

# 具有 Gauss 白噪声和 Lévy 噪声的似然竞争模型分析

王小攀<sup>a</sup>, 李爽<sup>b</sup>

(河南师范大学 a.新联学院; b.数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

**摘要:** 研究了一个带有食饵庇护的随机似然竞争模型, 采用 Gauss 白噪声和 Lévy 噪声来模拟环境的随机扰动. 通过利用比较定理和伊藤公式, 得到了随机模型存在全局正解的结论以及种群灭绝、均值稳定、均值强持续生存的阈值条件. 研究结果表明无论是 Gauss 白噪声还是 Lévy 噪声对于种群的持续生长都是不利的, 因此建模时很有必要考虑环境的随机变化.

**关键词:** 似然竞争模型; 食饵庇护; Gauss 白噪声; Lévy 噪声; 均值稳定

**中图分类号:** O29

**文献标志码:** A

Holt 在文献[1]中提出了似然竞争模型, 表述为如果一种捕食者同时以两种食饵为食, 其中一种食饵的增加导致捕食者数量的增加, 从而增大了另一种食饵被捕食的风险. 两种食饵以捕食者为中介相互影响, 相互作用. 近年来, 似然竞争模型在保护生物种群多样性的过程中得到了广泛的应用, 见文献[2-7]. 食饵庇护是指在生态系统中, 食饵为了避免被捕食者捕食, 采取不同形式的庇护方法, 时间庇护和空间庇护被认为是两种典型的庇护方法. 目前, 对于带有食饵庇护的捕食-被捕食模型已经有了一定的研究<sup>[8-11]</sup>.

在文献[12]中, 作者介绍了一个带有食饵庇护的似然竞争系统,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - a_1 (1 - \beta_1) x z, \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - a_2 (1 - \beta_2) y z, \\ \frac{dz}{dt} = a_1 e_1 (1 - \beta_1) x z + a_2 e_2 (1 - \beta_2) y z - d_1 z, \end{cases} \quad (1)$$

这里  $x$  和  $y$  分别是两种食饵的种群密度,  $z$  是捕食者的种群密度,  $r_i$  是食饵种群的内禀增长率,  $K_i$  为食饵种群的环境容纳量,  $a_i$  为捕食率,  $e_i$  为营养转化率,  $\beta_i \in [0, 1]$  为食饵庇护比例,  $i = 1, 2, d_1$  为捕食者种群的死亡率.

然而在自然界中, 用确定性模型来刻画种群之间的关系已经不能真实地反映种群的生长状况, 尤其是在样本空间较小、物种濒临灭绝的时刻, 自然界任何突然的变化对于种群的影响都是巨大的. 近年来, 已有大量学者研究考虑自然环境随机波动的随机生态模型, 主要采用 Gauss 白噪声和 Lévy 噪声来模拟自然界连续稳定和突然的随机扰动, 并且取得了一定的成果, 参见文献[13-17]. 为了更加符合实际情况, 本文对模型(1)引入 Gauss 白噪声和 Lévy 噪声, 研究其对应的随机似然竞争模型:

$$\begin{cases} dx(t) = \left[ r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - a_1 (1 - \beta_1) x z \right] dt + \sigma_1 x(t) dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) x(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ dy(t) = \left[ r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - a_2 (1 - \beta_2) y z \right] dt + \sigma_2 y(t) dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) y(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ dz(t) = \left[ a_1 e_1 (1 - \beta_1) x z + a_2 e_2 (1 - \beta_2) y z - d_1 z \right] dt + \sigma_3 z(t) dB_3(t) + \int_Y \gamma_3(u) z(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2018-05-22; 修回日期: 2018-11-07.

基金项目: 国家自然科学基金(11601131); 河南省高等学校重点科研资助项目(18A110021).

作者简介: 王小攀(1982-), 男, 河南南阳人, 河南师范大学讲师, 主要从事生物数学的研究, E-mail: xiaopan\_000@163.com.

通信作者: 李爽, E-mail: oklishuang@163.com.

