文章编号:1000-2367(2021)06-0077-05 **DOI:**10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.06.011

导数非线性 Schrödinger 方程的爆破解

郑昊昊,李用声

(华南理工大学 数学学院,广州 510640)

摘 要:研究下述导数非线性 Schrödinger 方程的初边值问题:$\mathrm{i}\phi_t+\alpha\phi_{xx}=\mathrm{i}\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x-g(|\phi|^2)\phi,\sigma\geq 1$,$x\in[a,b]$,其中 α,β 为实数,$g(\cdot)$是实值函数.当 α,β,ϕ_0 及 $g(s)$满足一定条件时,利用守恒律和修正的 virial 等式,证明了爆破解的存在性.最后,得到了爆破解的渐近行为等一些性质.

关键词:导数非线性 Schrödinger 方程;爆破解;修正的 virial 等式

中图分类号:O175.23 **文献标志码:**A

在本文考虑下述导数非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\phi_t+\alpha\phi_{xx}=\mathrm{i}\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x-g(|\phi|^2)\phi,\sigma\geq 1. \tag{1}$$

其中 α,β 为实数,$g(\cdot)$是实值函数.当 $\beta=0$ 时,方程(1)化为下述一维情形下的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\phi_t+\alpha\phi_{xx}=-g(|\phi|^2)\phi. \tag{2}$$

方程(2)的局部适定性和全局适定性已经被广泛研究,见文献[1-3]及其参考文献.文献[4]首先研究了方程(2)的爆破解的存在性,之后爆破解的性质也被广泛研究,见文献[5-6]及其参考文献.最近文献[7]研究了能量临界以及能量超临界情形下方程(2)解的爆破准则.

当 $g=0$ 时,方程(1)化为下述导数非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\phi_t+\phi_{xx}+\mathrm{i}|\phi|^{2\sigma}\phi_x=0. \tag{3}$$

当 $\sigma=1$ 时,这是等离子体物理中 Alfvén 波的一个模型,见文献[8-9].文献[10]研究了光滑空间的适定性.后来文献[11-12]研究了其 H^1 解的局部适定性.随后文献[13]得到了在大初值条件下的 H^s 局部适定性,$s\geq\frac{1}{2}$.通过规范变换及守恒律,得到了 H^1 解的全局适定性结果,其中初值满足下列条件

$$\|\phi_0\|_2<\sqrt{2\pi}. \tag{4}$$

在条件(4)下,文献[14-15]证明了 H^s 解的全局适定性,其中 $s>\frac{1}{2}$.之后文献[16]得到了 $H^{\frac{1}{2}}$ 解的全局适定性.然而,$\sqrt{2\pi}$ 并不是全局适定性的最大阈值.在文献[17-18]中,证明了 H^1 解的全局存在性,其中初值满足下列条件

$$\|\phi_0\|_2<2\sqrt{\pi}. \tag{5}$$

最近文献[19]证明了在初值满足(5)条件下 $H^{\frac{1}{2}}$ 解是全局存在的.

对于 $\sigma\geq 1$,文献[12]证明了方程(3)的初边值问题的解的 H^1 局部适定性.最近,文献[20]得到在初值满足一些限制条件下 H^1 解的全局存在性.对于其他的一些适定性结果,见文献[21-22].

关于方程(1)的爆破解的研究,当 $\sigma=1$ 时,文献[23]研究了方程(1)在有界区域上的初边值条件下爆破

收稿日期:2020-12-06;**修回日期:**2021-03-07.

基金项目:国家自然科学基金(11571118;11971356)

作者简介:李用声(1965-),男,湖北襄阳人,华南理工大学教授,博士生导师,主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究,E-mail:yshili@scut.edu.cn.

通信作者:郑昊昊(1998-),男,江西南昌人,研究方向为非线性发展方程,E-mail:1327820053@qq.com.

解的存在性及其一些性质.之后文献[17]讨论了方程(3)在右半直线上的初边值问题,并且在负能量的假设下得到了解的爆破.但是对于 $\sigma>1$ 的条件下,方程(1)的解是否会爆破仍然不清楚.本文旨在讨论这个问题.研究方程(1)在下列边值条件下爆破解的存在性以及爆破解的性质,

$$\phi(0,x)=\phi_0(x),x\in\bar{\Omega}=[a,b],\phi(t,a)=0,\phi(t,b)=0,t\geq 0,\tag{6}$$

将文献[23]以及文献[17]中的结果推广到 $\sigma\geq 1$ 的情形.

