

图的正面影响控制集中贪婪算法的设计与分析

张涛^a,朱莉娟^b

(新乡学院 a.网络管理中心;b.计算机与信息工程学院,河南 新乡 453003)

摘要:对于没有固定基础设施的无线传感器网络,设计一个优良合理的拓扑控制协议是关键.根据图的控制集在无线传感器网络组建虚拟骨干网的应用,研究了图上控制集问题的一个变形—正面影响控制集问题.针对图中是否存在孤立顶点,分两种情形讨论,设计了相应的贪婪算法,并分析了算法的性能比.

关键词:无线传感器网络;图;控制集;贪婪算法;性能比

中图分类号:TP393

文献标志码:A

近年来,无线网在社会中应用越来越广.其中如 AdHoc 网是一种无基础设施的无线通信网络,其特性有别于有线基础网络.日常使用的有线网络是不受能源供应所限,但是在普通的无线网络中网络节点的能量功率问题是必须考虑的.因此在普通的无线网络里组建一个骨干网来负责路由通信的功能,对那些依靠电池供电的无线设备以及无线网络的来说变得非常重要.

控制集(DS)已被广泛用在无线网络的活动节点集的选取上,以建立无线网络中的虚拟骨干网络^[1-4].节点之间不连通的 DS 是一个独立集.许多学者对应用连通控制集(CDS)作为无线网络虚拟骨干网的方法进行了大量的研究^[5-11],从而使 DS 成为能够担当起无线网络中拓扑控制、搜索、广播信息、节点覆盖等多种任务的虚拟骨干网.

通过研究连通控制集问题的算法来寻找控制集,并以此为基础来构建连通控制集,对于无线网络的虚拟骨干网的组建有着十分重要的意义.下面来探讨研究图的正面影响控制集问题.

首先给定图 $G=(V,E)$,寻找最小控制集(minimum dominating set) A ,使得对每个顶点 $v \in V$, A 中至少存在 v 的 $\lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil$ 个邻点,其中 $\deg(v)$ 是 v 的度,通常称之为正面影响控制集(Positive Influence Dominating Set, PIDS)问题.下面对于这个问题分两种情形讨论:第 1 种是图中不存在度为零的顶点,即孤立顶点;第 2 种是图中存在孤立顶点.

1 图中不存在孤立顶点的情形

若图中不存在孤立顶点,那么顶点度的最小值为 1,则 $\min_{v \in V} \lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil = 1$.若 A 满足条件:对每个顶点 $v \in V$, A 中至少存在 v 的 $\lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil$ 个邻点,则 A 中一定包含每个顶点的至少一个邻点, A 即为控制集.所以正面影响控制集问题可变为:寻找顶点个数最少的顶点子集 A ,使得对每个顶点 $v \in V$, A 中至少存在 v 的 $\lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil$ 个邻点.

对于顶点子集 $A, v \in V$,设 $nei(v_A)$ 是顶点 v 在 A 中的邻点个数,定义

收稿日期:2014-10-28

基金项目:河南省重点科技攻关项目(092102210149)

作者简介:张涛(1980—),男,河南新乡人,新乡学院讲师,研究方向为计算机网络及计算机应用技术,E-mail:zhangtao.xxu@163.com.

$$w(v) = \begin{cases} nei(v_A), & nei(v_A) \leq \lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil, \\ \lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil, & nei(v_A) > \lceil \frac{\deg(v)}{2} \rceil. \end{cases}$$

$f_1(A) = \sum_{i=1}^n w(v_i)$, n 是图中顶点的个数. 显然, $f_1(\phi) = 0$; 当且仅当 $f_1(A) = \sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil$ 时, A 是正面影响控制集. 定义 $\Delta_v f_1(A) = f_1(A \cup \{v\}) - f_1(A)$.

下面, 给出贪婪算法及性能比的理论分析.