这里  $x(t^-), y(t^-), z(t^-)$  分别是  $x(t), y(t), z(t)$  的左极限,  $\tilde{N}(dt, du) = N(dt, du) - \lambda(du)dt$ ,  $N$  为在  $(0, +\infty)$  中的可测集  $Y$  上具有特征测度  $\lambda$  的泊松计数测度, 即  $\lambda(Y) < \infty; \gamma_i(u): Y \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  关于特征测度  $\lambda$  有界连续,  $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{F}_t$  可测, 且  $\gamma_i(u) > -1, i = 1, 2, 3$ .

## 1 主要结果

下面为了书写方便, 引入记号:  $m_i = \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Y [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du), M_i(t) = \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_i(u)) \tilde{N}(ds, du), i = 1, 2, 3$ . 显然  $m_i > 0$ .

**定理 1** 模型(2)对于任意初值  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}_+^3$ , 均有唯一的全局正解存在.

**证明** 作变换  $u_1(t) = \ln x(t), u_2(t) = \ln y(t), u_3(t) = \ln z(t)$ , 模型(2)等价转化为,

$$\begin{cases} du_1(t) = \left\{ r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} - \int_Y [\gamma_1(u) - \ln(1 + \gamma_1(u))] \lambda(du) - \frac{r_1 \exp(u_1(t))}{K_1} - a_1(1 - \beta_1) \exp(u_3(t)) \right\} dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u)) \tilde{N}(dt, du), \\ du_2(t) = \left\{ r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} - \int_Y [\gamma_2(u) - \ln(1 + \gamma_2(u))] \lambda(du) - \frac{r_2 \exp(u_2(t))}{K_2} - a_2(1 - \beta_2) \exp(u_3(t)) \right\} dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du), \\ du_3(t) = \left\{ -d_1 - \frac{\sigma_3^2}{2} - \int_Y [\gamma_3(u) - \ln(1 + \gamma_3(u))] \lambda(du) + a_1 e_1 (1 - \beta_1) \exp(u_1(t)) + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \exp(u_2(t)) \right\} dt + \sigma_3 dB_3(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_3(u)) \tilde{N}(dt, du). \end{cases} \quad (3)$$

显然模型(3)的系数满足局部 Lipschitz 连续的条件, 此时模型(3)有一个唯一的局部解  $(u_1(t), u_2(t), u_3(t)), t \in [0, \tau_e)$ , 其中  $\tau_e$  为爆破时刻, 即模型(2)有一个唯一的局部正解  $(\exp(u_1(t)), \exp(u_2(t)), \exp(u_3(t))), t \in [0, \tau_e)$ . 讨论以下随机微分方程组,

$$\begin{cases} d\Phi_1(t) = \left[ r_1 \Phi_1(t) \left( 1 - \frac{\Phi_1(t)}{K_1} \right) \right] dt + \sigma_1 \Phi_1(t) dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \Phi_1(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ d\Phi_2(t) = \left[ r_2 \Phi_2(t) \left( 1 - \frac{\Phi_2(t)}{K_2} \right) \right] dt + \sigma_2 \Phi_2(t) dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \Phi_2(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ d\Phi_3(t) = \left[ \Phi_3(t) [a_1 e_1 (1 - \beta_1) \Phi_1(t) + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \Phi_2(t) - d_1] \right] dt + \sigma_3 \Phi_3(t) dB_3(t) + \int_Y \gamma_3(u) \Phi_3(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (4)$$

满足初值条件  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}_+^3$ . 利用文献[13]中的引理 4.2, 可知:  $\Phi_1(t) = \frac{W_1(t)}{x_0^{-1} + \int_0^t W_1(s) \frac{r_1}{K_1} ds}, W_1(t) =$

$\exp\{(r_1 - m_1)t + \sigma_1 B_1(t) + M_1(t)\}$ .  $\Phi_1(t)$  为全局正解; 同理  $\Phi_2(t)$  也是全局正解, 二者均不会在有限时间内发生爆破. 而  $\Phi_3(t) = z_0 \exp\{a_1 e_1 (1 - \beta_1) \int_0^t \Phi_1(s) ds + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \int_0^t \Phi_2(s) ds - [d + \frac{\sigma_3^2}{2} + \int_Y [\gamma_3(u) - \ln(1 + \gamma_3(u))] \lambda(du)]t + \sigma_3 B_3(t) + \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_3(u)) \tilde{N}(ds, du)\}$ . 同理对于方程组

