第 43 卷 第 1 期 2015 年 1 月
河南师范大学学报(自然科学版) Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)
Vol. 43 No. 1 Jan. 2015

文章编号:1000－2367(2015)01－00001－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.01.001

Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构

焦争鸣,郭 敏,夏正亮

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:主要研究 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数($B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes\alpha_H$)上的拟三角结构,给出了 Hom-$T$-smash 积 Hom-Hopf 代数构成拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件.

关键词: Hom-Hopf 代数;拟三角结构;Hom-T-smash 积

中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A

作为提供量子 Yang-Baxter 方程解的有效工具,拟三角 Hopf 代数和余拟三角 Hopf 代数(也称辫子 Hopf 代数)概念分别由 Drinfeld 和 Larson-Towber 在文献[1－2]中引入. 由于其深刻的物理背景,引起了许多代数学者的关注和研究,相关的研究结果可参见文献[1－4].

近年来,作为代数一类形变代数,Hom-结合代数的概念由 Makhlouf 和 Silvestrov[5] 在研究拟李代数时引入. 这里通常代数的结合性由 Hom-结合性所代替,即:$\alpha(a)(bc)=(ab)\alpha(c)$,其中 $\alpha:A\to A$ 为一个线性映射. 对偶地文献[6－7]引入了 Hom-余结合余代数概念,随之,文献[7－9]相继给出 Hom-双代数(Hopf 代数),(余)拟三角 Hom-双代数(Hopf 代数)定义,并对其进行了深入研究. 文献[10－11]分别给出了 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数和 Hom-ω-smash 余积 Hom-Hopf 代数的定义并研究了其上的余拟三角结构.

本文将主要对 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构进行研究,给出 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数具有拟三角结构的充分必要条件. 本文的所有工作都在一个固定的域 k 上进行,张量积和线性映射均指域 k 上的. 文中将沿用文献[12] 中记法,对于代数 C 和任意 $c\in C$,记 $\Delta(c)=\Sigma c_{(1)}\otimes c_{(2)}$(为了方便,以下省略"$\Sigma$").

1 预备知识

本节先回顾一下 Hom- 结构定义.

一个 Hom- 结合代数是一个四元组(A,μ,η,α)(简称(A,α)),其中 A 是一个线性空间,$\alpha:A\to A,\eta:k\to A$,$\mu:A\otimes A\to A$,$\mu(a\otimes a')=aa'$ 为线性映射. 使对所有 a,a',$a''\in A$,满足下列条件

1) $(aa')=\alpha(a)\alpha(a'),\alpha(1_A)=1_A$,其中 $1_A=\eta(1_k)$;

2) $\alpha(a)(a'a'')=(aa')\alpha(a'')$;3) $a1_A=1_Aa=\alpha(a)$.

一个 Hom- 代数同态 $f:(A,\mu_A,1_A,\alpha_A)\to(B,\mu_B,1_B,\alpha_B)$ 是指一个线性映射 $f:A\to B$ 满足 $\alpha_B\circ f=f\circ\alpha_A$,$f(1_A)=1_B$ 和 $f\circ\mu_A=\mu_B\circ(f\otimes f)$.

定义 2[6] 一个 Hom- 余结合余代数是一个四元组(C,$\Delta,\varepsilon_C,\beta$)(简称:($C,\beta$)),其中 C 是一个线性空间,$\beta:C\to C,\varepsilon_C:C\to k,\Delta:C\to C\otimes C$ 为线性映射. 使对所有 $c\in C$,下列条件满足

1) $\Delta\circ\beta=(\beta\otimes\beta)\circ\Delta,\varepsilon_C\circ\beta=\varepsilon_C$;

2) $\beta(c_{(1)})\otimes c_{(2)(1)}\otimes c_{(2)(2)}=c_{(1)(1)}\otimes c_{(1)(2)}\otimes\beta(c_{(2)})$;

收稿日期:2014-06-06

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410052);河南省教育厅基础研究项目(2009A110009)

作者简介:焦争鸣(1956－),男,河南安阳人,河南师范大学教授,主要从事 Hopf 代数研究,E-mail:zmjiao@htu.cn.

3) $\varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)}=c_{(1)}\varepsilon_C(c_{(2)})=\beta(c)$.

一个 Hom- 余代数同态 $g:(C,\Delta_C,\varepsilon_C,\beta_C)\to(D,\Delta_D,\varepsilon_D,\beta_D)$ 是指一个线性映射 $g:C\to D$ 满足 $\beta_D\circ g=g\circ\beta_C$,$\varepsilon_D\circ g=\varepsilon_C$ 和 $\Delta_D\circ g=(g\otimes g)\circ\Delta_C$.

定义 3[7-8] 一个 Hom- 双代数是一个六元组$(H,\mu_H,1_H,\Delta_H,\varepsilon_H,\gamma)$(简称$(H,\gamma)$),其中$(H,\gamma)$ 是 Hom- 结合代数,也是 Hom- 余结合余代数,使得线性映射 Δ,ε_C 是 Hom- 代数同态,即对任意 $h,g\in H$ 满足下列条件 $\Delta(hh')=\Delta(h)\Delta(h')$,$\Delta(1_H)=1_H\otimes 1_H$,$\varepsilon(hh')=\varepsilon(h)\varepsilon(h')$,$\varepsilon(1_H)=1_H$.

一个反对极是一个线性映射 $S:H\to H$,如果满足下列条件

$$S(h_{(1)})h_{(2)}=h_{(1)}S(h_{(2)})=\varepsilon(h)1_H,S(\gamma(h))=\gamma(S(h)),$$

一个有反对极的 Hom- 双代数称为 Hom-Hopf 代数.

