

M/M/1 延迟工作休假系统的均衡策略

赵国喜

(新乡学院 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453000)

摘要:考虑 M/M/1 延迟工作休假系统在两种不同条件下的策略选择. 在第一种情况下, 系统队长和服务台的状态都是可观的, 通过研究不同状态下的顾客期望逗留时间, 得到了顾客的均衡值策略; 在第二种情况下, 队长和系统状态都是不可观的, 利用矩阵几何理论, 得到了顾客的平均逗留时间, 给出了每个顾客在到达瞬间的混合策略. 最后, 用数值例子, 分析了不同参数的对均衡策略的影响.

关键词:延迟休假; 均衡阈值策略; 完全可观; 完全不可观; 混合策略

中图分类号: O226

文献标志码: A

对顾客止步行为的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代, Naor^[1], Edelson 和 Hildebrand^[2] 利用博弈论较早的研究了排队系统中顾客的决策行为, 2003 年, Hassin 等^[3] 把这类问题的主要研究方法归结为求纳什均衡策略.

近来, 有学者从经济分析的角度去研究休假排队系统中的顾客行为. Antonis 等^[4] 在 2011 年讨论了单服务台和一般服务时间下的休假系统, 在队长可观和部分可观两种条件下, 他们得到了顾客的最优止步策略. 2012 年, Guo 和 Hassin^[5] 分析了一个马尔科夫休假排队系统中的顾客策略和社会最优化问题; 随后, Guo 和 Li^[6] 又讨论了部分可观马尔可夫休假系统的顾客均衡策略. 2013 年, Sun 和 Li^[7] 又讨论了带多重工作休假排队系统中顾客的均衡和最优行为.

延迟休假排队被广泛地应用于商业服务系统、库存休假系统和通信系统等, 本文将研究一个 M/M/1 延迟休假系统. 在该系统中, 在服务台每个忙期结束时, 服务台会有一个服务延迟时间; 如果这个延迟时间段内, 没有顾客到达, 那么服务台进入一个假期. 在假期内, 服务台以低于正常态的速率运行. 当一个顾客服务结束时, 如果发现顾客排队, 则服务台结束假期, 转入正常态; 否则, 继续下一个假期, 直到某个服务结束时有顾客排队或假期结束为止. Mahbub 等^[8] 在 1997 年 M/G/1 系统中的延迟休假问题, 并用此模型来分析 ATM 网中虚通道链接问题. Jain & Singh^[9] 研究了带延迟休假的 M/M(a, d, b)/1 模型, Chen 和 Jin^[10] 还研究过延迟虚假 Geom/G/1 中的队长问题.

本文研究和上述文献不同点在于: 1) 第一次从排队经济学的角度研究 M/M/1 延迟工作休假系统; 2) 给出了完全可观 M/M/1 延迟工作休假系统中顾客的均衡策略; 3) 给出完全不可观 M/M/1 延迟工作休假的稳态队长, 以及顾客的混合策略.

1 模型描述

考虑一个带延迟工作休假的 M/M/1 排队系统, 顾客到达是参数为 λ 的 Poisson 流, 服务时间服从参数为 μ_1 的指数分布. 服务台服务完系统内所有顾客后有一段延迟, 延迟时间服从均值为 $1/\alpha$ 的指数分布. 如果在该延迟时间段上有顾客到达, 那么服务台立即为顾客服务; 如果延迟时间结束时仍然没有顾客到达, 那么服务台进入工作休假状态. 工作休假的时间服从参数为 ν 的指数分布, 工作休假期间的顾客服务时间服从均

收稿日期: 2015-01-25; 修回日期: 2015-08-25.

基金项目: 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2011C110002)

作者简介(通信作者): 赵国喜(1976-), 男, 河南南阳人, 新乡学院副教授, 博士, 研究方向为运筹与优化, E-mail: 5916021@sina.com.

值为 $1/\mu_0$ 的指数分布. 在工作休假期中, 若系统内有顾客等待, 那么服务台结束休假进入正常的工作状态; 否则, 服务台将继续休假, 直至有顾客出现或者休假结束.