在本文采用以下记号. f_x,f_t 分别表示函数 f 对 x,t 的偏导数.Ref,Imf 表示复值函数 f 的实部和虚部. $\Omega=(a,b)$,$\|f\|_p=(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{1/p}$,$p\geq 1$.对 $m\in\mathbf{N}$,$H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间,其范数为 $\|f\|_{H^m(\Omega)}=(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha f\|_2^2)^{1/2}$.

1 守恒律及修正的 virial 等式

在这一节,建立方程(1)的守恒律及修正的 virial 等式.Virial 等式对下一节爆破解的讨论至关重要.

引理 1 设 α,β 为实数,$g(s)$ 是实值函数,$g(0)=0$.假设初值 $\phi_0\in H_0^1(\Omega)$,$\phi\in C([0,T),H_0^1(\Omega))$ 是相应的方程(1) 的解.则对 $0\leq t<T$,

$$M=\|\phi\|_2^2=\|\phi_0\|_2^2,\tag{7}$$

$$E=\alpha^2\int_a^b|\phi_x|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x-\frac{\alpha\beta}{\sigma+1}\mathrm{Im}\int_a^b|\phi|^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}\mathrm{d}x.\tag{8}$$

其中 $G(s)=\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$.

证明 方程(1)两边乘以 $2\bar{\phi}$,然后积分,再对结果取实部,得到第一个等式(7).方程(1) 两边乘以 $2\bar{\phi}_t$,然后积分,再对结果取虚部,注意到

$$2\mathrm{Im}\int_a^b \mathrm{i}\bar{\phi}_t\alpha\phi_{xx}\mathrm{d}x=-2\alpha\mathrm{Re}\int_a^b\bar{\phi}_{tx}\phi_x\mathrm{d}x=-\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b|\phi_x|^2\mathrm{d}x,$$

$$2\mathrm{Im}\int_a^b \mathrm{i}g(|\phi|^2)\phi\bar{\phi}_t\mathrm{d}x=2\mathrm{Re}\int_a^b g(|\phi|^2)(|\phi|^2)_t\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\int_a^b|\phi|^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}\mathrm{d}x=(\sigma+1)\mathrm{Im}\int_a^b|\phi|^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}_t\mathrm{d}x+\sigma\int_a^b|\phi|^{2(\sigma-1)}(\bar{\phi})^2\phi_x\phi_t\mathrm{d}x-$$

$$\mathrm{Im}\int_a^b[\sigma|\phi|^{2(\sigma-1)}(|\phi|^2)_x\bar{\phi}\phi_t+|\phi|^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}_t]\mathrm{d}x=-2(\sigma+1)\mathrm{Im}\int_a^b|\phi|^{2\sigma}\phi_t\bar{\phi}\mathrm{d}x.$$

最后得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha\int_a^b|\phi_x|^2\mathrm{d}x-\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x-\frac{\beta}{\sigma+1}\mathrm{Im}\int_a^b|\phi|^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}\mathrm{d}x]=0$,

因此,能量守恒律(8)成立.引理 1 证毕.

引理 2 设 $\phi\in H_0^1(\Omega)$ 且$(x-a)\phi\in L^2(\Omega)$,有 $\|\phi\|_2^2\leq 2\|\phi_x\|_2\|(x-a)\phi\|_2$.

证明 注意到

$$\int_a^b|\phi|^2\mathrm{d}x=-2\mathrm{Re}\int_a^b(x-a)\phi\bar{\phi}_x\mathrm{d}x\leq 2\|\phi_x\|_2\|(x-a)\phi\|_2,$$

所以引理 2 成立.

接下来,将引入方程(1)的修正的 virial 等式.这个过程遵循标准的讨论,参见文献[4,17,23].可以发现 ϕ 的 virial 量与质量临界非线性 Schrödinger 方程相似.但由于非线性项的不同,两者之间仍存在差异.定义

$$V(t)=\int_a^b(x-a)^2|\phi|^2\mathrm{d}x,\tag{9}$$

$$P(t)=\mathrm{Im}\int_a^b(x-a)\bar{\phi}\phi_x\mathrm{d}x.\tag{10}$$

引理 3 设 $(x-a)\phi_0(x)\in L^2(\Omega)$,$(x-a)^{\frac{1}{\sigma+1}}|\phi_0(x)|^2\in L^{\sigma+1}(\Omega)$,$\phi_0\in H_0^1(\Omega)$.$\phi\in C([0,T),$