设(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom- 结合代数,线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$,$T(h\otimes b)=b_T\otimes h_T$,满足$(\alpha_B\otimes\alpha_H)\circ T=T\circ(\alpha_H\otimes\alpha_B)$,在向量空间 $B\otimes H$ 上定义乘法

$$(b\otimes h)(b'\otimes h')=b\alpha_B^{-1}(b')_T\otimes\alpha_H^{-1}1(h_T)h'.\tag{1}$$

对任意的 $h,h'\in H$ 和 $b,b'\in B$. 如果 $B\otimes H$ 对此乘法构成新的 Hom- 结合代数,单位元为 $1_B\otimes 1_H$,则称此新的 Hom- 结合代数 $B\otimes H$ 为 Hom-smash 积,记为 $B\#_TH$.

命题 1[10] 设(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom- 结合代数,线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$. 则 $B\#_TH$ 为一个 Hom-smash 积当且仅当下列条件成立$(T=t)$

$$T(h\otimes 1_B)=1_B\otimes\alpha_H(h);\tag{2}$$

$$T(1_H\otimes b)=\alpha_B(b)\otimes 1_H;\tag{3}$$

$$\alpha_B((ab)_T)\otimes\alpha_H(h)_T=\alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_t\otimes h_{Tt};\tag{4}$$

$$\alpha_B(b)_T\otimes(hg)_T=b_{Tt}\otimes\alpha_H^{-1}(\alpha_H(h)_t)g_T.\tag{5}$$

任给 $h,g\in H$ 和 $a,b\in B$.

设(B,α_B,S_B) 和(H,α_H,S_H) 为 Hom-Hopf 代数,线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$. 如果 Hom-smash 积代数结构和张量余积 Hom- 余代数结构构成一个 Hom- 双代数,称之为 Hom-T-smash 双代数,记为 $B\bowtie_TH$[10].

命题 2[10] 设(B,α_B) 和(H,β_H) 为 Hom-Hopf 代数,线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$. 则 $B\#_TH$ 为一个 Hom-T-smash 积当且仅当条件(2) ~ (5) 成立和 T 为余代数映射,即

$$b_{T(1)}\otimes h_{T(1)}\otimes b_{T(2)}\otimes h_{T(2)}=b_{(1)T}\otimes h_{(1)T}\otimes b_{(2)t}\otimes h_{(2)t},\varepsilon_B(b_T)\varepsilon_H(h_T)=\varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h),$$

并且,Hom-T-smash 积 Hom- 双代数$(B\bowtie_TH,\alpha_B\otimes\alpha_H)$ 为 Hom-Hopf 代数,其反对极为

$$S(b\otimes h)=\alpha_B^{-1}(S_B(b))_T\otimes\alpha_H^{-1}(S_H(h)_T),$$

对任意的 $h\in H$ 和 $b\in B$.

定义 4 设(B,α_B,S_B) 和(H,α_H,S_H) 为 Hom- 双代数. 线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$ 称为 Hom- 右余正规的,若对任意的 $h\in H$ 和 $b\in B$ 都有

$$\varepsilon_B(b_T)h_T=\varepsilon_B(b)\alpha_H(h).\tag{6}$$

例 1 设(B,α_B,S_B) 和(H,α_H,S_H) 为 Hom-Hopf 代数,线性映射 $T=\tau_{H,B}:H\otimes B\to B\otimes H$. 则$(B\bowtie_TH,\alpha_B\otimes\alpha_H)$ 是通常的张量积 Hom-Hopf 代数.

下面的引理,将给出 Hom-T-smash 积 Hopf 代数 $B\bowtie_TH$ 的一些性质,其中 T 是 Hom- 右余正规线性映射.

引理 1 设$(B\bowtie_TH,\alpha_B\otimes\alpha_H)$ 为一个 Hom-T-smash 积 Hopf 代数,T 是 Hom- 右余正规线性映射. 则对任意的 $h\in H$ 和 $a,b\in B$ 有

$$\alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\varepsilon_H(h_{(1)T})\otimes h_{(2)}=b_T\otimes h_T=\alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\varepsilon_H(h_{(2)T})\otimes h_{(1)},\tag{7}$$

$$\alpha_B((ab)_T)\varepsilon_H(\alpha_H(h)_T)=\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{(1)T})\varepsilon_H(h_{(2)t})=\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{(2)T})\varepsilon_H(h_{(1)t}).\tag{8}$$

证明 因为 T 是余代数映射,则对任意的 $h\in H$ 和 $b\in B$ 有 $b_{T(1)}\otimes h_{T(1)}\otimes b_{T(2)}\otimes h_{T(2)}=b_{(1)T}\otimes h_{(1)T}\otimes b_{(2)t}\otimes h_{(2)t}$,以$(\varepsilon_B\otimes id_H\otimes id_B\otimes_H)$ 作用等式两边,利用(6) 式,得到 $b_T\otimes h_T=\alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\varepsilon_H(h_{(1)T})\otimes h_{(2)}$. 同理可得 $b_T\otimes h_T=\alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\varepsilon_H(h_{(2)T})\otimes h_{(1)}$. 因此(7) 成立.

(8) 可以由(7) 和(4) 得到. 事实上，有

$$\alpha_B((ab)_T)\varepsilon_H(\alpha_H(h)_T)\underline{\underline{(4)}}\alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{T_t})\underline{\underline{(7)}}\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{(1)T})\varepsilon_H(h_{(2)t}),$$

同理，有 $\alpha_B((ab)_T)\varepsilon_H(\alpha_H(h)_T)\underline{\underline{(4)}}\alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{T_t})\underline{\underline{(7)}}\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_t\varepsilon_H(h_{(2)T})\varepsilon_H(h_{(1)t})$.
证毕.

下面回顾一下拟三角 Hom-Hopf 代数的定义，并给出一些相关的概念.