记系统在 t 时刻的队长为 $N(t)$, t 时刻的系统状态为 $I(t)$, 则状态 $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$ 为连续时间的 Markov 链, 状态空间为 $\{(n, i) | n \geq 0, 0 \leq i \leq 1\}$, 其中, $i = 0$ 表示系统处于正常工作状态, $i = 1$ 表示系统处于工作休假状态. 系统的稳态转移图如图 1 所示.

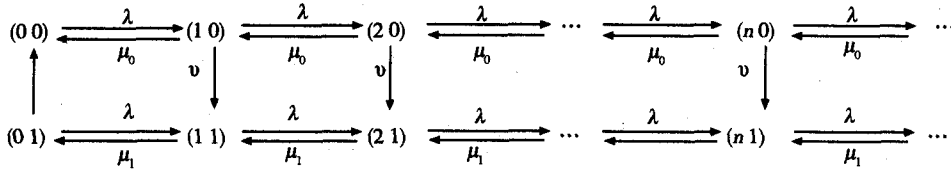


图 1 系统稳态转移图

记顾客在服务完成时可以得到的报酬为 R , 单位逗留时间带来的损失为 C , 同时, 假定每个顾客都是风险中性的, 都希望自己的平均收益最大化. 我们关心的是当系统处于不同状态时, 顾客采用什么样的止步策略. 特别的, 假定顾客决定后不能反悔, 也就是说, 顾客没有重试进入的现象, 若进入系统则不能退出.

下面我们讨论顾客的最优止步(进入或退出)策略. 根据顾客在到达瞬间对系统信息的了解程度, 把系统分为“完全可观”和“完全不可观”两种情况. 在“完全可观系统”中, 顾客可以观察到系统队长和服务台所处的工作状态; 在“完全不可观系统”中, 顾客不了解系统队长和服务台状态.

2 完全可观系统下的均衡阈值策略

考虑在一个完全客观系统中, 顾客在到达瞬间顾客须做出进入或退出的决策. 假定每个顾客服务的平均收益

$$R > \frac{C}{\mu_1} + \frac{C}{\nu} \tag{1}$$

该条件保障在顾客到达的瞬间, 若发现系统队长为 0 时必然进入系统; 否则, 即使系统首次空出也不可能进入系统. 用 $(n_e(0), n_e(1))$ 表示顾客进入系统的纯阈值策略, 即顾客在到达的瞬间发现系统状态为 $(N(t), I(t))$, 若 $N(t) \leq n_e(I(t))$, 顾客进入系统; 否则, 顾客退出系统(不进入).

定理 1 完全可观 M/M/1 延迟工作休假系统满足条件(1), 若顾客在到达瞬间发现系统状态为 $(N(t), I(t))$, 则有纯策略 $(n_e(0), n_e(1))$, 即当 $N(t) \leq n_e(I(t))$ 时顾客进入系统, 否则退出系统. 其中, $(n_e(0), n_e(1)) = (n_0, n_1)$, n_0 是方程(2)唯一实根, n_1 是方程(3)的唯一实根,

$$R - C \left(a^n T(0, 0) + (1 - a) \sum_{j=0}^{j=n-1} a^j T(n - j, 1) + b \frac{1 - a^n}{1 - a} \right) = 0, \tag{2}$$

$$R - C \left(\frac{\alpha(\mu_1 + \nu)}{\mu_1 \nu (\alpha + \lambda)} + \frac{i - 1}{\mu_1} \right) = 0, \tag{3}$$

其中, $a = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \nu}$, $b = \frac{1}{\mu_0 + \nu}$, $T(0, 0) = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1}$, $T(i, 1)$ 由(10)式决定.

