第 43 卷　第 5 期　河南师范大学学报(自然科学版)　Vol. 43　No. 5
2015 年 9 月　Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)　Sept. 2015

文章编号:1000－2367(2015)05－0012－06　**DOI:**10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.05.003

可压缩的磁流体方程组的解的整体存在性

孔春香

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要:在初始值不要求小的情况下,建立了带有真空的一维可压缩的磁流体方程组的古典解的整体存在性,利用 Cauchy 不等式、Gronwall 不等式、嵌入定理等方法得到了整体解在 H^4 空间中的有界性.

关键词:磁流体;整体解;无电阻尼系数;真空

中图分类号:O175.2　**文献标志码:**A

磁流体力学主要考虑导电流体的一种运动,磁场能够感应出电流,在电磁场领域有很大的作用.所研究的一维可压缩的无电阻尼系数的磁流体力学方程组如下

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1}$$

$$(\rho u)_t + \left(\rho u^2 + P(\rho) + \frac{1}{2}b^2\right)_x = \mu u_{xx}, \tag{2}$$

$$b_t + (bu)_x = 0, \tag{3}$$

这里 $\rho, u, P(\rho), b$ 分别表示密度,速度,压力和磁力,常数 μ 时为正黏性系数.仅考虑等熵的磁流体力学方程组,即流体的状态方程形式为

$$P(\rho) = K\rho^\gamma, \gamma > 1, K > 0. \tag{4}$$

很多学者对解的存在性做了大量的研究:对电阻尼系数不为零,等熵的可压缩流体来说,文献[1－2]建立在 $H^i(i=1,2,4)$ 一维可压缩的磁流体方程解的存在性和指数稳定性.文献[3]证明了当切变黏度趋近零时,整体弱解收敛到本方程的一个解.文献[4]考虑了可压缩的磁流体解的整体存在性和收敛率.在电阻尼系数为零,初始真空存在的情况下,文献[5]建立了具有初始边界值的可压缩磁流体的古典解的整体存在性和唯一性.文献[6]得到了初始边界值问题光滑解的整体存在性.当 $b=0$ 时磁流体方程就变成了黏性流体方程,文献[7]得到了具有大初始值和真空条件下的唯一的整体解,文献[8]证明了弱解的存在性和大时间性.对于液晶流体方程,许多作者也获得了解的存在性,譬如在文献[9]中证明了不可压缩的向列型液晶流体方程弱解的存在性,文献[10－11]研究了可压缩的液晶流体方程整体弱解的存在性和收敛性问题.对于三维的情形,文献[12]研究了具有库伦外力的可压缩的磁流体方程柯西问题解的大时间性质.文献[13]考虑了在没有热传导,初始值很小的情况下获得了可压缩的磁流体方程的整体解和最佳的收敛率.文献[14]在小的光滑的初始值条件下获得了三维的不可压缩的磁流体方程解的整体适定性.

本文主要目的是建立系统(1)～(3)的解的整体存在性,在初始条件下:

$$(\rho, u, b)(x, 0) = (\rho_0, u_0, b_0)(x), x \in [0, 1], \tag{5}$$

边界条件为:

$$u\Big|_{x=0,1} = 0, t \geq 0. \tag{6}$$

进一步假设有

收稿日期:2014-11-04;**修回日期:**2015-07-19.

基金项目:陕西省自然科学基础研究计划项目(2012JM1012);陕西省教育厅 2014 科学研究专项项目(2014JK1841).

作者简介(通信作者):孔春香(1980－),女,河南兰考人,延安大学讲师,研究方向为偏微分方程,E-mail:chunxiang1980@163.com.

$$0 \le \underline{s_0} \le \frac{b_0(x)}{\rho_0(x)} \le \overline{s_0} < \infty. \tag{7}$$

令函数 $g \in H_0^1$，假设初始值满足下面的相容性条件：

$$\mu u_{0xx}(x) - \left(P(\rho_0) + \frac{1}{2}b_0^2\right)_x(x) = \rho_0(x)g(x), x \in [0,1]. \tag{8}$$

引入记号：$Q_T = [0,1]\times[0,T], T > 0, L^P = L^P([0,1]), H^k = W^{k,2}([0,1])$，常数 C 仅依赖初始值和 T，结论如下.