定义 5[9,13]　设(H,α_H) 是一个 Hom-Hopf 代数，$R=R^{(1)}\otimes R^{(2)}\in H\otimes H$. (H,R) 称为拟三角 Hom-Hopf 代数，如果对任意的 $h\in H$，下列条件成立$(R=r)$：

1) $\Delta_H(R^{(1)})\otimes\alpha_H(R^{(2)})=\alpha_H(R^{(1)})\otimes\alpha_H(r^{(1)})\otimes R^{(2)}r^{(2)}$；2) $\varepsilon_H(R^{(1)})R^{(2)}=1_H$；

3) $\alpha_H(R^{(1)})\otimes\Delta_H(R^{(2)})=R^{(1)}r^{(1)}\otimes\alpha_H(r^{(2)})\otimes\alpha_H(R^{(2)})$；4) $R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)})=1_H$；

5) $\Delta_H^{cop}(h)R=R\Delta_H(h)$；6) $(\alpha_H\otimes\alpha_H)\circ R=R$.

此外，R 可逆，其逆为：$R^{-1}=S_H(R^{(1)})\otimes R^{(2)}$.

定义 6　设(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom-Hopf 代数. (B,H,U) 称为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对，如果对 $U=U^{(1)}\otimes U^{(2)}\in B\otimes H$，下列条件成立$(U=u)$：

1) $\Delta_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(U^{(2)})=\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_B(u^{(1)})\otimes U^{(2)}u^{(2)}$；2) $\varepsilon_B(U^{(1)})U^{(2)}=1_H$；

3) $\alpha_B(U^{(1)})\otimes\Delta_H(U^{(2)})=u^{(1)}U^{(1)}\otimes\alpha_H(u^{(2)})\otimes\alpha_H(U^{(2)})$；4) $U^{(1)}\varepsilon_H(U^{(2)})=1_B$.

定义 7　设(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom-Hopf 代数. (B,H,V) 称为斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对，如果对 $V=V^{(1)}\otimes V^{(2)}\in H\otimes B$，下列条件成立$(V=v)$：

1) $\Delta_H(V^{(1)})\otimes\alpha_B(V^{(2)})=\alpha_H(V^{(1)})\otimes\alpha_H(v^{(1)})\otimes v^{(2)}V^{(2)}$；2) $\varepsilon_H(V^{(1)})V^{(2)}=1_B$；

3) $\alpha_H(V^{(1)})\otimes\Delta_B(V^{(2)})=v^{(1)}V^{(1)}\otimes\alpha_H(V^{(2)})\otimes\alpha_H(v^{(2)})$；4) $V^{(1)}\varepsilon_B(V^{(2)})=1_H$.

定义 8　设(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom-Hopf 代数，$T:H\otimes B\to B\otimes H$. (B,H,U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对，(B,H,V) 为斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对. (B,P) 称为(U,V)- 弱拟三角 Hom-Hopf 代数，如果对任意的 $b\in B$，$P=P^{(1)}\otimes P^{(2)}\in B\otimes B$，下列条件成立$(P=p)$

1) $\Delta_B(P^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})=P^{(1)}U^{(1)}\otimes\alpha_B(p^{(1)})\otimes P^{(2)}\alpha_B^{-1}((p^{(2)})_t)\varepsilon_B(\alpha_H(U^{(2)})_t)$；

2) $\varepsilon_B(P^{(1)})P^{(2)}=1_B$；3) $\varepsilon_B(P^{(1)})\otimes\Delta_B(P^{(2)})=P^{(1)}\alpha_B^{-1}((p^{(1)})_t)\varepsilon_B(\alpha_H(V^{(1)})_t)\otimes\alpha_B(p^{(2)})\otimes P^{(2)}V^{(2)}$；

4) $P^{(1)}\varepsilon_B(P^{(2)})=1_B$；5) $b_{(2)}\alpha_B(P^{(1)})\otimes b_{(1)}\alpha_B(P^{(2)})=(P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T\varepsilon_H(\alpha_H(V^{(1)})_T)\otimes\alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-2}(b_{(2)})_TV^{(2)})\varepsilon_H(U_t^{(2)})$.

2　Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数 $B\bowtie_T H$ 上的拟三角结构

本节总假定(B,α_B) 和(H,α_H) 为 Hom-Hopf 代数，线性映射 $T:H\otimes B\to B\otimes H$ 是 Hom- 右余正规的并且使得 $B\bowtie_T H$ 成为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数，则有下面引理.

引理 2　设$(B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes\alpha_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数，定义 $\rho:B\bowtie_T H\to B$，$\rho(b\otimes h)=\varepsilon_H(h)b$；$\pi:B\bowtie_T H\to H$，$\pi(b\otimes h)=\varepsilon_B(b)h$，对任意的 $b\otimes h\in B\bowtie H$. 则

1) ρ 是 Hom- 余代数映射，且 $\rho((a\otimes h)(b\otimes g))=a\alpha_B^{-1}(b)_T\varepsilon_H(h_T)\varepsilon_H(g)$；2) π 是 Hom- 双代数映射.

证明　直接验证即可.

设$(B\bowtie H,\alpha_B\otimes\alpha_H,R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数，且

$$R=R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes R^{(3)}\otimes R^{(4)}\in B\bowtie_T H\otimes B\bowtie_T H.$$

设

$$P=R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)})\otimes R^{(3)}\varepsilon_H(R^{(4)})=P^{(1)}\otimes P^{(2)}\in B\otimes B,\tag{9}$$

$$Q=\varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)}\otimes\varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)}=Q^{(1)}\otimes Q^{(2)}\in H\otimes H,\tag{10}$$

$$U=R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)}=U^{(1)}\otimes U^{(2)}\in B\otimes H,\tag{11}$$

$$V=\varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)}\otimes R^{(3)}\varepsilon_H(R^{(4)})=V^{(1)}\otimes V^{(2)}\in H\otimes B.\tag{12}$$

于是有下面命题.