证明 在顾客到达瞬间如果他发现系统有 n 个顾客, 服务台处于状态 i , 并假设此时他的平均逗留时间为 $T(n, i)$, 如果进入系统, 则他的期望净回报为

$$S(n) = R - CT(n, i), \tag{4}$$

由状态转移图可以得到如下方程:

$$T(i, 0) = \frac{1}{\mu_0 + \nu} + \frac{\mu_0}{\mu_0 + \nu} T(i - 1, 0) + \frac{\nu}{\mu_0 + \nu} T(i, 1), \quad i \geq 1, \tag{5}$$

$$T(0, 0) = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1}, \tag{6}$$

$$T(i, 1) = T(i - 1, 1) + \frac{1}{\mu_i}, \tag{7}$$

$$T(0,1) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} T(0,0) + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \frac{1}{\mu_1}, i \geq 1. \quad (8)$$

由(6)~(8)式可知

$$T(0,1) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \frac{1}{\mu_1}, \quad (9)$$

$$T(n,1) = \frac{\alpha(\mu_1 + \nu) + \lambda\nu}{(\alpha + \lambda)\mu_1\nu} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{n-1}{\mu_1}, n \geq 1. \quad (10)$$

将(9)代入(5)可得

$$a^n T(0,0) + (1-a) \sum_{j=0}^{j=n-1} a^j T(n-j,1) + b \frac{1-a^n}{1-a}, \quad (11)$$

其中 $a = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \nu}$, $b = \frac{1}{\mu_0 + \nu}$, $T(0,0) = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1}$, $T(i,1)$ 由(10)式决定.

这时将(5)和(10)代入(4)即可得(2)与(3)式. 由(5)与(10)式可知 $T(n,i)$ 皆是关于 n 的单调函数, 从而(2)与(3)式必有唯一实根, 故定理得证.

3 完全不可观系统的均衡止步策略

在完全不可观系统中, 顾客在到达的瞬间不了解系统队长, 也看不到服务台的状态. 所以, 到达的顾客可能以概率 q 进去系统, 以概率 $1-q$ 退出系统. 当 $q=0$ 或 $q=1$ 时, 顾客的策略被称为纯策略; 当 $0 \leq q \leq 1$ 时, 顾客的策略被称为混合止步策略. 假定所有的顾客遵循这种混合止步策略, 除了顾客到达变成参数为 λq 的 Poisson 流外, 其余的假定和第一节中描述的模型完全一样.

记 $\lambda_q = \lambda q$, 考虑该 M/M/1 延迟工作休假系统. 系统状态过程 $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$ 是一个 QBD 过程 (Quasi-birth-death) 过程, 状态空间为 $\{(n, i) | n \geq 0, 0 \leq i \leq 1\}$, 其无穷小生成元矩阵如下

$$Q = \begin{bmatrix} B & A_0 & & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{其中 } A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_q & 0 \\ 0 & \lambda_q \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\lambda_q & 0 \\ \alpha & -(\lambda_q + \alpha) \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -(\lambda_q + \mu_0 + \nu) & 0 \\ 0 & -(\lambda_q + \mu_1 + \nu) \end{bmatrix}.$$

研究该 QBD 过程稳态解的关键在于求下面矩阵二次方程的最小非负解 R

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0, \quad (13)$$

R 也被称为率矩阵.

引理 1 若 $\lambda_q/\mu_1 < 1$, 方程(13)有最小非负解

$$R = \begin{bmatrix} (\lambda_q + r)/2\mu_0 & (\lambda_q - r)/2\mu_1 \\ 0 & \lambda_q/\mu_1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中 $r = \nu + \mu_0 - \sqrt{(\lambda + \nu + \mu_0)^2 - 4\lambda\mu_0}$.

证明 由矩阵方程的特点, R 为两阶上三角矩阵. 设出 R , 直接解方程组即可^[11].

记系统的稳态分布为 $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} pr(N(t) = n, I(t) = i), n \geq 0, 0 \leq i \leq 1$. 则系统的稳态概率向量可写为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$, 其中 $\pi_n = (\pi_{n0}, \pi_{n1}), n \geq 0$, 则有引理 2.