$$\begin{cases} d\Psi_1(t) = \Psi_1(t) \left[ r_1 \left( 1 - \frac{\Psi_1(t)}{K_1} \right) - a_1 \Psi_3(t) \right] dt + \sigma_1 \Psi_1(t) dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \Psi_1(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ d\Psi_2(t) = \Psi_2(t) \left[ r_2 \left( 1 - \frac{\Psi_2(t)}{K_2} \right) - a_2 \Psi_3(t) \right] dt + \sigma_2 \Psi_2(t) dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \Psi_2(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ d\Psi_3(t) = \Psi_3(t) [a_1 e_1 (1 - \beta_1) \Psi_1(t) + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \Psi_2(t) - d_1] dt + \sigma_3 \Psi_3(t) dB_3(t) + \int_Y \gamma_3(u) \Psi_3(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (5)$$

满足初值条件  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}_+^3$ , 再次利用文献[13]中的引理 4.2, 可知  $\Psi_1(t)$  和  $\Psi_2(t)$  为全局正解, 而

$$\Psi_3(t) = z_0 \exp\{a_1 e_1 (1 - \beta_1) \int_0^t \Psi_1(s) ds + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \int_0^t \Psi_2(s) ds - [d_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} + \int_Y [\gamma_3(u) - \ln(1 + \gamma_3(u))] \lambda(du)] t + \sigma_3 B_3(t) + \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_3(u)) \tilde{N}(ds, du)\}.$$

根据比较定理可知,

$$\Psi_1(t) \leq x(t) \leq \Phi_1(t), \Psi_2(t) \leq y(t) \leq \Phi_2(t), \Psi_3(t) \leq z(t) \leq \Phi_3(t), t \in [0, \tau_e), \text{ a.s.}$$

注意到  $\Phi_i(t)$  与  $\Psi_i(t) (i=1, 2, 3)$  的存在区间为  $[0, +\infty)$ , 因此模型(2)的解为全局存在的正解.

**定理 2** 若  $r_i > m_i, \int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) < c, i=1, 2, \dots, c$  为常数, 则模型(2)的解  $(x(t), y(t), z(t))$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq 0, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leq 0, \text{ a.s.}$$

**证明** 根据方程组(4)可知,

$$d \ln \Phi_1(t) = \{r_1 - m_1 - \frac{r_1}{K_1} \Phi_1(t)\} dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u)) \tilde{N}(dt, du),$$

此时两边在  $[0, t]$  上积分, 并除以  $t$  得:

$$\frac{\ln \Phi_1(t) - \ln \Phi_1(0)}{t} = r_1 - m_1 - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}, \quad (6)$$

由于  $\int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) < c$ , 从而  $\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = t \int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) < ct$ , 根据文献[13]中的引理 3.1 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0, \text{ a.s. } (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

又  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi_1(0)}{t} = 0$ , 对任取的正数  $\epsilon$ , 存在  $T > 0$  使得当  $t > T$  时

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{\ln \Phi_1(0)}{t} < \frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2} < \frac{M_1(t)}{t} < \frac{\epsilon}{2}.$$

代入(6)式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\ln \Phi_1(t)}{t} &\leq r_1 + \epsilon - m_1 - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}, \\ \frac{\ln \Phi_1(t)}{t} &\geq r_1 - \epsilon - m_1 - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}, \end{aligned}$$

因为  $r_1 > m_1$ , 根据文献[18]中的引理 3.2, 得到

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds &\leq \frac{K_1(r_1 + \epsilon - m_1)}{r_1}, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds &\geq \frac{K_1(r_1 - \epsilon - m_1)}{r_1}. \end{aligned}$$

利用  $\epsilon$  的任意性, 得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_1(s) ds = \frac{K_1(r_1 - m_1)}{r_1}$ . 将上式代入(6), 又  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_1(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi_1(0)}{t} = 0$  以

及(7)式, 得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi_1(t)}{t} = 0, \text{ a.s.}$  根据比较定理, 得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi_1(t)}{t} = 0, \text{ a.s.},$$

同理可证  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leq 0, \text{ a.s.}$

## 2 均值稳定与灭绝

在开始讨论之前,先引入一些定义,假设  $m(t)$  代表某种群  $t$  时刻的种群密度,有如下定义.灭绝:

$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0$ ;均值稳定:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v) dv > 0$ ;均值强持续生存:  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v) dv > 0$ ;均值弱持续生存:

$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v) dv > 0$ . 对于模型(2),利用伊藤公式,得

$$\begin{cases} d \ln x(t) = [r_1 - m_1 - \frac{r_1 x(t)}{K_1} - a_1(1 - \beta_1)z(t)]dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u))\tilde{N}(dt, du), \\ d \ln y(t) = [r_2 - m_2 - \frac{r_2 y(t)}{K_2} - a_2(1 - \beta_2)z(t)]dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u))\tilde{N}(dt, du), \\ d \ln z(t) = [-d_1 - m_3 + a_1 e_1(1 - \beta_1)x(t) + a_2 e_2(1 - \beta_2)y(t)]dt + \sigma_3 dB_3(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_3(u))\tilde{N}(dt, du). \end{cases} \quad (8)$$

上述方程组在  $[0, t]$  上积分,并除以  $t$  得

$$\begin{cases} \frac{\ln x(t) - \ln x_0}{t} = (r_1 - m_1) - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds - a_1(1 - \beta_1) \frac{1}{t} \int_0^t z(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}, \\ \frac{\ln y(t) - \ln y_0}{t} = (r_2 - m_2) - \frac{r_2}{K_2} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds - a_2(1 - \beta_2) \frac{1}{t} \int_0^t z(s) ds + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{M_2(t)}{t}, \\ \frac{\ln z(t) - \ln z_0}{t} = (-d_1 - m_3) + a_1 e_1(1 - \beta_1) \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + a_2 e_2(1 - \beta_2) \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds + \frac{\sigma_3 B_3(t)}{t} + \frac{M_3(t)}{t}. \end{cases} \quad (9)$$

**定理 3** 对于模型(2)的两个食饵种群和捕食者种群,有

(I) 当  $r_1 < m_1, r_2 < m_2$  时,所有的食饵种群  $x(t), y(t)$  和捕食者种群  $z(t)$  均走向灭绝.

(II) 当  $r_1 > m_1, r_2 < m_2$  且  $\frac{a_1 e_1(1 - \beta_1)(r_1 - m_1)K_1}{r_1} < d_1 + m_3$  时,食饵种群  $y(t)$  和捕食者种群  $z(t)$

灭绝,而另一食饵种群  $x(t)$  为均值稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, a.s..$

(III) 当  $r_1 < m_1, r_2 > m_2$  且  $\frac{a_2 e_2(1 - \beta_2)(r_2 - m_2)K_2}{r_2} < d_1 + m_3$  时,食饵种群  $x(t)$  和捕食者种群

$z(t)$  灭绝,而另一食饵种群  $y(t)$  为均值稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{(r_2 - m_2)K_2}{r_2}, a.s..$

(IV) 当  $\frac{r_i}{K_i} > a_i e_i(1 - \beta_i), \frac{r_1 + r_2 - d_1 - \sum_{i=1}^3 m_i}{\mu} > \sum_{i=1}^2 \frac{(r_i - m_i)K_i}{r_i}$ , 且  $r_i > m_i, i=1, 2$  时,食饵种群

$x(t)$  和  $y(t)$  分别满足  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, a.s., \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \leq \frac{(r_2 - m_2)K_2}{r_2}, a.s..$

捕食者种群  $z(t)$  为均值强持续生存的,即  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t z(s) ds \geq \frac{r_1 + r_2 - d_1 - \sum_{i=1}^3 m_i}{\mu} - \sum_{i=1}^2 \frac{(r_i - m_i)K_i}{r_i}$ .

**证明** (I) 由于

$$t^{-1} \ln \frac{x(t)}{x_0} \leq (r_1 - m_1) - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}, \quad (10)$$

当  $r_1 < m_1$  时,利用文献[17]中的引理 2,知  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, a.s..$ 同理可得,当  $r_2 < m_2$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, a.s..$ 此

时对于任意的  $\epsilon_1 > 0$ ,存在  $T_1 > 0$  使得当  $t > T_1$  时,  $-\epsilon_1 < x(t) < \epsilon_1, -\epsilon_1 < y(t) < \epsilon_1$ . 则

$$t^{-1} \ln \frac{z(t)}{z_0} \leq (-d_1 - m_3) + [a_1 e_1 (1 - \beta_1) + a_2 e_2 (1 - \beta_2)] \epsilon_1 + \frac{\sigma_3 B_3(t)}{t} + \frac{M_3(t)}{t},$$

由于  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_3(t)}{t} = 0$  以及(7)式, 得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln z(t)}{t} \leq -d_1 - m_3 < 0$ , 这意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ .

(II) 当  $r_1 > m_1$  时, 则由(10)式以及引理 2<sup>[17]</sup>, 可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, \text{ a.s.}, \quad (11)$$

当  $r_2 < m_2$  时, 此时  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a.s.}$  而对于  $\epsilon_2 > 0$ , 存在  $T_2 > 0$  使得当  $t > T_2$  时,  $-\epsilon_2 < y(t) < \epsilon_2$ , 于是

$$t^{-1} \ln \frac{z(t)}{z_0} \leq (-d_1 - m_3) + a_1 e_1 (1 - \beta_1) \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + a_2 e_2 (1 - \beta_2) \epsilon_2 + \frac{\sigma_3 B_3(t)}{t} + \frac{M_3(t)}{t},$$

易得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln z(t)}{t} \leq (-d_1 - m_3) + a_1 e_1 (1 - \beta_1) \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}$ . 当  $a_1 e_1 (1 - \beta_1) \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1} < d + m_3$

时,  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln z(t)}{t} < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ , 对  $\forall \epsilon_3 > 0, \exists T_3 > 0$  使得当  $t > T_3$  时,  $-\epsilon_3 < z(t) < \epsilon_3$ , 则

$$t^{-1} \ln \frac{x(t)}{x_0} \geq (r_1 - m_1) - \frac{r_1}{K_1} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds - a_1 (1 - \beta_1) \epsilon_3 + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t},$$

利用引理 2<sup>[17]</sup> 及  $\epsilon_3$  的任意性, 得当  $r_1 > m_1$  时有  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, \text{ a.s.}$  联合(11)式, 可

知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, \text{ a.s.}$

(III) 与(II)部分证明类似, 此处省略.

(IV) 当  $r_1 > m_1, r_2 > m_2$  时, 则易得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1}, \text{ a.s.}, \quad (12)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \leq \frac{(r_2 - m_2)K_2}{r_2}, \text{ a.s.} \quad (13)$$

根据(9)式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\ln x(t) + \ln y(t) + \ln z(t)}{t} - \frac{\ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0}{t} = (r_1 - m_1) + (r_2 - m_2) - (d_1 + m_3) - \\ & \left[ \frac{r_1}{K_1} - a_1 e_1 (1 - \beta_1) \right] \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds - \left[ \frac{r_2}{K_2} - a_2 e_2 (1 - \beta_2) \right] \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds - \\ & [a_1 (1 - \beta_1) + a_2 (1 - \beta_2)] \frac{1}{t} \int_0^t z(s) ds + \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_i B_i(t)}{t} + \sum_{i=1}^3 \frac{M_i(t)}{t}, \end{aligned}$$

当  $\frac{r_i}{K_i} > a_i e_i (1 - \beta_i), i = 1, 2$  时, 取  $\mu = \max \left\{ \frac{r_i}{K_i} - a_i e_i (1 - \beta_i), i = 1, 2, a_1 (1 - \beta_1) + a_2 (1 - \beta_2) \right\}$ , 则

$$\begin{aligned} & \frac{\ln[x(t)y(t)z(t)]}{t} - \frac{\ln[x_0 y_0 z_0]}{t} \geq (r_1 - m_1) + (r_2 - m_2) - (d_1 + m_3) - \\ & \mu \frac{1}{t} \int_0^t [x(s) + y(s) + z(s)] ds + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i B_i(t)}{t} + \frac{M_i(t)}{t} \right), \end{aligned}$$