命题 3　设$(B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数，$R=R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes R^{(3)}\otimes R^{(4)}\in$

$B\bowtie_T H\otimes B\bowtie_T H$, P, Q, U, V 如(9) ~ (12) 给定. 如果 R 满足定义 5 中 2)、4) 式，则有

$$P^{(1)}\varepsilon_B(P^{(2)})=\varepsilon_B(P^{(1)})P^{(2)}=1_B; \tag{13}$$

$$Q^{(1)}\varepsilon_H(Q^{(2)})=\varepsilon_H(Q^{(1)})Q^{(2)}=1_H; \tag{14}$$

$$\varepsilon_B(U^{(1)})U^{(2)}=1_H,\ U^{(1)}\varepsilon_H(U^{(2)})=1_B; \tag{15}$$

$$\varepsilon_H(V^{(1)})V^{(2)}=1_B, V^{(1)}\varepsilon_B(V^{(2)})=1_H. \tag{16}$$

证明 直接验证即可.

命题 4 设$(B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes\alpha_H)$为 Hom-$T$-smash 积 Hom-Hopf 代数，$R=R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes R^{(3)}\otimes R^{(4)}\in B\bowtie TH\otimes B\bowtie_T H$, P, Q, U, V 如(9) ~ (12) 给定. 如果$(B\bowtie_T H, R)$为拟三角 Hom-Hopf 代数，则对任意的 $b\in B$，有

$$R^{(1)}b_{T\varepsilon_H}(R_T^{(2)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)}=\alpha_B(b)R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)}; \tag{17}$$

$$\varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)}\otimes R^{(3)}b_{T\varepsilon_H}(R_T^{(4)})=\varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)}\otimes\alpha_B(b)R^{(3)}\varepsilon_H(R^{(4)}); \tag{18}$$

$$R=P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}\otimes Q^{(2)}U^{(2)}. \tag{19}$$

证明 因为$(B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes\alpha_H, R)$为拟三角 Hom-Hopf 代数，则对任意的 $h\in H$ 和 $b\in B$，有 $\Delta^{cop}_{B\bowtie_T H}(b\otimes h)R=R\Delta_{B\bowtie_T H}(b\otimes h)$. 因此，有等式

$$\begin{aligned}&R^{(1)}\alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}(R^{(2)}{}_T)h_{(1)}\otimes R^{(3)}\alpha_B^{-1}(b_{(2)})_t\otimes\alpha_H^{-1}(R^{(4)}{}_t)h_{(2)}=\\&b_{(2)}\alpha_B^{-1}(R^{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}(h_{(2)T})R^{(2)}\otimes b_{(1)}\alpha_B^{-1}(R^{(3)})_t\otimes\alpha_H^{-1}(h_{(1)t})R^{(4)}.\end{aligned} \tag{20}$$

在(20) 中取 $h=1_H$，再用$(\rho\otimes\pi)$作用等式(20) 两边，可得(17). 在(20) 中取 $h=1_H$，再用$(\pi\otimes\rho)$作用等式(20) 两边，可得到(18).

对于(19) 有以下计算. 由定义 5 中 1) 和 3) 式，有

$$\begin{aligned}&(\Delta_{\bowtie_T H}\otimes\Delta_{B\bowtie_T H})(\alpha_B(R^{(1)})\otimes\alpha_H(R^{(2)})\otimes\alpha_B(R^{(3)})\otimes\alpha_H(R^{(4)}))=\\&\Delta_{B\bowtie TH}(\alpha_B(R^{(1)})\otimes\alpha_H(R^{(2)}))\otimes\Delta_{B\bowtie_T H}(\alpha_B(R^{(3)})\otimes\alpha_H(R^{(4)}))=\\&\Delta_{B\bowtie_T H}((\alpha_B(R^{(1)})\otimes\alpha_H(R^{(2)}))(\alpha_B(r^{(1)})\otimes\alpha_H(r^{(2)})))\otimes\\&((\alpha_B\otimes\alpha_H)\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_H))^2((r^{(3)}\otimes r^{(4)})\otimes(R^{(3)}\otimes R^{(4)}))=\\&\Delta_B\ \triangleright\!\triangleleft_T H(\alpha_B(R^{(1)})\otimes\alpha_H(R^{(2)}))\Delta_{B\bowtie_T H}(\alpha_B(r^{(1)})\otimes\alpha_H(r^{(2)}))\otimes\\&((\alpha_B\otimes\alpha_H)\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_H))^2((r^{(3)}\otimes r^{(4)})\otimes(R^{(3)}\otimes R^{(4)}))=\\&((\alpha_B\otimes\alpha_H)\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_H))(R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes\bar{R}^{(1)}\otimes\bar{R}^{(2)})((\alpha_B\otimes\alpha_H)\otimes\\&(\alpha_B\otimes\alpha_H))(r^{(1)}\otimes r^{(2)}\otimes\bar{r}^{(1)}\otimes\bar{r}^{(2)})\otimes((\alpha_B\otimes\alpha_H)\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_H))\cdot\\&((r^{(3)}\otimes r^{(4)})(r^{(3)}\otimes\bar{r}^{(4)})\otimes(R^{(3)}\otimes R^{(4)})(\bar{R}^{(3)}\otimes\bar{R}^{(4)})).\end{aligned}$$