$H_0^1(\Omega)$）是相应方程(1) 的解，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)=4\alpha P(t)-\frac{2\beta}{\sigma+1}\int_a^b(x-a)\mid\phi\mid^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x,\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)=2\alpha\int_a^b\mid\phi_x\mid^2\mathrm{d}x-\alpha(b-a)\mid\phi_x(b,t)\mid^2-\beta\mathrm{Im}\int_a^b\mid\phi\mid^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}\mathrm{d}x+\int_a^b G(\mid\phi\mid^2)\mathrm{d}x-\int_a^b g(\mid\phi\mid^2)\mid\phi\mid^2\mathrm{d}x.\tag{12}$$

证明　通过直接的计算，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)=\int_a^b(x-a)^2\left[-2\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\phi}\phi_{xx}+\frac{\beta}{\sigma+1}(\mid\phi\mid^{2(\sigma+1)})_x\right]\mathrm{d}x=4\alpha P(t)-\frac{2\beta}{\sigma+1}\int_a^b(x-a)\mid\phi\mid^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x,$$

所以(11)式成立.对于(12)式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)=-\mathrm{Im}\int_a^b[\bar{\phi}+2(x-a)\bar{\phi}_x]\phi_t\mathrm{d}x=-\mathrm{Im}\int_a^b[\bar{\phi}+2(x-a)\bar{\phi}_x][\mathrm{i}\alpha\phi_{xx}+\beta\mid\phi\mid^{2\sigma}\phi_x+\mathrm{i}g(\mid\phi\mid^2)\phi]\mathrm{d}x=2\alpha\int_a^b\mid\phi_x\mid^2\mathrm{d}x-\alpha(b-a)\mid\phi_x(b,t)\mid^2-\beta\mathrm{Im}\int_a^b\mid\phi\mid^{2\sigma}\phi_x\bar{\phi}\mathrm{d}x+\int_a^b G(\mid\phi\mid^2)\mathrm{d}x-\int_a^b g(\mid\phi\mid^2)\mid\phi\mid^2\mathrm{d}x.$$

从而(12)式也成立.引理 3 证毕.

联系(11)、(12)式以及能量守恒(8)，得到下列引理.

引理 4　设引理 3 的假设条件成立，则对方程(1)的解 $\phi\in C([0,T),H_0^1(\Omega))$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V(t)=4(\sigma+1)E+\int_a^b\alpha[(8+4\sigma)G(\mid\phi\mid^2)-4g(\mid\phi\mid^2)\mid\phi\mid^2]\mathrm{d}x+(4-4\sigma)\alpha^2\int_a^b\mid\phi_x\mid^2\mathrm{d}x-\frac{2\beta}{\sigma+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b(x-a)\mid\phi\mid^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x.\tag{13}$$

2　爆破解的存在性及其性质

在这一节，受文献[3－4,23]的启发，运用 virial 等式(13)来证明，在一定条件下，方程(1)的解会发生爆破，进而研究爆破解的渐近行为.

定理 1　设 $\beta\geq 0$，$\alpha G(s)\leq\frac{\alpha}{2+\sigma}g(s)s$，引理 3 的条件成立，假设下述条件之一成立，

(i) $E<0$，

(ii) $E=0$ 且 $\alpha\mathrm{Im}\int_a^b(x-a)\bar{\phi}_0\phi_{0x}\mathrm{d}x<0$，

(iii) $E>0$ 且 $\alpha\mathrm{Im}\int_a^b(x-a)\bar{\phi}_0\phi_{0x}\mathrm{d}x<-\frac{\sqrt{2(\sigma+1)}}{2}\sqrt{E}(x-a)\parallel\phi_0\parallel_2$.

则存在 $T^*\in(0,\infty)$，使得 $\lim\limits_{t\to T^*}\parallel\phi_x\parallel_2=\infty$.

证明　由等式(13)以及条件 $\sigma\geq 1$，$\beta\geq 0$ 和 $\alpha G(s)\leq\frac{\alpha}{2+\sigma}g(s)s$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V(t)\leq 4(\sigma+1)E-\frac{2\beta}{\sigma+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b(x-a)\mid\phi\mid^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x.\tag{14}$$

对时间积分两次，得到

$$V(t)=V(0)+V'(0)t+\int_0^t\int_0^s\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}V(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leq V(0)+[V'(0)+\frac{2\beta}{\sigma+1}\int_a^b(x-a)\mid\phi_0\mid^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x]t+2(\sigma+1)Et^2=\int_a^b(x-a)^2\mid\phi_0\mid^2\mathrm{d}x+4\alpha t\,\mathrm{Im}\int_a^b(x-a)\bar{\phi}_0\phi_{0x}\mathrm{d}x+2(\sigma+1)Et^2.\tag{15}$$

在定理 1 中假设条件(i)、(ii)或者(iii)下,(15)式意味着存在 $T^* \in (0,\infty)$,使得 $V(T^*)=0$.由引理 2 的不等式可知,$\|\phi\|_2^2 \le 2\|\phi_x\|_2 \|(x-a)\phi\|_2$,得到 $\lim\limits_{t\to T^*}\|\phi_x\|_2=\infty$. 定理 1 得证.