引理 2 若 $\lambda_q/\mu_1 < 1$, 系统的稳态分布为 $(\pi_{n0}, \pi_{n1}) = (\pi_{00}, \pi_{01}) R^n$, 其中

$$\pi_{00} = \frac{2\alpha(r + \lambda_q - 2\mu_0)(\mu_1 - \lambda_q)}{(\lambda_q^2 - r^2)\mu_1 + 2\mu_0(\alpha(r + \lambda_q + \mu_1(r - 2\alpha - \lambda_q)))},$$

$$\pi_{01} = \frac{(\lambda_q - r)(r + \lambda_q)(\mu_1 - \lambda_q)}{(\lambda_q^2 - r^2)\mu_1 + 2\mu_0(\alpha(r + \lambda_q + \mu_1(r - 2\alpha - \lambda_q)))},$$

R 由(14)式给出.

证明 由(12)可知系统的稳态概率向量满足 $\pi Q = 0, \pi e = 1$. 由 Neuts^[12] 的矩阵几何理论可知 $\pi_0 = (\pi_{00}, \pi_{01})$ 满足: $\pi_0(B + RA_2) = 0, \pi_0(R - I)e = 1$, 其中 I 是单位矩阵, 向量 e 每个元素都是 1, 将 B, R, A_2 代入方程组即可解得.

定理 2 若 $\lambda_q/\mu_1 < 1$ 时, 顾客在完全不可观 M/M/1 延迟工作休假系统中的平均逗留时间

$$W = \frac{\lambda_q(\lambda_q - r)(\lambda_q + r)^2\mu_1 + 4(\lambda_q - r)(\lambda_q + \alpha)\mu_0^2\mu_1 + 2(\lambda_q + r)\mu_0(\lambda_q\alpha(\lambda_q + r) + 2(r - 2\alpha - \lambda_q)\lambda_q\mu_1 + 2\alpha\mu_1^2)}{\lambda_q(2\mu_0 - \lambda_q - r)(\mu_1 - \lambda_q)((r^2 - \lambda^2)\mu_1 - 2\mu_0(\alpha(r + \lambda) + (r - 2\alpha - \lambda)\mu_1))} \quad (15)$$

证明 在稳态条件下完全不可观 M/M/1 延迟工作休假系统中的平均队长

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{j-1} n \cdot \pi_{nj} = \sum_{n=0}^{\infty} n(\pi_{n0}, \pi_{n1})R^n e = (\pi_{n0}, \pi_{n1}) \sum_{n=1}^{\infty} nR^n e = \\ &(\pi_{n0}, \pi_{n1}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} (\lambda_q + r)/2\mu_0 & (\lambda_q - r)/2\mu_1 \\ 0 & \lambda_q/\mu_1 \end{pmatrix}^n \right) e = \\ &(\pi_{n0}, \pi_{n1}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} ((\lambda_q + r)/(2\mu_0))^n & \frac{\lambda_q - r}{2\mu_0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_q - r}{2\mu_0}\right)^i \left(\frac{\lambda_q}{\mu_1}\right)^{n-i-1} \\ 0 & (\lambda_q/\mu_1)^n \end{pmatrix} \right) e = \\ &(\pi_{n0}, \pi_{n1}) \left(\begin{pmatrix} \frac{(\lambda_q + r)/(2\mu_0)}{1 - ((\lambda_q + r)/(2\mu_0))^2} & \frac{(1 - (\lambda_q + r)\lambda_q/(2\mu_0\mu_1))(\lambda_q - r)/(2\mu_1)}{(1 - (\lambda_q + r)/(2\mu_0))^2(1 - \lambda_q/\mu_1)^2} \\ 0 & \frac{\lambda_q/\mu_1}{(1 - \lambda_q/\mu_1)^2} \end{pmatrix} \right) e = \\ &\frac{\lambda_q(\lambda_q - r)(\lambda_q + r)^2\mu_1 + 4(\lambda_q - r)(\lambda_q + \alpha)\mu_0^2\mu_1 + 2(\lambda_q + r)\mu_0(\lambda_q\alpha(\lambda_q + r) + 2(r - 2\alpha - \lambda_q)\lambda_q\mu_1 + 2\alpha\mu_1^2)}{(2\mu_0 - \lambda_q - r)(\mu_1 - \lambda_q)((r^2 - \lambda^2)\mu_1 - 2\mu_0(\alpha(r + \lambda) + (r - 2\alpha - \lambda)\mu_1))} \end{aligned} \quad (16)$$

由引理 2, 将 (π_{n0}, π_{n1}) 代入(16)式, 利用利特公式 $L = \lambda_q W$ 可得(15)式.