由定义 2 中 1) 式，上式等价于

$$\begin{aligned}&(\Delta_{B\bowtie_T H}\otimes\Delta_{B\bowtie_T H})(R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes R^{(3)}\otimes R^{(4)})=\\&(R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes\bar{R}^{(1)}\otimes\bar{R}^{(2)})(r^{(1)}\bar{r}^{(2)}\otimes\bar{r}^{(1)}\bar{r}\otimes^{(2)})\otimes\\&((r^{(3)}\otimes r^{(4)})(\bar{r}^{(3)}\otimes\bar{r}^{(4)})\otimes(R^{(3)}\otimes R^{(4)})(\bar{R}^{(3)}\otimes\bar{R}^{(4)})),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&R^{(1)}{}_{(1)}\otimes R^{(2)}{}_{(1)}\otimes R^{(1)}{}_{(2)}\otimes R^{(2)}{}_{(2)}\otimes R^{(3)}{}_{(1)}\otimes R^{(4)}{}_{(1)}\otimes R^{(3)}{}_{(2)}\otimes R^{(4)}{}_{(2)}=\\&R^{(1)}\alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}(R^{(2)}{}_T)r^{(2)}\otimes\bar{R}^{(1)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(1)})_{\bar{T}}\otimes\alpha_H^{-1}(\bar{R}^{(2)}{}_{\bar{T}})\bar{r}^{(2)}\otimes\\&r^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(3)})_t\otimes\alpha_H^{-1}(r^{(4)}{}_t)\bar{r}^{(4)}\otimes R^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{R}^{(3)})_{\bar{t}}\otimes\alpha_H^{-1}(R_{\bar{t}}^{(4)})\bar{R}^{(4)}.\end{aligned} \tag{21}$$

用$(\pi\otimes\rho\otimes\rho\otimes\pi)$作用等式(21) 两边，有

$$\begin{aligned}R^{(2)}\otimes R^{(1)}\otimes R^{(3)}\bar{R}^{(4)}&=\varepsilon_B(R^{(1)}\alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T)\alpha_H^{-1}(R^{(2)}{}_T)r^{(2)}\otimes\bar{R}^{(1)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(1)})_{\bar{T}H}(\alpha_H^{-1}(\bar{R}^{(2)}{}_{\bar{T}})\bar{r}^{(2)})\otimes\\&r^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(3)})_{t\varepsilon_H}(\alpha_H^{-1}(r^{(4)}{}_t)\bar{r}^{(4)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{R}^{(3)})_{\bar{t}})\alpha_H{}^{-1}(R_{\bar{t}}^{(4)})\bar{R}^{(4)}\ \underline{\underline{(6)}}\varepsilon_B(R^{(1)}r^{(1)})R^{(2)}r^{(2)}\otimes\\&\bar{R}^{(1)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(1)})_{\bar{T}}\varepsilon_H(\bar{R}^{(2)}{}_{\bar{T}\bar{r}^{(2)}})\otimes r^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(3)})_{\varepsilon_H}(r_t^{(4)}r^{(4)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)}\bar{R}^{(3)})_{\bar{t}})\ R_{\bar{t}}^{(4)}\bar{R}^{(4)}\ \underline{\underline{(17)}}\\&\varepsilon_B(R^{(1)}r^{(1)})R^{(2)}r^{(2)}\otimes\bar{r}^{(1)}\bar{R}^{(1)}\varepsilon_H(\bar{R}R^{(2)}\bar{r}^{(2)})\otimes r^{(3)}\alpha_B^{-1}(\bar{r}^{(3)})_t\varepsilon H(r^{(4)}{}_t\bar{r}^{(4)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)}\bar{R}R^{(3)})_{\bar{r}})\ R_{\bar{t}}^{(4)}\bar{R}^{(4)}\ \underline{\underline{(18)}}\\&\varepsilon_B(R^{(1)}r^{(1)})R^{(2)}r^{(2)}\otimes\bar{r}^{(1)}\bar{R}^{(1)}\varepsilon_H(\bar{R}^{(2)}\bar{r}^{(2)})\otimes\bar{r}^{(3)}r^{(3)}\varepsilon_H(r^{(4)}\bar{r}^{(4)})\otimes\varepsilon_B(R^{(3)}\bar{R}^{(3)})_{\bar{t}})\ R_{\bar{t}}^{(4)}\bar{R}^{(4)},\end{aligned}$$

即有 $R=P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}\otimes Q^{(2)}U^{(2)}$. 证毕.

命题 5　设$(B\bowtie_T H, \alpha_B\otimes\alpha_H, R)$为拟三角 Hom-Hopf 代数，则 R 可以分解为 $R=P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}\otimes Q^{(2)}U^{(2)}$，使得 P,Q,U,V 满足下列条件$(T=t)$.

(i) $U^{(1)}\alpha_B^{-1}(b_T)\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(1)})_T)\otimes Q^{(2)}U^{(2)}=bU^{(1)}\otimes\alpha H(U^{(2)})$,

(ii) $Q^{(1)}V^{(1)}\otimes V^{(2)}\alpha_B^{-1}(b_T)\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(2)})_T)=\alpha_H(V^{(1)})\otimes bV^{(2)}$,

(iii) $\alpha_B(U^{(1)})\otimes U^{(2)}h=U_T^{(1)}\varepsilon_H(h_{(2)}T)\otimes\alpha_H^{-1}(h_{(1)})U^{(2)}$,

(iv) $V^{(1)}h\otimes\alpha_B(V^{(2)})=\alpha_H^{-1}(h_{(2)})V^{(1)}\otimes V_T^{(2)}\varepsilon_H(h_{(1)}T)$,

(v)$\alpha_B(P^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})\varepsilon_H(h)=P_T^{(1)}\varepsilon_H(h_{(2)}T)\otimes P_t^{(2)}\otimes_H(h_{(1)}t)$,

(vi) $\alpha_B(P^{(1)})\otimes V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}=P^{(1)}U^{(1)}\otimes V^{(1)}\otimes P^{(2)}\alpha_B^{-1}(V^{T(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(U^{(2)})_T)$,

(vii) $P^{(1)}U^{(1)}\otimes U^{(2)}\otimes\alpha_B(P^{(2)})=P^{(1)}\alpha_B^{-1}(U_T^{(1)})\varepsilon_H(\alpha_H(V^{(1)})_T)\otimes U^{(2)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}$,

(viii) $U^{(1)}\otimes Q^{(1)}\otimes Q^{(2)}U^{(2)}=U^{(1)}\otimes Q^{(1)}\otimes U^{(2)}Q^{(2)}$,

(ix) $Q^{(1)}V^{(1)}\otimes Q^{(2)}\otimes V^{(2)}=V^{(1)}Q^{(1)}\otimes Q^{(2)}\otimes V^{(2)}$,

这里 $h\in H$ 和 $a, b\in B$.

