

# Hom-Hopf 元(映射)与 Hom-Hopf (Pentagon)方程的解

焦争鸣, 黄功宇

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

**摘要:**引进了 Hom-Hopf(Pentagon)方程以及 Hom-Hopf 元(映射)等概念,讨论了这两类方程的等价性.进而证明:一个 Hom-双代数  $(H, \alpha)$  的 Hom-Hopf 元(或 Hom-Hopf 映射),可以用来构造任意左  $H$ -Hom-模(或右  $H$ -Hom-余模)  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的解.

**关键词:** Hom-双代数; Hom-Hopf 方程; Hom-Pentagon 方程; Hom-Hopf 元; Hom-Hopf 映射

**中图分类号:** O153.3

**文献标志码:** A

Hopf 方程  $R^{12}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$  和 Pentagon 方程  $R^{23}R^{12} = R^{12}R^{13}R^{23}$  均为重要的非线性代数方程<sup>[1]</sup>, 与量子 Yang-Baxter 方程有着密切联系,并在 Von Neumann 代数理论等方面也有着广泛应用,它们的提出要早于量子 Yang-Baxter 方程<sup>[2]</sup>. 长期以来,人们对它们的解的构造和结构性质进行了大量研究,得到许多研究成果,相关内容可参见文献[1-5].

近年来,作为通常代数的一种推广形式, Hom-代数的概念由 Makhlouf 和 Silvestrov 在研究拟李代数时引入<sup>[6-7]</sup>. 其代数结合性由 Hom-结合性所代替,即:  $\alpha(a)(bc) = (ab)\alpha(c)$ , 其中  $\alpha: A \rightarrow A$  为一个线性映射. 对偶地文献[7-8]引入了 Hom-余代数概念. 随之,人们对 Hom-型代数结构进行深入研究, Hopf 代数理论中的许多概念、结论得以在 Hom-型代数结构理论中实现<sup>[10-15]</sup>. 特别地, Yau 在文献[11-14]中对 Hom-型的量子 Yang-Baxter 方程和相关 Hom-代数结构进行研究,利用 Hom-双代数上的拟三角和余拟三角结构得到了 Hom-量子 Yang-Baxter 方程的解.

本文将主要对 Hom-型 Hopf 方程和 Pentagon 方程进行研究,首先给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程以及 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射等概念. 在此基础上,讨论 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的等价关系. 进而给出利用 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射构造 Hom-Hopf-方程和 Hom-Pentagon 方程的解的方法. 本文结构如下:第一节简要介绍文中涉及到的基本概念和一些预备知识,引入 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程以及 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射等定义;第二节主要讨论 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf-方程的关系. 第三节讨论 Hom-Hopf 映射和 Hom-Hopf-方程的关系.

本文的所有工作都在一个固定的域  $k$  上进行,张量积和线性映射均指域  $k$  上的. 文中将沿用文献[16]中关于余代数余乘法的记法,对于余代数  $C$  和任意  $c \in C$ ,记  $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$  (为简便,文中省略符号“ $\Sigma$ ”).

## 1 预备知识

本节先回顾 Hom-型代数结构的相关定义与结论,详见文献[6-8].

**定义 1** 一个 Hom-代数是一个四元组  $(A, m, \mu, \alpha)$ , 其中  $A$  是一个  $k$ -向量空间,  $\alpha: A \rightarrow A, m: A \otimes A \rightarrow A, \mu: k \rightarrow A$  为线性映射. 使对所有  $a, b, c \in A$ , 满足下列条件

$$\alpha(a)(bc) = (ab)\alpha(c), \quad (1)$$

$$a 1_A = 1_{A\alpha} = \alpha(a), \text{ 其中 } 1_A = \mu(1_k), \quad (2)$$

收稿日期:2015-08-04;修回日期:2016-04-10.

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划(132300410052);河南省教育厅基础研究项目(2009A110009).