定理 1　假设初始值 (ρ_0, u_0, b_0) 满足 $\rho_0 \ge 0, (\rho_0, u_0, b_0) \in H^4$，则对任意 $T > 0$，初始边界值问题存在唯一的整体古典解满足：

$$\|\rho(t)\|_{H^4}^2 + \|u(t)\|_{H^4}^2 + \|b(t)\|_{H^4}^2 + \|u_{tt}(t)\|^2 + \|b_{tt}(t)\|^2 + \|b_t(t)\|_{H^2}^2 + \|u_t(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^T (\|\rho\|_{H^4}^2 + \|u\|_{H^5}^2 + \|b\|_{H^5}^2 + \|u_{tt}\|_{H^1}^2 + \|b_{tt}\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{H^3}^2 + \|b_t\|_{H^3}^2)(s)\mathrm{d}s \le C(T). \tag{9}$$

1　定理 1 的证明

在这一节需要完成问题(1) ～ (6) 的解在 H^4 空间的整体存在性，需要下面的引理.

引理 1　在定理 1 的假设下，下面一些估计成立：

$$\frac{\delta}{C(T)} \le \rho(y,s) \le C(T), \underline{s_0}\frac{\delta}{C(T)} \le b(y,s) \le C(T), (y,s) \in Q_T,$$

$$(\rho,\rho^\gamma) \in C([0,T];H^2), (\rho_t,(\rho^\gamma)_t) \in C([0,T];H^1), u_{tt} \in L^2([0,T];L^2),$$

$$(b,b^2) \in C([0,T];H^2), (b_t,(b^2)_t) \in C([0,T];H^1), (\rho_{tt},b_{tt}) \in C([0,T];L^2),$$

$$(\rho u)_t \in C([0,T];H^1), u \in C([0,T];H^3 \cap H_0^1), u_t \in L^\infty([0,T];H_0^1) \cap L^2([0,T];H^2),$$

$$((\rho^\gamma)_{tt},(b^2)_{tt}) \in L^\infty([0,T];L^2), \|u_x\|_{L^\infty} \le C(T).$$

证明　见参考文献[5].

引理 2 在定理 1 的假设下，对任意的 $0 \le t \le T$，有下列估计式成立

$$\int_0^1 \rho_{xxx}^2 + \rho_{xxt}^2 + (\rho^\gamma)_{xxx}^2 + |(\rho^\gamma)_{xxt}|^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_0^1 \rho_{ttx}^2 + |(\rho^\gamma)_{ttx}|^2 + \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C(T). \tag{10}$$

$$\int_0^1 b_{xxx}^2 + b_{xxt}^2\,\mathrm{d}x + (b^2)_{xxx}^2 + |(b^2)_{xxt}|^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_0^1 b_{ttx}^2 + |(b^2)_{ttx}|^2 + b_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C(T). \tag{11}$$

$$\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C(T). \tag{12}$$

证明　一方面由(1) 式关于 x 求导三次得

$$\rho_{xxxt} = -\rho_{xxxx}u - 4\rho_{xxx}u_x - 6\rho_{xx}u_{xx} - 4\rho_x u_{xxx} - \rho u_{xxxx}. \tag{13}$$

上式乘以 ρ_{xxx}，在[0,1] 上积分得并分部积分，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}\int_0^1 \rho_{xxx}^2 u_x\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \rho_x\rho_{xxx}u_{xxx}\mathrm{d}x - \int_0^1 \rho\rho_{xxx}u_{xxxx}\mathrm{d}x - 6\int_0^1 \rho_{xx}\rho_{xxx}u_{xx}\mathrm{d}x \le$$

$$C(T)\|u_x\|_{L^\infty}\int_0^1 \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x + 4\|\rho_x\|_{L^\infty}\|\rho_{xxx}\|_{L^2}\|u_{xxx}\|_{L^2} +$$

$$\|\rho\|_{L^\infty}\|\rho_{xxx}\|_{L^2}\|u_{xxxx}\|_{L^2} + \|\rho_{xx}\|_{L^2}\|\rho_{xxx}\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}.$$