证明　因为 R 满足定义 5 中 5) 式，故对任意的 $h\in H$ 和 $b\in B$，有

$$\Delta^{cop}_{B\bowtie_T H}(b\otimes h)R=R\Delta_{B\bowtie_T H}(b\otimes h),$$

因此，有

$$(P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}((Q^{(1)}V^{(1)})_T)h_{(1)}\otimes(P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(b_{(2)})_t\otimes\alpha_H^{-1}((Q^{(2)}V^{(2)})_t)h_{(2)}=$$
$$b_{(2)}\alpha_B^{-1}(P^{(1)}U^{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}(h_{(2)}T)(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes b_(1)\alpha_B^{-1}(P^{(2)}V^{(2)})_t\otimes\alpha_H^{-1}(h_{(1)}t)(Q^{(2)}U^{(2)}).\tag{22}$$

令 $h=1_H$，并以$(\rho\otimes\pi)$作用等式(22)两边，可得(i)；令 $h=1_H$，以$(\pi\otimes\rho)$作用等 式(22)两边，可得(ii)；令 $b=1_B$，以$(\rho\otimes\pi)$作用等式(22)两边，可得(iii)；令 $b=1_B$，以$(\pi\otimes\rho)$作用等式(22)两边，可得(iv)；令 $b=1_B$，以$(\rho\otimes\rho)$作用等式(22)两边，可得(v).

由定义 5 中 1) 式有

$$P^{(1)}{}_{(1)}U^{(1)}{}_{(1)}\otimes Q^{(1)}{}_{(1)}V^{(1)}{}_{(1)}\otimes P^{(1)}{}_{(2)}U^{(1)}{}_{(2)}\otimes Q^{(1)}{}_{(2)}V^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}\})\otimes\alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)})=$$
$$\alpha_B(P^{(1)}U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes\alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)})\otimes$$
$$(P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T\otimes\alpha_H^{-1}((Q^{(2)}U^{(2)})_T)(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}).\tag{23}$$

以$(\rho\otimes\pi\otimes\rho)$作用等式(23)两边，可得(vi). 以$(\rho\otimes\pi\otimes\pi)$作用等式(23)两边，可得(viii).

由定义 5 中 3) 式有

$$\alpha_B(P^{(1)}U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes P^{(2)}{}_{(1)}V^{(2)}{}_{(1)}\otimes Q^{(2)}{}_{(1)}U^{(2)}{}_{(1)}\otimes P^{(2)}{}_{(2)}V^{(2)}{}_{(2)}\otimes Q^{(2)}{}_{(2)}U^{(2)}{}_{(2)}=$$
$$(P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)})_T\otimes\alpha_H^{-1}((Q^{(1)}V^{(1)})_T)(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_B(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})\otimes\alpha_H(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)})\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)})\otimes\alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)}).\tag{24}$$

以$(\rho\otimes\pi\otimes\rho)$作用等式(23)两边，可得(vii). 以$(\pi\otimes\pi\otimes\rho)$作用等式(23)两边，可得(ix). 证毕.

定理 1　设$(B\bowtie_T H, \alpha_B\otimes\alpha_H, R)$为拟三角 Hom-Hopf 代数，则 R 可以分解为 $R=P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}\otimes Q^{(2)}U^{(2)}$，使得

1) (H, Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数；2) (B, H, U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对；(3) (H, B, V) 斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对；(4) (B, P) 为(U, V)-弱拟三角 Hom-Hopf 代数.

证明　1) 由引理 2，知道$(\pi\otimes\pi)$：$B\bowtie_T H\otimes B\bowtie_T H\to H\otimes H$ 是 Hom-双代数映射，且由$(\pi\otimes\pi)R=(\pi\otimes\pi)\circ(\alpha_B\otimes\alpha_H)R$ 知$(\pi\otimes\pi)R=Q^{(1)}\otimes Q^{(2)}=Q$. 则容易验证$(H, Q)$为拟三角 Hom-Hopf 代数. 故定理中 1) 得证.

2) 由(15)知，定义 6 中 2)、4) 式成立. 以$(\rho\otimes\rho\otimes\pi)$作用等式(23)两边，有

$$U^{(1)}{}_{(1)}\otimes U^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_H(U^{(2)})=\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_B(\bar{U}^{(1)})\otimes U^{(2)}\bar{U}^{(2)},$$

即知定义 6 中 1) 式对 U 成立. 以$(\rho\otimes\pi\otimes\pi)$作用等式(24)两边，有

$$\alpha_B(U^{(1)})\otimes U^{(2)}{}_{(1)}\otimes U^{(2)}{}_{(2)}=U^{(1)}\alpha_B^{-1}(\bar{U}_T^{(1)})\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(1)})_T)\otimes\alpha_H(\bar{U}^{(2)})\otimes\alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)})\underline{\underline{(i)}}$$
$$\bar{U}^{(1)}U^{(1)}\otimes\alpha_H(\bar{U}U^{(2)})\otimes\alpha_H(U^{(2)}),$$

知定义 6 中 3) 式对 U 成立. 从而定理中 2) 得证.