利用不等式  $(x_1 + x_2 + x_3)^3 \geq 6x_1 x_2 x_3$ , 这里  $x_i \in \mathbf{R}^+, i = 1, 2, 3$ . 可知:  $3 \ln[x(t)y(t)z(t)] \geq \ln 6 + \ln[x(t)y(t)z(t)]$ , 因此

$$\begin{aligned} & \frac{3 \ln[x(t)y(t)z(t)]}{t} - \frac{\ln 6}{t} - \frac{\ln[x_0 y_0 z_0]}{t} \geq (r_1 - m_1) + (r_2 - m_2) - \\ & (d_1 + m_3) - \mu \frac{1}{t} \int_0^t [x(s) + y(s) + z(s)] ds + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i B_i(t)}{t} + \frac{M_i(t)}{t} \right), \end{aligned}$$

显然  $r_1 + r_2 > d_1 + \sum_{i=1}^3 m_i$ , 利用文献[17]中的引理 2, 得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [x(s) + y(s) + z(s)] ds \geq \frac{r_1 + r_2 - d_1 - \sum_{i=1}^3 m_i}{\mu}.$$

注意到(12)和(13)式,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t z(s) ds &\geq \frac{r_1 + r_2 - d_1 - \sum_{i=1}^3 m_i}{\mu} - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds - \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds &\geq \frac{r_1 + r_2 - d_1 - \sum_{i=1}^3 m_i}{\mu} - \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1} - \frac{(r_2 - m_2)K_2}{r_2}. \end{aligned}$$

### 3 数值模拟

为了验证文中的结论,下面采用文献[19]中的方法对方程(2)进行数值模拟.首先选取系数  $a_1 = a_2 = 0.5, \beta_1 = \beta_2 = 0.2, e_1 = e_2 = 0.8, K_1 = K_2 = 1, d_1 = 0.3$ , 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5), Y = (0, +\infty), \lambda(Y) = 1$ . 下面改变部分参数的值观察随机方程(2)的解的渐近行为.

(1)在图 1 中,选取  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.8, \sigma_3 = 0.5, r_1 = 0.2, r_2 = 0.3, \gamma_1(u) = \gamma_2(u) = 0.2, \gamma_3(u) = -0.2$ , 则此时对应的

$$m_1 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_Y [\gamma_1(u) - \ln(1 + \gamma_1(u))] \lambda(du) = 0.3377, m_2 = 0.3377, m_3 = 0.1481.$$

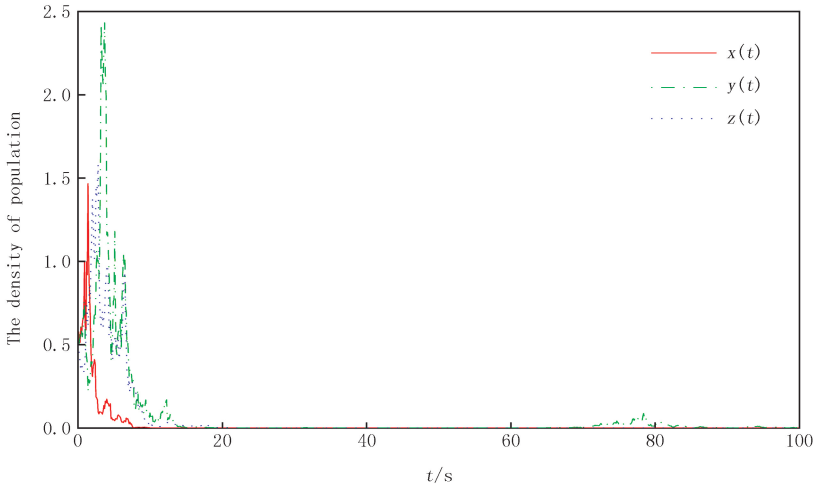


图 1 方程 (2) 的解, 其中选取系数  $r_1=0.2, r_2=0.3$ , 步长为  $\Delta t=0.1>0$

Fig.1 Solutions of system (2) for  $r_1=0.2, r_2=0.3$  with step size  $\Delta t=0.1>0$

显然满足条件  $r_1 < m_1, r_2 < m_2$ , 根据定理 3 的情况(I), 可知所有的食饵种群  $x(t), y(t)$  和捕食者种群  $z(t)$  均走向灭绝, 图 1 验证了定理 3 的结论.