第1作者简介(通信作者):焦争鸣(1956-),男,河南安阳人,河南师范大学教授,主要从事 Hopf 代数研究, E-mail:

zmjiao@htu.cn.

$$\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b), \alpha(1_A) = 1_A. \quad (3)$$

设  $(A, m_A, \mu_A, \alpha_A)$ ,  $(B, m_B, \mu_B, \alpha_B)$  为两个 Hom-代数, 一个线性映射  $f: A \rightarrow B$  称为一个 Hom-代数映射, 如果  $f$  满足下列条件

$$\alpha_B \circ f = f \circ \alpha_A, \quad (4)$$

$$f(1_A) = 1_B, f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f). \quad (5)$$

**定义 2** 一个 Hom-余代数是一个四元组  $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ , 其中  $C$  是一个  $k$ -向量空间,  $\beta: C \rightarrow C, \Delta: C \rightarrow C \otimes C, \epsilon: C \rightarrow k$ , 为线性映射. 使对所有  $c \in C$ , 满足下列条件

$$\beta(c_1) \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_{11} \otimes c_{12} \otimes \beta(c_2), \quad (6)$$

$$\epsilon(c_1) c_2 = c_1 \epsilon(c_2) = \beta(c), \quad (7)$$

$$\Delta \circ \beta = (\beta \otimes \beta) \circ \Delta, \epsilon \circ \beta = \epsilon. \quad (8)$$

设  $(C, \Delta_C, \epsilon_C, \beta_C)$ ,  $(D, \Delta_D, \epsilon_D, \beta_D)$  为两个 Hom-余代数, 一个线性映射  $g: C \rightarrow D$  称为 Hom-余代数映射, 如果  $g$  满足下列条件

$$\beta_D \circ g = g \circ \beta_C, \quad (9)$$

$$\epsilon_D \circ g = \epsilon_C, \Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C. \quad (10)$$

**定义 3** 一个 Hom-双代数是一个六元组  $(H, m_H, 1_H, \Delta_H, \epsilon_H, \alpha)$ , 其中  $(H, m_H, 1_H, \alpha)$  是一个 Hom-代数,  $(H, \Delta_H, \epsilon_H, \alpha)$  是一个 Hom-余代数且使得线性映射  $\Delta_H, \epsilon_H$  是 Hom-代数映射, 即对  $\forall h, g \in H$  满足

$$\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h'), \Delta\alpha(1_H) = 1_H \otimes 1_H \quad (11)$$

$$\epsilon(hh') = \epsilon(h)\epsilon(h'), \epsilon(1_H) = 1_H. \quad (12)$$

**定义 4** 设  $(A, \alpha_A)$  是一个 Hom-代数, 一个左  $A$ -Hom-模是一个三元组  $(M, \omega, \alpha_M)$ , 其中  $M$  是一个  $k$ -向量空间,  $\alpha_M: M \rightarrow M$  和  $\omega: A \otimes M \rightarrow M, \omega(\alpha \otimes m) = \alpha \cdot m$  为线性映射, 使对任意  $a, b \in A, m \in M$ , 下列条件成立.

$$\alpha_M(a \cdot m) = \alpha(a) \cdot \alpha_M(m), \quad (13)$$

$$(ab) \cdot \alpha_M(m) = \alpha_A(a) \cdot (b \cdot m), 1_A \cdot m = \alpha_M(m). \quad (14)$$

**定义 5** 设  $(C, \alpha_C)$  是一个 Hom-余代数, 一个右  $C$ -Hom-余模是一个三元组  $(M, \rho, \alpha_M)$ , 其中  $M$  是一个  $k$ -向量空间,  $\alpha_M: M \rightarrow M$  和  $\rho: M \rightarrow M \otimes C, \rho(m) = m_{<0>} \otimes m_{<1>}$  为线性映射, 使对任意  $m \in M$ , 下列条件成立.

$$\alpha_M(m)_{<0>} \otimes \alpha_M(m)_{<1>} = \alpha_M(m_{<0>}) \otimes \alpha_C(m_{<1>}), \quad (15)$$

$$\alpha_M(m_{<0>}) \otimes m_{<1>1} \otimes m_{<1>2} = m_{<0><0>} \otimes m_{<0><1>} \otimes \alpha_C(m_{<1>}), \quad (16)$$

$$m_{<0>} \epsilon(m_{<1>}) = \alpha_M(m). \quad (17)$$

现在给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的定义.