贪婪算法 1:

$A \leftarrow \phi$;

当存在 $v \in V$ 使 $\Delta_v f_1(A) > 0$,

选择顶点 v 得 $\Delta_v f_1(A)$ 最大,

并且令 $A \leftarrow A \cup \{v\}$;

输出 A .

下面证明的问题可归约为次模覆盖问题.

引理 1 A 是正面影响控制集, 当且仅当对于任意顶点 v , $\Delta_v f_1(A) = 0$.

证明 如果 A 是正面影响控制集, 那么 $f_1(A) = \sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil$, 达到了 f_1 的最大值, 所以对于任意顶点 v , $\Delta_v f_1(A) = 0$.

相反地, 如果对于任意顶点 v , $\Delta_v f_1(A) = 0$, 证明 A 是正面影响控制集. 用反证法, 假定 A 不是正面影响控制集, 那么存在顶点 v_0 , 满足 $nei(v_{0A}) < \lceil \frac{\deg(v_0)}{2} \rceil$. 此时 v_0 一定存在不包含在 A 中的邻点, 选择这样的一个邻点 u , 显然 $\Delta_u f_1(A) > 0$, 矛盾.

在证明引理 2 之前, 由于次模函数在次模覆盖问题和贪婪算法中发挥着很重要的作用, 我们这里简要介绍次模函数的概念及相关性质.

定义 1^[12] 考虑有限集合 X (基集合), 以及定义在幂集合 2^X (即 X 的所有子集的族) 上的实函数 f , 如果对 X 的任意两个子集 A 和 B , f 满足

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cap B) + f(A \cup B), \quad (1)$$

则称 f 是次模函数 (submodular function).

如果 $-f$ 是次模的, 那么称 f 是 supmodular. 对任意子集 C 和 D , 定义 $\Delta_D f(C) = f(C \cup D) - f(C)$, 那么 (1) 式也可写为

$$\Delta_D f(A \cap B) \geq \Delta_D f(B), \quad (2)$$

这里 $D = A \setminus B$. 特别当 $D = \{x\}$ 是单元素集时, 我们可将 $\Delta_{\{x\}} f(C)$ 简记为 $\Delta_x f(C)$.

定义 2^[12] 如果 $A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$, 则称 f 是单调增加的.

性质 1^[12] 设 X 是基集合, f 是 2^X 上的函数, 那么 f 是单调增加次模函数当且仅当对任意子集 $A \subseteq B$, $x \in X$, 一定有 $\Delta_x f(A) \geq \Delta_x f(B)$.

引理 2 $f_1(A)$ 是单调增加次模函数.

证明 对于 $A \subseteq V$, $v \in V$, 记 $T(A, v) = \{u \mid (u, v) \in E, nei(u_A) < \lceil \frac{\deg(u)}{2} \rceil\}$, 则 $\Delta_v f_1(A) = |T(A, v)|$. 若 $A \subseteq B$, 显然 $nei(u_A) \leq nei(u_B)$, 则 $T(A, v) \supseteq T(B, v)$, 所以 $\Delta_v f_1(A) \geq \Delta_v f_1(B)$, 根据次模函数的性质 1, f_1 是单调增加次模函数.

定理 1 对于正面影响控制集问题, 贪婪算法 1 的性能比是 $H(\Delta)$, 这里 Δ 是图中顶点的度的最大值.

证明 从上述事实 and 贪婪算法 1 可以推定, 正面影响控制集问题可以归约为次模覆盖问题, 且

$$\gamma = \max\{\Delta_v f_1(\phi) \mid v \in V\} = \max\{f_1(v) - f_1(\phi) \mid v \in V\} = \max\{f_1(v) \mid v \in V\} = \Delta,$$

所以, 贪婪算法 1 的性能比是 $H(\Delta)$.

2 图中存在孤立顶点的情形

当图中存在孤立顶点时,设计了两个贪婪算法来求解.

2.1 第1个算法

对于存在孤立顶点的图,可以分为两部分:第1部分包含所有的孤立顶点,第2部分为所有度不为0的顶点和边.对这两部分分别求解,然后把解结合起来.