3) 由(16)知，定义 7 中 2)、4) 式成立，以$(\pi\otimes\pi\otimes\rho)$作用等式(23)两边，有

$$\alpha_H(V^{(1)}{}_{(1)})\otimes\alpha_H(V^{(1)}{}_{(2)})\otimes\alpha_B{}^2(V^{(2)})=\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes\alpha_H^2(\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(V^{(2)})\bar V_T^{(2)}\varepsilon H(\alpha_H(Q^{(2)})_T)\ \underline{\underline{(16)}}$$
$$\alpha_H^2(V^{(1)})\otimes\alpha_H^2(\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(V^{(2)}\bar V^{(2)}),$$

即得定义 7 中 1) 式成立. 再以($\pi\otimes\rho\otimes\rho$) 作用等式(24) 两边，易证定义 7 中 3) 式成立. 从而定理 1 中 3) 式得证.

4) 由(14) 知,定义 8 中 2、4) 式成立，以($\rho\otimes\rho\otimes\rho$) 作用等式(23) 两边,有

$$\alpha_B(P^{(1)})\otimes\Delta_B(P^{(2)})=P^{(1)}\alpha_B^{-1}((p^{(1)})_t)\alpha_B(\alpha_H(V^{(1)})_t)\otimes\alpha_B(p^{(2)})\otimes P^{(2)}V^{(2)}.$$

即知定义 8 中 3) 式成立，在(22) 式中，令 $h=1_H$，并以($\rho\otimes\rho$) 作用两边，由(ii) 可得定义 8 中 5) 式成立. 故定理中 4) 得证. 至此，定理的证明全部完成.

下面证明上述条件也是充分的.

定理 2 设($B\bowtie_T H,\alpha_B\bowtie\alpha_H$) 为 Hom-$T$-smash 积 Hom-Hopf 代数. $P=P^{(1)}\otimes P^{(2)}\in B\otimes B,Q=Q^{(1)}\otimes Q^{(2)}\in H\otimes H$, $U=U^{(1)}\otimes U^{(2)}\in B\otimes H,V=V^{(1)}\otimes V^{(2)}\in H\otimes B$,使得

1) (H,Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数;

2) (B, H, U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对;

3) (H, B, V) 斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对;

4) (B, P) 为(U, V)- 弱拟三角 Hom-Hopf 代数;

5) P, Q, U, V 满足命题 5 中条件(i) — (ix).

则($B\bowtie_T H,\alpha_B\otimes\alpha_H$, R) 为拟三角 Hom-Hopf 代数，其中

$$R=P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)}\otimes P^{(2)}V^{(2)}\otimes Q^{(2)}\}U^{(2)}.$$

证明 容易验证 R 满足定义 5 中 2) 和 4) 式. 下面验证 R 满足定义 5 中条件 1).

$$\Delta_{\bowtie_T H}(P^{(1)}U^{(1)}\otimes Q^{(1)}V^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)})\otimes\alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)})=P^{(1)}{}_{(1)}U^{(1)}{}_{(1)}\otimes Q^{(1)}{}_{(1)}V^{(1)}{}_{(1)}\otimes$$
$$P^{(1)}{}_{(2)}U^{(1)}{}_{(2)}\otimes Q^{(1)}{}_{(2)}V^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)})\otimes\alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)})P^{(1)}{}_{(1)}U^{(1)}{}_{(1)}\otimes\alpha_H(Q^{(1)})V^{(1)}{}_{(1)}\otimes$$
$$P^{(1)}{}_{(2)}U^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)})V^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)})\otimes(Q^{(2)}\bar Q^{(2)})\alpha_H(U^{(2)})=P^{(1)}{}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_H(Q^{(1)})V^{(1)}{}_{(1)}\otimes P^{(1)}{}_{(2)}\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)})V^{(1)}{}_{(2)}\otimes\alpha_B(P^{(2)}V^{(2)})\otimes(Q^{(2)}\bar Q^{(2)})(U^{(2)}\bar U^{(2)})=P^{(1)}{}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes P^{(1)}{}_{(2)}\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})(\bar V^{(2)}V^{(2)})\otimes(Q^{(2)}\bar Q^{(2)})(U^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(viii)}}$$
$$P^{(1)}{}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes P^{(1)}{}_{(2)}\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})(\bar V^{(2)}V^{(2)})\otimes$$
$$(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(vi)}}\alpha_B^{-1}(P^{(1)}{}_{(1)}u^{(1)}{}_{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes\alpha_B^{-1}(P^{(1)}{}_{(2)}u^{(1)}{}_{(2)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes(P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar V_t^{(2)}))\alpha_B(V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)})_t)\otimes$$
$$(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})(\alpha_B^{-1}(P^{(1)}_{(1)})u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\alpha_B^{-1}(P^{(1)}{}_{(2)})\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-1}(\bar V_t^{(2)})V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}\bar u^{(2)})_t)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\cdot$$
$$(\alpha_B^{-1}(P^{(1)}\tilde u^{(1)})u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes$$
$$(P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar P_t^{(2)}))(\alpha_B^{-1}(\bar V_t^{(2)})V^{(2)})\varepsilon_H((\tilde u^{(2)})_{\tilde t})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}\bar u^{(2)})_t)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})=$$
$$\alpha_B^{-1}(\alpha_B(P^{(1)})(\tilde u^{(1)}u^{(1)}))\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes$$
$$(P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar P_t^{(2)})(\alpha_B^{-2}(\alpha_B(\bar V^{(2)})_t)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(\tilde u^{(2)})_{\tilde t})\varepsilon_H((\alpha_H(u^{(2)})\alpha_H(\bar u^{(2)}))_t)\otimes$$
$$(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar QQ^{(2)}\bar UU^{(2)})(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes$$
$$(P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar P_t^{(2)}))(\alpha_B^{-1}(\alpha_B(\bar V^{(2)})_t)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}{}_{(1)})_{\tilde t})\varepsilon_H((u^{(2)}{}_{(2)}\alpha_H(\bar u^{(2)}))_t)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(5)}}$$
$$(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar VV^{(1)})\otimes(P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar P_t^{(2)}))\cdot$$
$$(\alpha_B^{-1}(\bar V_t^{(2)}T)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}{}_{(1)})_{\tilde t})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}{}_{(2)})_T)\varepsilon_H(\alpha_H(\bar u^{(2)})_t)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar VU^{(2)})=$$
$$(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes\alpha_B(P^{(2)})\cdot$$
$$(\alpha_B^{-1}(\bar PP_t^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar V_t^{(2)})_T)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}{}_{(1)})_{\tilde t})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}{}_{(2)})_T)\varepsilon_H((\bar u^{(2)})_t)(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(8)}}$$
$$(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes(\bar P^{(1)}\bar u^{(1)})\alpha_B(\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{1}))\otimes\alpha_B(P^{(2)})\cdot$$
$$(\alpha_B^{-1}(\alpha^{-1}B(\bar P^{(2)})\alpha_B^{-2}(\bar V^{(2)}))_T)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)})_T)\varepsilon_H(\alpha_H(\bar u^{(2)})_t)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(vii)}}$$
$$(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)})\otimes\alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})\otimes\alpha_B(\bar P^{(1)}\bar U^{(1)})\otimes\alpha_H(\bar Q^{(1)}\bar V^{(1)})\otimes$$
$$\alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-1}(\bar P^{(2)}\bar V^{(2)})_T)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)})_T)\otimes(Q^{(2)}U^{(2)})(\bar Q^{(2)}\bar U^{(2)})\ \underline{\underline{(ii)}}$$