注记 1 若取区域 $\Omega=(a,\infty)$,并且考虑方程(1)的相应的初边值问题,有类似定理 1 的结果.

从证明中可以发现,相对质量临界非线性 Schrödinger 方程的情形,在 virial 量的估计中多了一项 $\frac{2\beta}{\sigma+1}\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b (x-a)|\phi|^{2(\sigma+1)}\mathrm{d}x$.事实上这正是含导数的非线性项带来的影响,并且这一项很难得到准确的估计.但由于 Ω 区间的下界大于 a,始终可以保证该项的正性,从而在估计的时候避免复杂的讨论.注意到对于 Cauchy 问题,这里的讨论是不适用的.

接下来讨论爆破解的渐近行为的一些性质.

定理 2 在定理 1 的条件下,令 T^* 是解 $\phi(x,t)$ 的爆破时间.另外,假设对于某个常数 $C_0>0$ 使得 $s^{2\sigma+1}\le C_0 G(s)$,$s>0$.则对任意的 $\theta\in(0,1)$,有

$$\int_0^{T^*}\|\phi_x(\cdot,\tau)\|_2^\theta \mathrm{d}\tau \le \mathrm{const.}.$$

证明 由 virial 等式(13)式以及直接的计算,对于 $t\in[0,T^*)$,有

$$\int_a^b (x-a)^2|\phi|^2\mathrm{d}x \le C_1 - C_2\int_0^t\int_0^\tau\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

其中 C_1,C_2 是正常数.由能量守恒等式(8),

$$\|\phi_x(\cdot,t)\|_2^2 \le C_3 + C_4\int_a^b |\phi|^{2(2\sigma+1)}\mathrm{d}x + C_5\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x \le C_3 + C_6\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x, \tag{17}$$

其中 $C_3\sim C_6$ 是正常数.由 Fubini 定理以及不等式(17),有

$$\int_0^{T^*}(T^*-\tau)\|\phi_x(\cdot,\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau \le \frac{T^{*2}}{2}C_3 + C_6\int_0^{T^*}(T^*-\tau)\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{T^{*2}}{2}C_3 + C_6\int_0^{T^*}\int_0^\tau\int_a^b G(|\phi|^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \le \frac{T^{*2}}{2}C_3 + C_6\frac{C_1}{C_2} \le \mathrm{const.}, \tag{18}$$

最后,运用 Young 不等式,并且结合不等式(18),对 $\theta\in(0,1)$,

$$\int_0^{T^*}\|\phi_x(\cdot,\tau)\|_2^\theta\mathrm{d}\tau = \int_0^{T^*}\left[\frac{1}{p}(T^*-\tau)^{-\frac{\theta}{2}p} + \frac{1}{q}(T^*-\tau)^{\frac{\theta}{2}q}\|\phi_x\|_2^{\theta q}\right]\mathrm{d}\tau \le$$

$$\frac{1}{p}T^{*\frac{2(1-\theta)}{2-\theta}} + \frac{1}{q}\int_0^{T^*}(T^*-\tau)\|\phi_x(\cdot,\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau \le \mathrm{const.},$$

其中 $p=\frac{2}{2-\theta}$,$q=\frac{2}{\theta}$. 从而证明了定理 2.

推论 1 在定理 2 的条件下,有:

(i) $\int_0^{T^*}\|\phi(\cdot,t)\|_p^\eta\mathrm{d}\tau \le \mathrm{const.}$,其中 $0\le\eta<\frac{2p}{p-2}$,$p\ge 2$;

(ii) $\int_0^{T^*}\|\phi(\cdot,t)\|_q^q\mathrm{d}\tau \le \mathrm{const.}$,其中 $0\le q<4$.