对于第1部分,每个孤立顶点只能被自身控制,所以必须将它们全部选择.假定图中孤立顶点数为 g_0 ,则不论是最优解还是近似解,都包含这 g_0 个孤立顶点.

对于第2部分,我们可以用第1节的算法求解.设由贪婪算法1求得的近似解中的顶点数为 g' ,而最优解中的顶点数为 opt' ,则根据定理3, $g' \leq opt' H(\Delta)$,与第一部分相结合,

$$g = g_0 + g' \leq g_0 + opt' H(\Delta) \leq g_0 H(\Delta) + opt' H(\Delta) = (g_0 + opt') H(\Delta) = opt H(\Delta).$$

算法的性能比是 $H(\Delta)$,与图中不存在孤立顶点的情形相同,但这不是一个纯粹的贪婪算法,而是贪婪算法与分割技术的融合.

2.2 第2个算法

本节设计一个纯粹的贪婪算法.

对于 V 的任意子集 A ,定义 $h(A)$ 是未被 A 控制的顶点数, $f_1(A)$ 如第1节中定义.令 $f_2(A) = -h(A) -$

$$\sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil + f_1(A), \text{显然, } f_2(\phi) = -n - \sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil.$$

贪婪算法2.

$A \leftarrow \phi;$

当存在 $v \in V$ 满足 $\Delta_v f_2(A) > 0$,

选择顶点 v 使得 $\Delta_v f_2(A)$ 最大,

并且令 $A \leftarrow A \cup \{v\};$

输出 A .

引理3 A 是正面影响控制集,当且仅当对于任意顶点 $v, \Delta_v f_2(A) = 0$.

证明 若 A 是正面影响控制集,则 $f_2(A) = 0$,达到了 f_2 的最大值,所以对于任意顶点 $v, \Delta_v f_2(A) = 0$.

相反地,如果对于任意顶点 $v, \Delta_v f_2(A) = 0$,证明 A 是正面影响控制集.用反证法,假定 A 不是正面影响控制集,那么或者存在未被 A 控制的顶点,或者存在顶点 v_0 ,满足 $nei(v_{0A}) < \lceil \frac{\deg(v_0)}{2} \rceil$.在前一种情形,选择一个未被 A 控制的顶点 v_1 ,则 $-\Delta_{v_1} h(A) > 0, \Delta_{v_1} f_1(A) \geq 0$;在后一种情形, v_0 一定存在不包含在 A 中的邻点,选择这样的邻点 u ,显然 $\Delta_u f_1(A) > 0, -\Delta_u h(A) \geq 0$.在这两种情形,均存在 v ,使得 $\Delta_v f_2(A) > 0$,矛盾.

引理4 $f_2(A)$ 是单调增加次模函数.

证明 对于 $A \subseteq V, v \in V, -\Delta_v h(A)$ 表示未被 A 控制而被 v 控制的顶点数.若 $A \subseteq B$,显然 A 控制的顶点全部包含在 B 控制的顶点中, v 控制的顶点是一定的,所以 $-\Delta_v h(A) \geq -\Delta_v h(B)$,根据次模函数的性质1, $-h$ 是单调增加次模函数.由引理2, $f_1(A)$ 是单调增加次模函数.所以, $f_2(A)$ 是单调增加次模函数.

定理2 对于正面影响控制集问题,贪婪算法2的性能比是 $H(2\Delta + 1)$,这里 Δ 是图中顶点的度的最大值.

证明 从上述事实 and 贪婪算法2可以推定,正面影响控制集问题可以归约为次模覆盖问题,且

$$\gamma = \max\{\Delta_v f_2(\phi) \mid v \in V\} = \max\{f_2(v) - f_2(\phi) \mid v \in V\} = -(n - (\Delta + 1)) -$$

$$\sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil + \Delta - \left(-n - \sum_{i=1}^n \lceil \frac{\deg(v_i)}{2} \rceil \right) = 2\Delta + 1.$$

所以,贪婪算法2的性能比是 $H(2\Delta + 1)$.