**定义 6** 设  $M$  为一个  $k$ -向量空间,  $\alpha_M: M \rightarrow M$  一个线性映射,  $R \in \text{End}(M \otimes M)$  满足  $(\alpha_M \otimes \alpha_M) \circ R = R \circ (\alpha_M \otimes \alpha_M)$ .

(1)  $R$  称为  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解, 如果在  $\text{End}(M \otimes M \otimes M)$  中, 映射  $R$  满足

$$R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12} = R^{12} \circ R^{23}; \quad (18)$$

(2)  $R$  称为  $(M, \alpha_M)$  Hom-Pentagon 方程的一个解, 如果在  $\text{End}(M \otimes M \otimes M)$  中, 映射  $R$  满足

$$R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23} = R^{23} \circ R^{12}, \quad (19)$$

这里  $R^{12} = R \otimes \alpha_M, R^{23} = \alpha_M \otimes R, R^{13} = (id \otimes \tau)(R \otimes \alpha_M)(id \otimes \tau) \in \text{End}(M \otimes M \otimes M)$ .

**命题 1** 设  $(A, \alpha_A)$  是一个 Hom-代数, 若  $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A$  满足  $(\alpha_A \otimes \alpha_A)(R) = R$ , 则有

$$(R^{12} R^{13}) R^{23} = R^{12} (R^{13} R^{23}), (R^{23} R^{13}) R^{12} = R^{23} (R^{13} R^{12}),$$

其中  $R^{12} = R^1 \otimes R^2 \otimes 1_A, R^{13} = R^1 \otimes 1_A \otimes R^2, R^{23} = 1_A \otimes R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A \otimes A$ .

**证明** 记  $r = r^1 \otimes r^2 = R = \bar{R}^1 \otimes \bar{R}^2 = \bar{R}$ , 于是有

$$\begin{aligned} (R^{12} R^{13}) R^{23} &= [(R^1 \otimes R^2 \otimes 1)(r^1 \otimes 1 \otimes r^2)](1 \otimes \bar{R}^1 \otimes \bar{R}^2) = \\ &= (R^1 r^1 \otimes \alpha(R^2) \otimes \alpha(r^2))(1 \otimes \bar{R}^1 \otimes \bar{R}^2) = \alpha(R^1 r^1) \otimes \\ &= \alpha(R^2) \bar{R}^1 \otimes \alpha(r^2) \bar{R}^2 = R^1 r^1 \otimes R^2 \bar{R}^1 \otimes r^2 \bar{R}^2, \end{aligned}$$

和

$$R^{12}(R^{13}R^{23}) = (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)[(r^1 \otimes 1 \otimes r^2)(1 \otimes \bar{R}^1 \otimes \bar{R}^2)] = (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)(\alpha(r^1) \otimes \alpha(\bar{R}^1) \otimes r^2 \bar{R}^2) = R^1 \alpha(r^1) \otimes R^2 \alpha(\bar{R}^1) \otimes \alpha(r^2 \bar{R}^2) = R^1 r^1 \otimes R^2 \bar{R}^1 \otimes r^2 \bar{R}^2.$$

从而得第1个等式成立,类似可证第2个等式成立.

有了上边命题,对一个 Hom-代数  $(A, \alpha_A)$ , 可以给出  $A \otimes A$  中 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的定义.

**定义 7** 设  $(A, \alpha_A)$  是一个 Hom-代数,  $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A$  满足  $(\alpha_A \otimes \alpha_A)(R) = R$ .

(1)  $R$  称为 Hom-代数  $(A, \alpha_A)$  中 Hom-Hopf 方程的一个解,如果在  $A \otimes A \otimes A$  中,元  $R$  满足

$$(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{12}R^{23}; \quad (20)$$

(2)  $R$  称为 Hom-代数  $(A, \alpha_A)$  中 Hom-Pentagon 方程的一个解,如果在  $A \otimes A \otimes A$  中,元  $R$  满足

$$R^{12}(R^{13}R^{23}) = R^{23}R^{12}, \quad (21)$$

其中  $R^{12} = R^1 \otimes R^2 \otimes 1_A, R^{13} = R^1 \otimes 1_A \otimes R^2, R^{23} = 1_A \otimes R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A \otimes A$ .