利用 Sobolev 嵌入定理和 Cauchy 不等式、引理 1，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x \le C(T)\int_0^1 \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x + C(T)(1 + \|\rho_{xx}\|_{L^2})\|\rho_{xxx}\|_{L^2} + C(T)\|\rho_{xxx}\|_{L^2}\|u_{xxxx}\|_{L^2} \le$$

$$C(T)\int_0^1 \rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x + C(T)\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x + C(T). \tag{14}$$

另一方面(1) 式乘以 $\gamma\rho^{\gamma-1}$，得到

$$(\rho^\gamma)_t + (\rho^\gamma)_x u + \gamma\rho^\gamma u_x = 0. \tag{15}$$

因此又可以得到

$$(\rho^\gamma)_{xxxt}+(\rho^\gamma)_{xxxx}u+(\gamma+3)(\rho^\gamma)_{xxx}u_x+3(\gamma+1)(\rho^\gamma)_{xx}u_{xx}+(3\gamma+1)(\rho^\gamma)_x u_{xxx}+\gamma\rho^\gamma u_{xxxx}=0. \quad (16)$$

与(14)类似的方法,同样推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T). \quad (17)$$

联立(14)和(17)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_{xxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1\rho_{xxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T). \quad (18)$$

同理得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 b_{xxx}^2+(b^2)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1 b_{xxx}^2+(b^2)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T). \quad (19)$$

再由(2)式关于 x 求二次导,得

$$\mu u_{xxxx}=\rho_{xx}u_t+2\rho_x u_{tx}+\rho u_{xxt}+\rho_{xx}uu_x+2\rho_x uu_{xx}+2\rho_x u_x^2+3\rho u_x u_{xx}+\rho uu_{xxx}+k(\rho^\gamma)_{xxx}+\frac{1}{2}(b^2)_{xxx}. \quad (20)$$

由(20)式,引理1、嵌入定理、Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)+C(T)\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxx}^2+(b^2)_{xxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxt}^2\,\mathrm{d}x. \quad (21)$$

(18)、(19)、(21)三式联立,利用 Gronwall 不等式和引理1得$\int_0^1\rho_{xxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxx}^2+b_{xxx}^2+(b^2)_{xxx}^2\,dx\le C(T)$.
从上式可以得到$\int_0^T\int_0^1\rho_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T)$.

同理

$$\int_0^1\rho_{xxt}^2\,\mathrm{d}x+|\,(\rho^\gamma)_{xxt}\,|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1\rho_{ttx}^2+|\,(\rho^\gamma)_{ttx}\,|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T),$$

$$\int_0^1 b_{xxt}^2\,\mathrm{d}x+|\,(b^2)_{xxt}\,|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1 b_{ttx}^2+|\,(b^2)_{ttx}\,|^2+b_{xxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T).$$

由(21)式,引理1得 $\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1 u_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T)$.

引理3 在定理1的条件下,对任意的 $0\le t\le T$,有下列估计式成立

$$\|u_{tx}(x,0)\|+\|u_{tt}(x,0)\|+\|u_{txx}(x,0)\|+\|b_{tt}(x,0)\|+\|b_{txx}(x,0)\|\le C(T). \quad (22)$$

证明 从(2)式和引理1中可以得到

$$\|u_t\|\le C(T)(\|\rho_x\|+\|\rho_t\|_{H^1}+\|u_x\|_{H^1}+\|b_x\|_{H^1}). \quad (23)$$