证明 由定理 2 及 Gagliardo-Nirenberg 不等式 $\|\phi\|_p \le C\|\phi_x\|_2^{\frac{p-2}{2p}}\|\phi\|_2^{\frac{p+2}{2p}}$,其中 $p\ge 2$,能直接得到推论 1.

参 考 文 献

[1] KATO T.On nonlinear Schrödinger equations[J].Ann l'IHP Phys théor,1987,46(1):113-129.

[2] TSUTSUMI Y.L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups[J].Funkcial Ekvac,1987,30(1):115-125.

[3] WEINSTEIN M I.Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates[J].Commun Math Phys,1983,87(4):567-576.

[4] GLASSEY R T.On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations[J].J Math Phys,1977,18(9):1794-1797.

[5] MERLE F.On uniqueness and continuation properties after blow-up time of self-similar solutions of nonlinear schrödinger equation with critical exponent and critical mass[J].Commun Pure Appl Math,1992,45(2):203-254.

[6] MERLE F,TSUTSUMI Y.L^2 concentration of blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity [J].J Diff Eq,1990,84(2):205-214.

[7] DU D P,WU Y F,ZHANG K J.On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation[J].Discrete & Conti Dyn Syst A,2016, 36(7):3639-3650.

[8] MIO K,OGINO T,MINAMI K,et al.Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasmas[J].J Phys Soc Japan,1976,41(1):265-271.

[9] MJØLHUS E.On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field[J].J Plasma Phys,1976,16(3): 321-334.

[10] GUO B L,TAN S B.On smooth solutions to the initial value problem for the mixed nonlinear Schrödinger equations[J].Proce Roy Soc Edinburgh Sect A:Math,1991,119(1/2):31-45.

[11] HAYASHI N.The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space[J].Nonl Anal:Theory, Methods & Appl,1993,20(7):823-833.

[12] HAYASHI N,OZAWA T.On the derivative nonlinear Schrödinger equation[J].Phys D:Nonl Phenomena,1992,55(1/2):14-36.

[13] TAKAOKA H.Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity[J].Adv Diff Eq, 1999,4(4):561-580.

[14] COLLIANDER J,KEEL M,STAFFILANI G,et al.Global well-posednessfor Schrödinger equations with derivative[J].SIAM J Math Anal,2001,33(3):649-669.

[15] COLLIANDER J,KEEL M,STAFFILANI G,et al.A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative[J]. SIAM J Math Anal,2002,34(1):64-86.

[16] MIAO C X,WU Y F,XU G X.Global well-posedness for Schrödinger equation with derivative in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$[J].J Diff Eq,2011,251(8): 2164-2195.

[17] WU Y F.Global well-posedness for the nonlinear Schrödinger equation with derivative in energy space[J].Anal & PDE,2013,6(8): 1989-2002.

[18] WU Y F.Global well-posedness on the derivative nonlinear Schrödinger equation[J].Anal & PDE,2015,8(5):1101-1112.

[19] GUO Z H,WU Y F.Global well-posedness for the derivative nonlinear Schrödinger equation in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$[J].Discrete & Conti Dyn Syst A, 2017,37(1):257-264.

[20] FUKAYA N,HAYASHI M,INUI T.A sufficient condition for global existence of solutions to a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation[J].Anal & PDE,2017,10(5):1149-1167.

[21] AMBROSE D M,SIMPSON G.Local Existence Theory for Derivative Nonlinear Schrödinger Equations with Noninteger Power Nonlinearities[J].SIAM J Math Anal,2015,47(3):2241-2264.

[22] SANTOS G D N.Existence and uniqueness of solution for a generalized nonlinear derivative Schrödinger equation[J].J Diff Eq,2015, 259(5):2030-2060.

[23] TAN S B.Blow-up solutions for mixed nonlinear Schrödinger equations[J].Acta Math Sinica,2004,20(1):115-124.

Blow-up solutions for derivative nonlinear Schrödinger equations

Zheng Haohao, Li Yongsheng

(School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, we study the blow-up solutions to the following initial boundary value problem of the derivative nonlinear Schrödinger equations, $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = i\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x - g(|\phi|^2)\phi, \sigma \geq 1, x \in [a, b]$, where α, β are real, $g(\cdot)$ is a real function. Under the some appropriate conditions on α, β, ϕ_0 and $g(s)$, we show the existence of the blow-up solutions by conservation laws and modified virial identity. Finally, we investigate asymptotic behavior and other properties of blow-up solutions.

Keywords: derivative nonlinear Schrödinger equation; blow-up solution; modified virial identity

[责任编校　陈留院　赵晓华]