3 结 论

本文研究了图上的控制集问题的一个变形——正面影响控制集问题. 根据图中是否存在孤立顶点, 分两种情形讨论: 对于图中不存在孤立顶点的情形, 设计贪婪算法并将问题归约为次模覆盖问题, 证明其性能比是 $H(\Delta)$; 对于图中存在孤立顶点的情形, 设计了两个不同思路的算法. 第1个算法, 把图分为两个部分, 对这两个部分分别求解, 再将解结合起来构成原问题的解, 这体现了贪婪技术与分割技术相融合的思想, 性能比是 $H(\Delta)$; 第2个算法思路与图中不含孤立顶点的情形相似, 同样设计贪婪算法并将问题归约为次模覆盖问题, 证明其性能比是 $H(2\Delta + 1)$. 本文的结论对解决图上的连通边控制集问题以及无线网络的研究方面都有借鉴意义.

参 考 文 献

- [1] Dai Fei, Wu Jie. An Extended Localized Algorithms for Connected Dominating Set Formation in Ad Hoc Wireless Networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2004, 15(10): 908-920.
- [2] Du Dingzhu, Thai M T, Li Yingshu, et al. Strongly Connected Dominating Sets in Wireless Sensor Networks with Unidirectional Links [C]. 8 th Asia-Pacific Web Conference, Harbiy, 2006.
- [3] Thai M T, Tiwari R, Du Dingzhu. On Construction of Virtual Backbone in Wireless Ad Hoc Networks with Unidirectional Links[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2008, 7(9): 1098-1109.
- [4] Thai M T, Wang Feng, Liu Dan, et al. Connected Dominating Sets in Wireless Networks with Different Transmission Ranges[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2007, 6(7): 721-730.
- [5] Li Deying, Du Hongwei, Wan Pengjun, et al. Construction of strongly connected dominating sets in asymmetric multihop wireless networks[J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(8/9/10): 661-669.
- [6] Dunbar J E, Grossman J W, Hattingh J H, et al. On weakly connected domination in graphs[J]. Discrete Mathematics, 1997, 167-168: 261-269.
- [7] 陈聪聪. 无线传感器网络虚拟骨干网构造算法研究[D]. 山东: 曲阜师范大学, 2013.
- [8] Wu J, Li H. On calculating connected dominating set for efficient routing in Ad hoc wireless networks[C]. Proc of the 3rd Int'l Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communications (DiaLM), Seattle, 1999.
- [9] Chen Yuanzhu P, Liestman A L. Maintaining weakly-connected dominating sets for clustering ad hoc networks[J]. Ad Hoc Networks, 2005, 3(5): 629-642.
- [10] Xiao Mingyu, Nagamochi H. A Refined Exact Algorithm for Edge Dominating Set[J]. Theory and Applications of Models of Computation, 2012(2): 360-372.
- [11] Cardinal J, Langerman S, Levy E. Improved Approximation Bounds for Edge Dominating Set in Dense Graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(8/9/10): 949-957.
- [12] 堵丁柱, 葛可一, 王 洁. 计算复杂性导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

Design and Analysis of Greedy Algorithm the Deformation-positive Influence Dominating Set in Gragh

ZHANG Tao^a, ZHU Lijuan^b

(a. Department of Network Management Center; b. College of Computer and Information Engineering, Xinxiang university, Xinxiang 453003, China)

Abstract: It is necessary to design good and reasonable topology protocol to prolong the lifetime of sensor nodes and the whole network. According to the chart control set in the application of wireless sensor network to form a virtual backbone network, we studies positive influence dominating set problem in graph, which is a variant of dominating set problem in graph. We divide the problem into two cases according to whether there are isolated vertices in graph, then design greedy algorithms and analyze performance ratios respectively.

Keywords: wireless sensor network; graph; dominating set; greedy algorithm; performance ratio