(2)在图 2 中,令  $r_1 = 0.4, r_2 = 0.3$ , 其他参数同上, 此时  $r_1 > m_1, r_2 < m_2, \frac{a_1 e_1 (1 - \beta_1) (r_1 - m_1) K_1}{r_1} = 0.0498, d_1 + m_3 = 0.4481, \frac{a_1 e_1 (1 - \beta_1) (r_1 - m_1) K_1}{r_1} < d_1 + m_3$ , 由定理 3 的(II)知, 食饵种群  $y(t)$  和捕食者种群  $z(t)$  灭绝, 而另一食饵种群  $x(t)$  为均值稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{(r_1 - m_1)K_1}{r_1} = 0.1558, a.s.$ , 可以参考图 2 的图像.

(3)在图 3 中, 取  $r_1 = 0.3, r_2 = 0.4$ , 其他参数与(1)相同,  $\frac{a_2 e_2 (1 - \beta_2) (r_2 - m_2) K_2}{r_2} = 0.0498, d_1 + m_3$

$=0.448 1, \frac{a_2 e_2 (1 - \beta_2) (r_2 - m_2) K_2}{r_2} < d_1 + m_3$ , 根据定理 3 的(III), 食饵种群  $x(t)$  和捕食者种群  $z(t)$  灭绝, 而另一食饵种群  $y(t)$  为均值稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{(r_2 - m_2) K_2}{r_2} = 0.155 8, a.s. .$

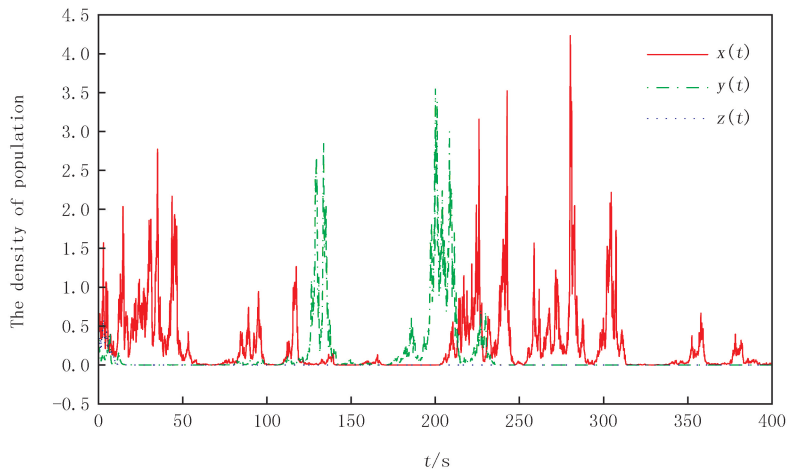


图2 方程 (2) 的解, 其中选取系数  $r_1=0.4, r_2=0.3$ , 其他参数同情况 (1), 步长为  $\Delta t=0.1>0$   
Fig.2 Solutions of system (2) for  $r_1=0.4, r_2=0.3$ , the other parameters remain the same as case(1), with step size  $\Delta t=0.1>0$

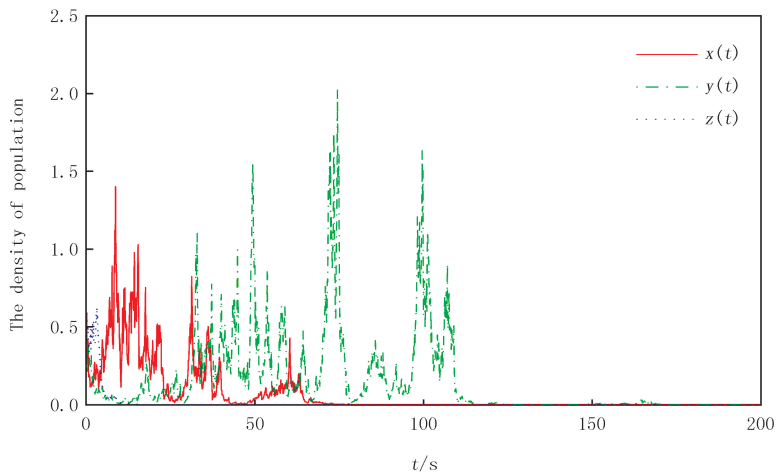


图3 方程 (2) 的解, 其中选取系数  $r_1=0.3, r_2=0.4$ , 其他参数同情况 (1), 步长为  $\Delta t=0.1>0$   
Fig.3 Solutions of system (2) for  $r_1=0.3, r_2=0.4$ , the other parameters are the same as case (1), with step size  $\Delta t=0.1>0$