由(2)式关于 x 求导得

$$\|u_{tx}\|\le C(T)(\|\rho_x\|_{H^1}+\|\rho_t\|_{H^1}+\|u_x\|_{H^2}+\|b_x\|_{H^1}), \quad (24)$$

或

$$\|u_{xxx}\|\le C(T)(\|\rho_x\|_{H^1}+\|\rho_t\|_{H^1}+\|u_x\|_{H^1}+\|b_x\|_{H^1}+\|u_{tx}\|). \quad (25)$$

(2)式关于 x 求二次导数,利用嵌入定理和引理1得

$$\|u_{txx}\|\le C(T)(\|\rho_x\|_{H^2}+\|\rho_t\|_{H^2}+\|u_x\|_{H^3}+\|b_x\|_{H^2}), \quad (26)$$

或

$$\|u_{xxxx}\|\le C(T)(\|\rho_x\|_{H^2}+\|\rho_t\|_{H^2}+\|u_x\|_{H^2}+\|b_x\|_{H^2}+\|u_{txx}\|). \quad (27)$$

由(2)式关于 t 得

$$\|u_{tt}\|\le C(T)(\|\rho_x\|+\|\rho_t\|_{H^1}+\|u_x\|_{H^1}+\|u_{txx}\|+\|u_{tx}\|+\|b_t\|_{H^1}). \quad (28)$$

(28)式联立(24)、(26)式、引理1得

$$\|u_{tt}\|\le C(T)(\|\rho_x\|_{H^2}+\|u_x\|_{H^3}+\|b_t\|_{H^1}+\|b_x\|_{H^2}+\|\rho_t\|_{H^2}). \quad (29)$$

由(24)、(26)、(29)式,在定理1的假设下,引理1、引理2,得到 $\|u_{tx}(x,0)\|+\|u_{tt}(x,0)\|+\|u_{txx}(x,0)\|\le C(T)$.

相似地由(3)式可以得到 $\|b_t\|\le C(T)(\|b_x\|+\|u_x\|)$、(3)式两边关于 x 求导,利用 Cauchy 不等

式得 $\| b_{tx} \| \leq C(T)(\| b_x \|_{H^1} + \| u_x \|_{H^1})$，(3) 式两边关于 t 求导，利用 Cauchy 不等式得 $\| b_{tt} \| \leq C(T)(\| b_{tx} \| + \| b_x \| + \| b_t \|) \leq C(T)(\| b_x \|_{H^1} + \| u_x \|_{H^1})$，(3) 式两边关于 x 求两次导，利用 Cauchy 不等式得 $\| b_{txx} \| \leq C(T)(\| b_x \|_{H^2} + \| u_x \|_{H^2})$. 从而得到 $\| b_{tt}(x,0) \| + \| b_{txx}(x,0) \| \leq C(T)$. 由(25)式和引理1得推论1.

推论1　$\int_0^1 u_{xxx}^2 \, \mathrm{d}x \leq C(T)$.

引理4　在定理1的假设下，对任意的 $0 \leq t \leq T$，有下列估计式成立

$$\| u_{tt} \|^2 + \int_0^T \| u_{ttx} \|^2 \mathrm{d}t \leq C(T), \tag{30}$$

$$\| b_{tt} \|^2 + \int_0^T \| b_{ttx} \|^2 \mathrm{d}t \leq C(T). \tag{31}$$

证明　(2) 式关于 t 求二次导数，可得到

$$\rho u_{ttt} + 2\rho_t u_{tt} + \rho_{tt} u_t + \rho_{tt} u u_x + 2\rho_t u_t u_x + 2\rho_t u u_{xt} + \rho u_{tt} u_x + 2\rho u_t u_{xt} + \rho u u_{xtt} + \left(k\rho^\gamma + \frac{1}{2}b^2\right)_{xtt} = \mu u_{xxtt}.$$