**注记 1** (1) 如果  $\alpha_M^2 = \alpha_M$ , 则  $\alpha_M \otimes \alpha_M$  是  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解;

(2) 设  $f, g \in \text{End}(M)$  满足  $f^2 = f, g^2 = g$  和  $\alpha_M(fg) = gf$ , 则有  $R = f \otimes g$  是  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解.

下面命题将给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的关系.

**命题 2** 设  $M$  为一个  $k$ -向量空间,  $\alpha_M \in \text{End}(M), R \in \text{End}(M \otimes M)$ .

(1)  $R$  是  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解的充分必要条件是  $W = \tau R \tau$  是  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Pentagon 方程的一个解;

(2) 若线性映射  $R$  和  $\alpha_M$  均为双射, 则  $R$  是  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解的充分必要条件是  $R^{-1}$  为  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Pentagon 方程的一个解.

**证明** (1) 对  $m, n \in M$ , 记  $R(m \otimes n) = m^R \otimes n^R$ , 则有  $W(m \otimes n) = \tau R \tau(m \otimes n) = m^R \otimes n^R$ . 于是对任意  $m, n, l \in M$ , 有

$$\begin{aligned} W^{12}W^{13}W^{23}(m \otimes n \otimes l) &= W^{12}W^{13}(\alpha_M(m) \otimes n^R \otimes l^R) = W^{12}(r(\alpha_M(m)) \otimes \alpha_M(n^R) \otimes (l^R)^r) = \\ & \quad \bar{R}(r(\alpha_M(m))) \otimes (\alpha_M(n^R))^{\bar{R}} \otimes \alpha_M((l^R)^r), \\ \tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}\tau^{13}(m \otimes n \otimes l) &= \tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}(l \otimes n \otimes m) = \tau^{13}R^{23}R^{13}(l^R \otimes n^R \otimes \alpha_M(m) = \\ & \quad \tau^{13}R^{23}((l^R)^r \otimes \alpha_M(n^R) \otimes r(\alpha_M(m))) = \tau^{13}(\alpha_M((l^R)^r) \otimes (\alpha_M(n^R))^{\bar{R}} \otimes \bar{R}(r(\alpha_M(m)))) = \\ & \quad \bar{R}(r(\alpha_M(m))) \otimes (\alpha_M(n^R))^{\bar{R}} \otimes \alpha_M((l^R)^r). \end{aligned}$$

从而得

$$W^{12}W^{13}W^{23} = \tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}\tau^{13}.$$

类似可得

$$W^{23}W^{12} = \tau^{13}R^{12}R^{23}\tau^{13}.$$

由映射  $\tau$  的可逆性, 故得(1)成立.

(2) 直接验证可得.

此命题(1)说明, Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程是等价的. 从而, 在讨论这两类方程解的问题时, 只需研究 Hom-Hopf 方程即可.

## 2 Hom-Hopf 元与 Hom-Hopf 方程的解

本节将引入 Hom-Hopf 元的概念, 然后讨论 Hom-Hopf 元与 Hom-双代数的左 Hom-模  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的解的关系.

**定义 8** 设  $(H, \alpha)$  为 Hom-双代数,  $A$  为  $H$  的一个子 Hom-代数. 如果中元  $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes H$  满足下面条件

$$\Delta(R^1) \otimes R^2 = R^{13}R^{23}, \quad (22)$$

$$\epsilon(R^1)R^2 = 1_H, \quad (23)$$

$$\Delta^{\text{op}}(a)R = R(1 \otimes a), \forall a \in A, \quad (24)$$

$$(\alpha \otimes \alpha)R = R, \quad (25)$$

则称  $R$  为一个 Hom-Hopf 元, 也称  $(H, A, \alpha, R)$  是一个带有 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数.