根据定理 3 的结论以及数值模拟的结果可知  $m_i$  对于种群的灭绝、均值意义下持续生存起着关键性的作用, 而  $m_i$  的大小取决于环境白噪声和 Lévy 噪声的强度, 从定理 3 的结论可以看出环境的噪声强度对于种群的持续生长是不利的。

### 参 考 文 献

- [1] Holt R D. Predation, apparent competition, and the structure of prey communities[J]. Theor Popul Biol, 1977, 12(2): 197-229.
- [2] Banerji A, Morin P J. Trait-mediated apparent competition in an intraguild predator-prey system[J]. Oikos, 2014, 123: 567-574.
- [3] Enge S, Nylund G M, Pavia H. Native generalist herbivores promote invasion of a chemically defended seaweed via refuge mediated apparent competition[J]. Ecol Lett, 2013, 16: 487-492.
- [4] Recart W, Ackerman J D, Cuevas A A. There goes the neighborhood: apparent competition between invasive and native orchids mediated by a specialist florivorous weevil[J]. Biol Invasions, 2013, 15: 283-293.
- [5] Blitzer E J, Welter S C. Emergence asynchrony between herbivores leads to apparent competition in the field[J]. Ecology, 2011, 92: 2020-2026.

- [6] 杨兴云.具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的非自治似然竞争系统的动力学行为[D].长春:吉林大学,2010.
- [7] 梁桂珍,陈静.一类具有扩散和混合时滞的非自治竞争系统的持久性分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2012,40(5):20-22.
- [8] 高美.带有食饵庇护的三种群模型分析[D].哈尔滨:黑龙江大学,2016.
- [9] Kar T K.Stability analysis of a prey-predator model incorporating a prey refuge[J].Commun Nonlinear Sci,2005,10:681-691.
- [10] Huang Y,Chen F,Zhong L.Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge [J].Appl Math Comput,2006,182:672-683.
- [11] Tao Y,Wang X,Song X.Effect of prey refuge on a harvested predator-prey model with generalized functional response[J].Commun Nonlinear Sci,2011,16:1052-1059.
- [12] 郭冠华,马维军,盛晓娜.带有食饵庇护的似然竞争系统分析[J].黑龙江大学自然科学学报,2017,34(6):640-646.
- [13] Bao J,Mao X,Yin G,et al.Competitive Lotka-Volterra population dynamics with jumps[J].Nonlinear Anal,2011,74:6601-6616.
- [14] Bao J,Yuan C.Stochastic population dynamics driven by Lévy noise[J].J Math Anal Appl,2012,391:363-375.
- [15] Liu Q,Chen Q.Asymptotic behavior of a stochastic non-autonomous predator-prey system with jumps[J].Appl Math Comput,2015,271:418-428.
- [16] Liu M,Wang K.Dynamics of a Leslie-Gower Holling-type II predator-prey system with Lévy jumps[J].Nonlinear Anal,2013,85:204-213.
- [17] Liu M,Wang K.Stochastic Lotka-Volterra systems with Levy noise[J].J Math Anal Appl,2014,410:750-763.
- [18] Liu M,Wang K.Survival analysis of a stochastic cooperation system in a polluted environment[J].J Biol Systems,2011,19:183-204.
- [19] Protter P,Talay D.The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations[J].Ann Probab,1997,25:393-423.

## Analysis of a apparent competition model with Gauss white noise and Lévy noise

Wang Xiaopan<sup>a</sup>, Li Shuang<sup>b</sup>

(a.College of Xinlian;b.College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** A stochastic apparent competition model with prey refuge is studied, Gauss white noise and Lévy noise is adopted to simulate the random perturbation of environment. By virtue of comparison theorem and Itô's formula, the conclusion that the stochastic model has a global positive solution and the threshold conditions of extinction, stable in the mean, strong persistence in the mean for population are derived. The results show that whether Gauss white noise or Lévy noise is unfavorable for the sustainable growth of population, therefore, it is essential to consider the stochastic change of environment when constructing model.

**Keywords:** apparent competition model; prey refuge; Gauss white noise; Lévy noise; stable in the mean

[责任编辑 陈留院 赵晓华]