上式两端乘以 u_{tt}，在[0,1]上积分，并分部积分，利用(1)式、引理1、Cauchy不等式、嵌入定理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + \mu\int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x = -4\int_0^1 \rho u u_{tt} u_{ttx} \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(K\rho^\gamma + \frac{1}{2}b^2\right)_{tt} u_{ttx} \mathrm{d}x - \int_0^1 \rho u_{tt}^2 u_x \mathrm{d}x -$$

$$\int_0^1 \rho_{tt} u u_x u_{tt} \mathrm{d}x - 2\int_0^1 (\rho_t u_t u_x + \rho_t u u_{xt} + \rho u_t u_{xt}) u_{tt} \mathrm{d}x \leq C(\varepsilon, T)\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + \varepsilon \| u_x \|_{L^\infty}^2 \int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x +$$

$$\| u_x \|_{L^\infty} \int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\mu}{4}\int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x + C(T)\int_0^1 (\rho_{tt}^2 u^2 u_x^2 + \rho_t^2 u_t^2 u_x^2 + \rho_t^2 u^2 u_{xt}^2 + u_t^2 u_{xt}^2) \mathrm{d}x +$$

$$C\int_0^1 ((\rho^\gamma)_{tt}^2 + (b^2)_{tt}^2) \mathrm{d}x \leq \frac{\mu}{2}\int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x + C(T)(\| u_x \|_{L^\infty} + 1)\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x +$$

$$C(T) \| u_x \|_{L^\infty}^4 \int_0^1 \rho_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + C \| u_x \|_{L^\infty}^2 \sup_t \int_0^1 \rho_t^2 \, \mathrm{d}x \int_0^1 u_{tx}^2 \, \mathrm{d}x + C(T).$$

因此，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x \leq C(T)(\| u_{xx} \|_{L^\infty} + 1)\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + C(T)$. 上式在 $[0,t]$ 上积分得 $\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 u_{ttx}^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq C(T)\int_0^t (\| u_{xx} \|_{L^\infty} + 1)\int_0^1 \rho u_{tt}^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}s + C(T)$.

利用 Gronwall 不等式，引理1～引理3得到(30)式的估计.

同理(3)式两边关于 t 求二次导数，利用引理1～引理3得到(31)式.

引理5　在定理1的假设下，对任意的 $0 \leq t \leq T$，有下列估计式成立

$$\int_0^1 \rho u_{xxt}^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^T\int_0^1 u_{xxxt}^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C(T). \tag{32}$$

证明　由(1)式与(2)式得

$$\rho u_t + \rho u u_x + P_x + \left(\frac{1}{2}b^2\right)_x = \mu u_{xx}. \tag{33}$$

上式关于 t 求导得

$$\rho u_{tt} + \rho_t u_t + \rho_t u u_x + \rho u_t u_x + \rho u u_{xt} + P_{xt} + \frac{1}{2}(b^2)_{xt} = \mu u_{xxt}. \tag{34}$$

因此得到

$$\int_0^1 \rho u_{xxt}^2 \, \mathrm{d}x \leq C\left(\int_0^1 \rho^3 u_{tt}^2 + \rho\rho_t^2 u_t^2 + \rho\rho_t^2 u^2 u_x^2 + \rho^3 u_t^2 u_x^2 + \rho^3 u^2 u_{xt}^2\right) +$$

$$C\int_0^1 \rho \mid (\rho^\gamma)_{xt} \mid^2 + \rho \mid (b^2)_{xt} \mid^2 \leq C(T). \tag{35}$$

(34) 式关于 x,t 求导

$$\mu u_{xxxt} = 2(\sqrt{\rho})_x \sqrt{\rho} u_{tt} + \rho_{xt} u_t + \rho_t u_{tx} + \rho u_{ttx} + \rho_{xt} u u_x + \rho_x u_t u_x + \rho_x u u_{xt} + \rho_t u_x^2 +$$

$$2\rho u_x u_{xt} + \rho_t u u_{xx} + \rho u_t u_{xx} + \rho u u_{xxt} + K(\rho^\gamma)_{xxt} + \frac{1}{2}(b^2)_{xxt}. \tag{36}$$

利用引理 1 ～ 引理 5 得

$$\int_0^T\int_0^1 u_{xxxt}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C(T)+C(T)\int_0^t\int_0^1 u_{xxt}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\sup_t\int_0^1 |(\rho^\gamma)_{xxt}|^2+|(b^2)_{xxt}|^2\mathrm{d}x \le C(T). \tag{37}$$

联立(35)式与(37)式得(32)式.