**命题 3** 设  $(H, A, R)$  是一个带有 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数, 则在  $A \otimes H \otimes H$  中有

$$(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{23}(R^{13}R^{12}) = R^{12}R^{23}. \quad (26)$$

特别地, 若作为 Hom- 代数  $H = A$ , 则 Hom-Hopf 元  $R$  即为 Hom- 代数  $(H, \alpha_H)$  中 Hom-Hopf 方程的一个解.

**证明** 类似命题 1 的证明, 易证  $(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{23}(R^{13}R^{12})$ . 下证等式 (26) 的第 2 部分成立. 设  $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes H$  为一个 Hom-Hopf 元, 由 (22), 有

$$\Delta^{\text{op}}(R^1) \otimes R^2 = R^{23}R^{13}.$$

记  $r = r^1 \otimes r^2 = R^1 \otimes R^2 = R$ , 有

$$\begin{aligned} R^{12}R^{23} &= (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)(1 \otimes r^1 \otimes r^2) = R(1 \otimes r^1) \otimes \alpha(r^2) = \Delta^{\text{op}}(r^1)R \otimes \alpha(r^2) = \\ &(\Delta^{\text{op}}(r^1) \otimes r^2)(R \otimes 1) = (R^{23}R^{13})R^{12}. \end{aligned}$$

综上所述可得该命题成立.

**定理 2**  $(H, A, \alpha_H, R)$  是一个带 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数,  $(M, \omega, \alpha_M)$  是左  $H$ -Hom- 模且  $\alpha_M$  幂等. 则映射

$$\mathcal{R}: M \otimes M \rightarrow M \otimes M, \mathcal{R}(m \otimes n) = R^1 \cdot m \otimes R^2 \cdot n$$

为  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的一个解.

**证明** 由于  $(\alpha_H \otimes \alpha_H)(R) = R$  和  $\alpha_M(h \cdot m) = \alpha_H(h) \cdot \alpha_M(m)$ , 易证  $(\alpha_M \otimes \alpha_M) \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ (\alpha_M \otimes \alpha_M)$ . 下面只需验证在  $\text{End}(M \otimes M \otimes M)$  中,  $\mathcal{R}$  满足 (18) 即可. 事实上, 对任意  $m, n, l \in M$ , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}(m \otimes n \otimes l) &= \mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}(R^1 \cdot m \otimes R^2 \cdot n \otimes \alpha_M(l)) = \mathcal{R}^{23}(r^1 \cdot (R^1 \cdot m) \otimes \\ &\alpha_M(R^2 \cdot n) \otimes r^2 \cdot \alpha_M(l)) = \alpha_M(r^1 \cdot (R^1 \cdot m)) \otimes \tilde{R}^1 \cdot (\alpha_M(R^2 \cdot n)) \otimes \tilde{R}^2 \cdot \\ &(r^2 \cdot \alpha_M(l) = \alpha_H(r^1) \cdot (\alpha_H(R^1) \cdot \alpha_M(m)) \otimes \alpha_H(\tilde{R}^1) \cdot (\alpha_H(R^2) \cdot \alpha_M(n)) \otimes \\ &\alpha_H(\tilde{R}^2) \cdot (r^2 \cdot \alpha_M(l) = r^1 R^1 \cdot \alpha_M^2(m)) \otimes \tilde{R}^1 R^2 \cdot \alpha_M^2(n) \otimes \tilde{R}^2 r^2 \cdot \alpha_M^2(l) = \\ &\alpha_H(r^1)R^1 \cdot \alpha_M^2(m) \otimes \alpha_H(\tilde{R}^1)R^2 \cdot \alpha_M^2(n) \otimes \alpha_M(\tilde{R}^2 r^2) \cdot \\ &\alpha_M^2(l) = R^{23}R^{13}R^{12} \cdot (\alpha_M^2(m) \otimes \alpha_M^2(n) \otimes \alpha_M^2(l)). \end{aligned}$$

类似的可以证明

$$\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{23}(m \otimes n \otimes l) = R^{12}R^{23} \cdot (\alpha(m) \otimes \alpha(n) \otimes \alpha(l)).$$

由命题 3 中 (26) 式和  $\alpha_M$  的幂等性, 可得  $\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12} = \mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{23}$ . 从而定理得证.