在稳态条件 $\lambda_q/\mu_1 < 1$ 下, 由观察可知, 对于任何 $0 \leq q \leq 1$, 系统的平均逗留时间是有限值. 记 $W_1 = \min_q\{W\}, W_2 = \max_q\{W\}$, 则有如下定理.

定理 3 若 $\lambda_q/\mu_1 < 1$ 时, 在完全不可观 M/M/1 延迟工作休假系统中, 顾客存在确定的进入概率 q_e , 且

$$q_e = \begin{cases} 0, & 0 < \frac{R}{C} \leq W_1, \\ q_e^*, & W_1 < \frac{R}{C} \leq W_2, \\ 1, & \frac{R}{C} > W_2. \end{cases} \quad (17)$$

证明 若所有的顾客采用相同的混合策略 q_e , 则对于所有顾客来说, 单位时间的社会收益为 $SB_f = \lambda_q(R - CW)$, 利用 SB_f 的符号即可得到(17), 得证.

4 数值实验

在完全可观系统中, 关注的是顾客的均衡阈值策略; 在完全不可观系统中, 关心的是顾客进入系统的概率及相应进入概率下的社会收益. 图 2 ~ 图 7 反映了在完全可观条件下, 顾客的均衡阈值策略随不同参数变化的情况; 图 8 ~ 图 9 则反映了在完全不客观系统中, 顾客平均逗留时间和社会收益随进入概率变化的趋势.

在图 2 ~ 图 3 中, $\mu_1 = 2, \mu_0 = 1.2, \nu = 0.2, R = 30, C = 3$. 在图 2 中, 阈值随着延迟速率 α 单调递减. 直觉上看, α 越大, 意味着服务台服务完所有顾客后, 进入速率较低的工作休假的可能增加了, 导致顾客进入系统的积极性降低, 只有在队长较小时才进入系统. 在图 3 中, 阈值随着到达率的增加而递增. 这是由于此时系统负载增加, 顾客即使面临较大的队长值, 也不得不进入系统.

在图 4 ~ 图 5 中, $\lambda = 0.8, \alpha = 0.1, \nu = 0.2, R = 30, C = 3$. 在图 4 中, 随着 μ_1 的增大, 意味着系统在

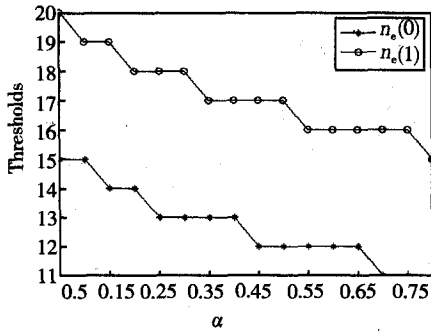


图2 Thresholds ~ α 图($\lambda=0.8$)

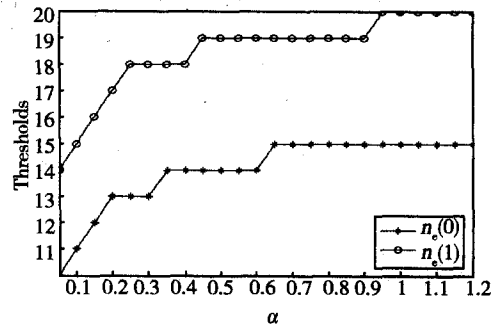


图3 Thresholds ~ λ 图($\alpha=0.1$)

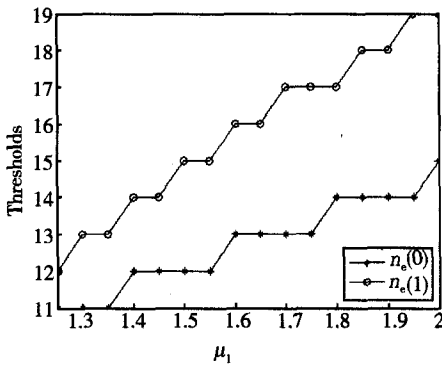


图4 Thresholds ~ μ_1 图($\mu_0=0.1$)