引理 6 在定理 1 的条件下,对任意的 $0\le t\le T$,有下列估计式成立

$$\int_0^1 \rho_{xxxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxxx}^2+b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1 u_{xxxxx}^2+\rho_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le C(T)\ . \tag{38}$$

证明 (2)式关于 x 求导,两边同时乘以 ρ_{xxxx},在[0,1]上积分并分部积分得,利用 Cauchy 不等式,引理 1 ～ 引理 4 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x=-\frac{9}{2}\int_0^1\rho_{xxxx}^2\,u_x\mathrm{d}x-10\int_0^1\rho_{xxx}\rho_{xxxx}u_{xx}\,\mathrm{d}x-10\int_0^1\rho_{xx}\rho_{xxxx}u_{xxx}\,\mathrm{d}x-10\int_0^1\rho_x\rho_{xxxx}u_{xxxx}\,\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^1\rho\rho_{xxxx}u_{xxxxx}\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1\rho_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\ . \tag{39}$$

下面来估计 $\int_0^1 u_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x$.

$$\rho u_{xxxxx}=\rho_{xxx}u_t+3\rho_{xx}u_{tx}+3\rho_x u_{xxt}+\rho u_{xxxt}+\rho_{xxx}uu_x+3\rho_{xx}uu_{xx}+3\rho_{xx}u_x^2+9\rho_x u_x u_{xx}+$$
$$3\rho u_{xx}^2+4\rho u_x u_{xxx}+3\rho_x uu_{xxx}+\rho uu_{xxxx}+k(\rho^\gamma)_{xxxx}+\frac{1}{2}(b^2)_{xxxx},$$

所以有

$$\int_0^1 u_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)+C(T)\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxt}^2\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$

由(16)式关于 x 求导数得

$$(\rho^\gamma)_{xxxxt}+(\rho^\gamma)_{xxxxx}u+(\gamma+4)(\rho^\gamma)_{xxxx}u_x+2(2\gamma+3)(\rho^\gamma)_{xxx}u_{xx}+2(3\gamma+2)(\rho^\gamma)_{xx}u_{xxx}+$$
$$(4\gamma+1)(\rho^\gamma)_x u_{xxxx}+\gamma\rho^\gamma u_{xxxxx}=0. \tag{41}$$

(41)式两边乘以 $(\rho^\gamma)_{xxxx}$,并在[0,1]上积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T). \tag{42}$$

同理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C_4(T)\int_0^1 b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C_4(T)\int_0^1 u_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x+C_4(T). \tag{43}$$

联立(39)、(40)、(42)及(43)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_{xxxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxxx}^2+b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T)\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+$$
$$C(T)\int_0^1 b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x+C(T)\int_0^1 u_{xxxt}^2\,\mathrm{d}x+C(T).$$

由(37)式,Gronwall 不等式得

$$\int_0^1\rho_{xxxx}^2+(\rho^\gamma)_{xxxx}^2+b_{xxxx}^2+(b^2)_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\le C(T). \tag{44}$$

由(37)、(40)、(44)式得到 $\int_0^T\int_0^1 u_{xxxxx}^2+\rho_{xxxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T)$.

引理 7 在定理 1 的条件下,对任意的 $0\le t\le T$,有下列估计式成立

$$\int_0^T\int_0^1 b_{txx}^2+b_{txxx}^2+b_{xxxxx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T). \tag{45}$$

证明 (3)式关于 x 求二次导数得

$$b_{txx}+b_{xxx}u+3b_{xx}u_x+3b_x u_{xx}+bu_{xxx}=0. \tag{46}$$

利用 Young 不等式,引理 1 ～ 引理 6 得 $\int_0^T\int_0^1 b_{txx}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T)\left(\int_0^T\|b_x\|_{H^2}^2+\|u_x\|_{H^2}^2\,\mathrm{d}t\right)\le C(T)$.