$$
\begin{aligned}
&(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes (Q^{(1)}q^{(1)})\alpha_H(V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
&\alpha_B(P^{(2)})(V^{(2)}\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-2}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T)_t)\varepsilon_H((u^{(2)})_T)\varepsilon_H((q^{(2)})_t) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \underline{\underline{(5)}} \\
&(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes (Q^{(1)}q^{(1)})\alpha_H(V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}U^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
&\alpha_B(P^{(2)})(V^{(2)}\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T))\varepsilon_H((u^{(2)}q^{(2)})_T) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = \\
&(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
&(P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}V^{(2)})_T\varepsilon_H((\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}{}_{(1)})u^{(2)})_T) \otimes (\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}{}_{(2)})U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = \\
&\alpha_B(P^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}P^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
&(P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T\varepsilon_H(\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}{}_{(1)}U^{(2)}{}_{(1)})_T) \otimes \alpha_H^{-1}(Q^{(2)}{}_{(2)}U^{(2)}{}_{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \underline{\underline{(7)}} \\
&\alpha_B(P^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
&(P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}((\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T) \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(2)}U^{(2)})_T)(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}).
\end{aligned}
$$

类似可证R满足定义 5 中条件 3) 和 5). 从而得($B \bowtie_T H$，$\alpha_\beta \otimes \alpha_H$，$R$) 为一个拟三角 Hom-Hopf 代数.

定理 3　设($B \bowtie_T H$，$\alpha_B \otimes \alpha_H$) 为 Hom-$T$-smash 积 Hom-Hopf 代数，则下列叙述等价：

1) ($B \bowtie_T H$，$\alpha_B \otimes \alpha_H$，$R$) 为拟三角 Hom-Hopf 代数，$R \in B \bowtie_T H \otimes B \bowtie_T H$，

2) R 可以写成如下形式 $R = P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)}$，

使得(H,Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数，(B，H，U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对，(H，B，V) 为斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对，(B，P) 为(U，V)- 弱拟三角 Hom-Hopf 代数，P，Q，U，V 满足命题 5 中条件(i) — (iv).

注记 1　当 $\alpha_B \otimes \alpha_H = id_{B\otimes H}$，则定理 3 就是文献[4] 中定理 4.4 关于 Hopf 代数的结论.

参　考　文　献

[1] Drinfeld V G. Quantum groups[C]. Proc of ICM, Berkeley, 1987.

[2] Larson R, Towber J. Two dual classes of bialgebras related to the concepts of "quantum groups" and "quantum Lie algebras"[J]. Comm Algebra, 1991(19): 3295-3345.

[3] Jiao Z, Wisbauer R. The braided structures for ω-smash coproduct Hopf algebras[J]. J Algebra, 2005(287): 474-495.

[4] Jiao Z. The quasitriangular structures for a class of T-smash product Hopf algebras[J]. Israel J of Mathematics, 2005, 146(1): 125-147.

[5] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebras structures[J]. J Gen Lie theory Appl, 2008, 2(2): 51-64.

[6] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl, 2010, 9(4): 553-589.

[7] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin: Springer Verlag, 2009.

[8] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf Algebras[J]. Communications in Algebra, 2011, 39(6): 2216-2240.

[9] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra, 2010, 8: 45-64.

[10] Yau D. Hom-quantum groups: I. Quasi-triangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor, 2012, 45(6): 065203.

[11] Ma T S, Li H Y, Yang T. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras [J]. Colloq Math, 2014, 134: 75-92.

[12] 郑乃峰. Hom-ω-smash 余积 Hopf 代数上的辫化结构[J]. 数学物理学报, 2013, 33(6): 1068-1088.

[13] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

[14] 王忠伟，陈园园，张良云. Hom-Hopf 代数的对极和 Drinfel'd 偶[J]. 中国科学：数学, 2013, 42(11): 1079-1093.

The Quasitriangular Structure for Hom-T-smash Product Hom-Hopf Algebras

JIAO Zhengming, GUO Min, XIA Zhengliang

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, the quasitriangular structures for Hom-T-smash product Hom-Hopf algebras are discussed, and necessary andsufficient conditions for Hom-T-smash product Hom-Hopf algebras to bequasitriangular Hom-Hopf algebras are given.

Keywords: Hom-Hopf algebra; quasitriangular structure; Hom-T-smash product