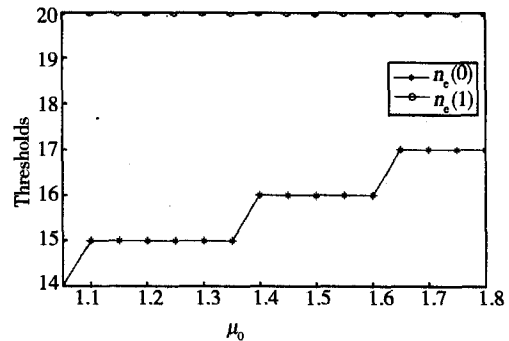


图5 Thresholds ~ μ_0 图($\mu_1=0.1$)

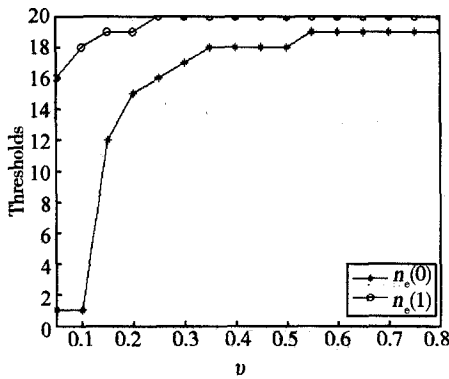


图6 Thresholds ~ ν 图($C=3$)

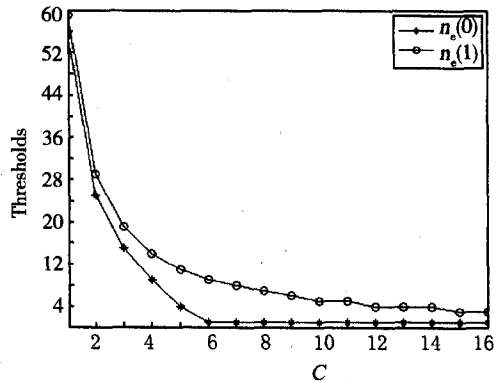


图7 Thresholds ~ C 图($\nu=0.2$)

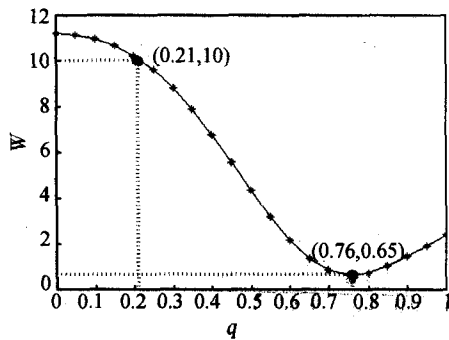


图8 $W \sim q$ 图

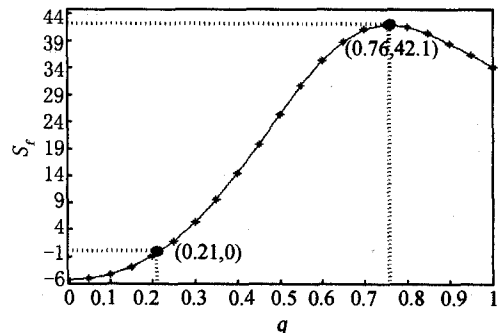


图9 $S_r \sim q$ 图

正常状态下的服务能力增加了,即使顾客到来时看到前面的顾客较多,也愿意进入系统,故阈值随着 μ_1 的变化呈现单调递增趋势. μ_0 代表了服务台休假时的工作速率,对顾客的影响类似于 μ_1 ,故图 5 中阈值函数随 μ_0 单调递增.

在图 6 ~ 图 7 中, $\lambda = 0.8, \alpha = 0.1, \mu_1 = 2, \mu_0 = 1.2, R = 30$. 在图 6 中, ν 的增加意味着系统由休假转入正常状态的速率增加,则系统处于正常状态的就会增加. 类似于图 4, 顾客对队长的容忍程度增加, 阈值随

ν 单调递增. C 代表了顾客在单位时间的等待费用, 故在图 7 中, C 的增加, 必然招致顾客不敢等待时间太长, 故阈值随 C 单调递减.