由(46)式关于 x 求导,利用 Young 不等式,引理 1 ～ 引理 6 可得

$$\int_0^T\int_0^1 b_{txxx}^2 + b_{xxxxx}^2\, dxdt \le C(T)\left(\int_0^T \| b_x \|_{H^3}^2 + \| u_x \|_{H^3}^2\, dt\right)\le C(T).$$ 证毕.

2 结束语

通过严密的推理完成了对定理 1 的证明.不过,在电阻尼系数存在的情况下,一些磁流体方程柯西问题解的整体存在性、大时间性等一系列性质还有待证明.

参考文献

[1] Liu Xin, Qin Yuming, Peng Xiaozhen. Regularity of large solutions for the compressible magnetohydrodynamic equations[J]. Boundary Value Problems,2011,2011(1):1-17.

[2] Qin Yuming, Liu Xin, Yang Xinguang. Global existence and exponential stability for a 1d compressible and radiative MHD flow[J]. J Differential Equations,2012,253(5):1439-1488.

[3] Fan Jishan, Jiang Song, Gen Nakamura. Vanishing shear viscosity limit in the Magnetohydrodynamic equations[J]. Commun Math Phys,2007,270(3):691-708.

[4] Pu Xueke, Guo Boling. Global existence and convergence rates of smooth solutions for the full compressible MHD equations[J]. Z Angew Math Phys,2013,64(3):519-538.

[5] Yu Haibo. Global classical large solutions with vacuum to 1d compressible MHD with zero resistivity[J]. Acta Appl Math,2013,128(1): 193-209

[6] Qin Yuming, Hu Guili. Global smooth solutions for 1D thermally radiative magnetohydrodynamics[J]. J Math Phys,2011,52(2):1-30.

[7] Wen Huanyao, Zhu Changjiang. Global classical large solutions to Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat-conducting fluids with vacuum[J]. J Math Anal,2013,45(2):431-468.

[8] Guo Zhenhua, Li Hailiang, Xin Zhouping. Lagrange structure and dynamics for solutions to the spherically symmetric compressible Navier-Stokes equations[J]. Commun Math Phy,2012,309(2):371-412.

[9] Wei Ruiying, Li yin, Yao zhengan. Two new regularity criteria for nematic liquid crystal flows[J]. Journal of Differential Equations, 2015,424(1):636-650.

[10] Wang Dehua, Yu cheng. Incompressible limit for the compressible flow of liquid crystals[J]. J Math Fluid Mech,2014,16(4):771-786.

[11] Wang Dehua, Yu cheng. Global weak solution and large-time behavior for the compressible flow of liquid[J]. Arc Rational Mech Anal, 2012,204(3):881-915.

[12] Tan Zhong,Tong Leilei,Wang Yong. Large time behavior of the compressible magnetohydrodynamic equations with Coulomb force[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2015,427(2):600-617.

[13] Tan Zhong,Xu Qiuju,Wang Huaqiao. Global existence and convergence rates for the compressible magnetohydrodynamic equations without heat conductivity[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series A (DCDS-A),2015,35(10):5083-5015.

[14] Xu Li, Zhang Ping. Global small solutions to three-dimensional incompressible magnetohydrodynamical system[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,2015,47(1):26-65.

Global Existence Behavior of the Solutions for Compressible Magnetohydrodynamics Equations

KONG Chunxiang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000,China)

Abstract: We established the global existence of the classical solutions with vacuum for 1D compressible magnetohydrodynamics equations where we did not require initial value to be small. Using the Cauchy inequality, Gronwall inequality and embedding theorem, we obtained the boundedness of the global solutions in H^4 space.

Keywords: magnetohydrodynamics; global solution; zero resistivity; vacuum