korteweg-de Vries equation[J]. J Funct Anal, 1999, 169: 532-558.

[2]　BOURGAIN J. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures[J]. Comm Math Phys, 1994, 166: 1-26.

[3]　BURQ N, TZVETKOV N. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations, II. A global existence result[J]. Invent Math, 2008, 173: 477-496.

[4]　BURQ N, TZVETKOV N. Random data Cauchy theory forsupercritical wave equations I. Local theory[J]. Invent Math, 2008, 173: 449-475.

[5]　DUAN J, HUANG J, LI Y, et al. Random data Cauchy problem for the wave equation on compact manifold[EB/OL]. [2019-09-20]. https://arxiv.org/abs/1708.00773.

[6]　BOURGAIN J. On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system[J]. Duke Math J, 1994, 76: 175-202.

[7]　BOURGAIN J, BULUT A. Almost sure global well posedness for the radial nonlinear Schrdinger equation on the unit ball I: the 2D case[J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2014, 31: 1267-1288.

[8] BOURGAIN J,BULUT A.Almost sure global well-posedness for the radial nonlinear Schrdinger equation on the unit ball II:the 3d case[J].J Eur Math Soc,2014,16:1289-1325.

[9] BOURGAIN J,BULUT A.Invariant Gibbs measure evolution for the radial nonlinear wave equation on the 3d ball[J].J Funct Anal,2014,266:2319-2340.

[10] CHEN Y,GAO H,GUO B.Well-posedness for stochastic Camassa-Holm equation[J].J Differential Equations,2012,253:2353-2379.

[11] DENG C,CUI S.Random-data Cauchy problem for the Navier-Stokes equations on[J].J Differential Equations,2011,251:902-917.

[12] DODSON B,LüHRMANN J,MENDELSON D.Almost sure local well-posedness and scattering for the 4D cubic nonlinear Schrdinger equation[J].Adv Math,2019,347:619-676.

[13] Du L,Zhang T.Almost sure existence of global weak solutions for incompressible MHD equations in negative-order Sobolev space[J].J Differential Equations,2017,263:1611-1642.

[14] HWANG G.Probabilistic well-posedness of the mass-critical NLS with radial data below[J].J Math Anal Appl,2019,475:1842-1854.

[15] HWANG G.KWAK C.Probabilistic well-posedness of generalized KdV[J].Proc Amer Math Soc,2018,146:267-280.

[16] HWANG G.Almost sure well-posedness of fractional Schrdinger equations with Hartree nonlinearity[J].Publ Res Inst Math Sci,2018,54:1-44.

[17] LüHRMANN J,MENDELSON D.Random data Cauchy theory for nonlinear wave equations of power-type on R^3[J].Comm Partial Differential Equations,2014,39:2262-2283.

[18] NAHMOD A,PavlovicN,STAFFILANI G.Almost sure existence of global weak solutions for supercritical Navier-Stokes equations[J].SIAM J Math Anal,2013,45:3431-3452.

[19] OH T,POCOVNICU O.A remark on almost sure global well-posedness of the energy-critical defocusing nonlinear wave equations in the periodic setting[J].Tohoku Math J,2017,89:455-481.

[20] POCOVNICU O.Almost sure global well-posedness for the energy-critical defocusing nonlinear wave equation on,d=4 and 5[J].Mathematics,2017,19:2521-2575.

[21] SUN C,XIA B.Probabilistic well-posedness for supercritical wave equations with periodic boundary condition on dimension three[J].Illinois J Math,2016,60:481-503.

[22] THOMANN L.Random data Cauchy problem for supercritical Schrdinger equations[J].Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire,2009,26:2385-2402.

[23] WANG J,WANG K.Almost sure existence of global weak solutions to the 3D incompressible Navier-Stokes equation[J].Discrete Contin Dyn Syst,2017,37:5003-5019.

[24] ZHANG T,FANG D.Random data Cauchy theory for the generalized incompressible Navier-Stokes equations[J].J Math Fluid Mech,2012,2:311-324.

[25] ZHANG T,FANG D.Random data Cauchy theory for the incompressible three dimensional Navier-Stokes equations[J].Proc Amer Math Soc,2011,139:2827-2837.

Initial value randomization of nonlinear evolution equations

Huang Jianhua[1],Yan Wei[2]

(1.College of Science,National University of Defense Technology,Changsha 410073,China;

2.College of Mathematics and Information Science,Henan Normal Univerity,Xinxiang 453007,China)

Abstract:This paper aims to introduce some nonlinear evolution equations.Firstly,we presents Schrodinger equtaions with random data,KdV equation with random data,wave equation with random data.Then this paper gives the harmonic analysis tools which are used to solve random data problem.At last,some unsolved problems related to random data were presented.

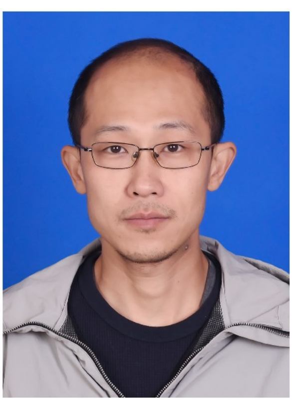
Keywords:initial value randomization;nonlinear evolution equations;harmonic analysis

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

黄建华，国防科技大学文理学院数学系教授，博士，博士生导师，分别于 1996 年 6 月和 2002 年 6 月在华中师范大学获得硕士学位和博士学位，后在湖南大学数学博士后站做博士后，曾在加拿大 Dalhousis 大学，Memorial 大学，York 大学，美国 Auburn 大学，西班牙 Sevella 大学做访问学者.主要从事随机动力系统动力学及非线性系统的行波解研究，先后主持 3 项国家自然科学基金面上项目研究，出版教材和著作 6 部，在 *JDE*，*DCDS*，*SIADS*，*Chaos* 及《中国科学》等杂志上发表论文多篇，先后获得湖南省自然科学二等奖和国家教学成果二等奖.

闫威，河南师范大学特聘教授，博士，博士生导师，河南省高等学校青年骨干教师.主要从事偏微分方程、调和分析、初值随机化以及随机偏微分方程的研究.研究的方程涉及到 KdV 型方程、Schrödinger 型方程和波动方程以及流体力学方程等.研究内容包括解的存在性、唯一性、爆破性和散射性等.先后在 *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*，*Advances in Differential Equations*，*Journal of Differential Equtaions* 等国际期刊发表论文 30 余篇.受国家留学基金委资助，于 2016.9—2017.9 访问美国伊利诺伊理工大学.



常钦，河南师范大学教授，博士，博士生导师，全国优秀博士学位论文奖获得者，全国优秀教师，中国物理学会高能物理分会常务委员.2010 年，毕业于河南师范大学物理学院；2010.12—2013.05，在华中师范大学粒子所从事博士后研究；2016.07—2017.07，在美国斯坦福大学 SLAC 国家实验室，从事访问学者研究.主要从事高能物理、粒子物理理论研究，具体方向包括：重味物理、新物理、光前量子化等.主持国家自然科学基金 4 项、省部级科研项目 7 项，发表 SCI 学术论文 70 余篇，曾获河南省青年科技奖、河南省五四青年奖章、河南省优秀硕士学位论文指导教师等奖项.