### 3 Hom-Hopf 映射与 Hom-Hopf 方程的解

本节将给出上节的对偶结果. 作为 Hom-Hopf 元的对偶, 引入 Hom-Hopf 映射的概念, 然后讨论 Hom-Hopf 映射和 Hom- 双代数的右余模  $(M, \alpha_M)$  上 Hom-Hopf 方程的解的关系.

**定义 8** 设  $(H, \alpha)$  为 Hom- 双代数,  $A$  为  $H$  的一个子 Hom- 余代数. 如果线性映射  $\sigma: C \rightarrow H \rightarrow k$ , 对于任意  $c \in C, h, k \in H$  满足下面条件

$$\sigma(c_1 \otimes h_1)h_2 c_2 = \sigma(c_2 \otimes \alpha(h))c_1, \quad (27)$$

$$\sigma(c \otimes 1_H) = \epsilon(c), \quad (28)$$

$$\sigma(c \otimes hk) = \sigma(c_1 \otimes \alpha(h))\sigma(c_2 \otimes \alpha(k)), \quad (29)$$

$$\sigma(\alpha \otimes \alpha) = \sigma. \quad (30)$$

则称线性映射  $\sigma$  为一个 Hom-Hopf 映射, 也称  $(H, C, \alpha, \sigma)$  是一个带有 Hom-Hopf 映射的 Hom- 双代数.

设  $(H, \alpha)$  是一个 Hom- 余代数,  $C$  是  $H$  的一个子 Hom- 余代数,  $\sigma: C \otimes H \rightarrow k$  为一个线性映射. 定义  $\sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$  为



- [2] Mac Lane S. Natural associativity and commutativity[J]. Rice Univ Studies, 1963, 49: 4-28.
- [3] Takesaki M. Duality and von Neumann algebra[M]. Berlin: Springer Verlag, 1972.
- [4] van Daele A, van Keer S. The Yang-Baxter and pentagon equation[J]. Compositio Math, 1994, 91: 201-221.
- [5] Davydov A. Pentagon equation and matrix bialgebras[J]. Comm Algebra, 2001, 29: 2627-2650.
- [6] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-algebras structures[J]. J Gen Lie Theory Appl, 2008, 2: 51-64.
- [7] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl, 2010, 9(04): 553-589.
- [8] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin: Springer Verlag, 2009.
- [9] Makhlof A, Panaite F. Yetter-Drinfeld modules for Hom-bialgebras[J]. J Math Phys, 2014, 55: 013501.
- [10] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra, 2010, 8: 45-64.
- [11] Yau D. Hom-Yang-Baxter equation, Hom-Lie algebras and quasitriangular bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor, 2009, 42: 165202.
- [12] Yau D. The Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie algebras[J]. J Math Phys, 2011, 52: 053502.
- [13] Yau D. Hom-quantum groups I: Quasi-triangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor, 2012, 45(6): 065203.
- [14] Yau D. Hom-quantum groups II: Cobraided Hom-bialgebras and Hom-quantum geometry[J]. preprint, 2009, 907: 1890.
- [15] 焦争鸣, 郭敏, 夏正亮. Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2015, 43(1): 1-7.
- [16] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

## Hom-Hopf Elements (Maps) and the Solutions of Hom-Hopf (Pentagon) Equations

JIAO Zhengming, HUANG Gongyu

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** In this paper, the definitions of Hom-Hopf equation, Hom-Pentagon equation, Hom-Hopf element and Hom-Hopf map are introduced. The equivalence of Hom-Hopf equation and Hom Pentagon equation is discussed. Further, it is shown that the Hom-Hopf elements (Hom-Hopf maps) of a Hom-bialgebra  $(H, \alpha)$  can be used to construct the solutions of Hom-Hopf equation over  $(M, \alpha_M)$  which is left H-Hom module (right H-Hom-comodule).

**Keywords:** Hom-bialgebra; Hom-Hopf equation; Hom-Pentagon equation; Hom-Hopf element; Hom-Hopf map