在图 8 ~ 图 9 中, $\lambda = 0.8, \alpha = 0.1, \mu_1 = 2, \mu_0 = 1.2, \nu = 0.2, R = 30, C = 3$. 在图 8 中, 观察到, 随着 q 的变化, 顾客平均逗留时间的最小值和最大值分别为 $W_1 = 0.65, W_2 = 11.2$. 由定理 3, 系统存在唯一的 Nash 均衡策略 q^* . 图 9 反映了系统的社会收益; 当 $q = 0.21$ 时, 系统社会收益为 0; 但 $q = 0.76$ 时, 系统的社会收益最大, $S_f = 42.1$.

5 结 论

在完全可观和完全不客观两种情况下, 研究了 M/M/1 延迟工作休假系统中顾客的进入系统瞬间的行为决策. 在完全可观系统中, 顾客进入系统的 Nash 均衡策略; 在完全不可观系统中, 我们得到了顾客的平均逗留时间, 并给出了顾客进入系统的混合策略. 最后, 用 8 个数值例子演示了不同参数下两种系统中顾客的策略选择. 下一步研究可以讨论部分信息条件下 M/M/1 延迟工作休假系统中顾客的策略选择问题, 本文的模型还可以推广到非齐次到达的相关系统模型中.

参 考 文 献

- [1] Naor P. The regulation of queue size by levying tolls[J]. *Econometrica*, 1969, 37: 15-24.
- [2] Edelson N, Hildebrand K. Congestion tolls for Poisson queueing processes[J]. *Econometrica*, 1975, 43: 81-92.
- [3] Hassin R, Haviv M. To Queue or not to queue; equilibrium behavior in queueing systems[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [4] Antonis E, Antonio G. Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times[J]. *Performance Evaluation*, 2011, 68(10): 967-982.
- [5] Guo P, Hassin R. Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues; the case of heterogeneous customers[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 222(2): 278-286.
- [6] Guo P, Li Q. Strategic behavior and social optimization in partially-observable Markovian vacation queues[J]. *Operations Research Letters*, 2013, 41(3): 277-284.
- [7] Sun W, Li S. Equilibrium and optimal behavior of customers in Markovian queues with multiple working vacations[J]. *Top*, 2013, 56(3/4): 213-228.
- [8] Mahbub H, Mohammed A. A delayed vacation model of an M/G/1 queue with setup time and its application to SVCC-based ATM networks[J]. *IEICE Trans Commun*, 1997, E80-B(2): 317-323.
- [9] Jain M, Singh P. State Dependent Bulk Service Queue with Delayed Vacations[J]. *JKAU: Eng Sci*, 2005, 16(1): 3-15.
- [10] Chen Q, Jin S. Queue length analysis of delayed vacation Geom/G/1 with set-up[C]. *IEEE CCDC*, Yantai, 2008.
- [11] Li J, Tian N. The M/M/1 queue with working vacation and vacation interruption[J]. *J Syst Sci Syst Eng*, 2007, 16(1): 121-127.
- [12] Neuts M. Matrix-geometric solutions in stochastic models[M]. Washington: The Johns Hopkins University Press, 1981: 203-251.

Equilibrium Strategies in M/M/1 Queuing System with Delayed Working Vacation

ZHAO Guoxi

(School of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453000, China)

Abstract: We consider customers' strategies behavior in an M/M/1 queuing system with delayed working vacation under two scenarios. In scenario 1, the queue length and the server's status are fully observable. By analyzing the expected sojourn time of a customer under variable system states, we develop the equilibrium threshold strategies. In scenario 2, the system states are fully unobservable. Using matrix geometric theory, we obtain the expected queue length and the expected sojourn time of a customer, and give the mixed strategies of a customer upon the instant of his(her) arrival. The effects of different parameters on the equilibrium behavior are illustrated further through numerical experiments.

Keywords: delayed vacation; equilibrium threshold strategies; fully observable; fully unobservable; mixed strategies