文章编号:1000-2367(2023)01-0047-07　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.01.006

泡序图的广义 4-连通度

王艳玲[1],冯伟[2]

(1.河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007;2.内蒙古民族大学 数理学院,内蒙古 通辽 028043)

摘　要:$S\subseteq V(G)$是 G 的一个顶点集且$|S|\geq k$,其中 $2\leq k\leq n$.连接 S 的树 T 叫作斯坦纳树.两棵斯坦纳树 T_1 和 T_2 称为内部不交的,当且仅当它们满足 $E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$ 和 $V(T_1)\cap V(T_2)=S$.令 $\kappa_G(S)$是 G 内部不交的斯坦纳树的最大数目,$\kappa_k(G)=\min\{\kappa_G(S):S\subseteq V(G),|S|=k\}$定义为 G 的广义 k-连通度.很显然,当$|S|=2$ 时,广义 2-连通度 $\kappa_2(G)$就是经典连通度 $\kappa(G)$.因此广义连通度是经典连通度的推广.主要讨论泡序图 B_n 的广义 4-连通度 $\kappa_4(B_n)$.得到的结论是当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_4(B_n)=n-2$.

关键词:广义 4-连通度;内部不交;泡序图;路

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

通常使用图 $G=(V,E)$ 来表示互连网络,其中顶点(V) 表示处理器,边(E) 表示处理器之间的连接.连通度反映互连网络的连通性.经典连通度 $\kappa(G)$ 是 G 的一个基本参数,它是使得 G 不连通的最少的顶点数.令 $S=\{u,v\}\subseteq V(G)$ 是一个顶点集. 对 G 中两条不同的(u,v)-路 P_1 和 P_2.当 $V(P_1)\cap V(P_2)=\{u,v\}$时,$P_1$ 和 P_2 叫作内部不交的(u,v)-路,当 $E(P_1)\cap E(P_2)=\varnothing$ 时,P_1 和 P_2 叫作内部边不交的(u,v)-路.同时,$\kappa(G)$也被文献[1]定义为如下形式:令 $\kappa_G(S)$表示不交的(u,v)-路的最大数目,则 $\kappa(G)=\min\{\kappa_G(S)\}$,其中 $S=\{u,v\}$.文献[2]提出了条件连通度,文献[3]提出了外连通度,文献[4]提出了 g-好邻连通度,文献[5]提出了 Menger 连通性,文献[6]提出了结构连通度和子结构连通度.关于这些连通性的研究已经应用到超立方体[6]、增强 k-元 n-立方体[7]、泡序图[8]、泡序星图[9]和修正泡序图[10-11]上.

广义 k-连通度是由文献[12]提出的.令 $S\subseteq V(G)$是 G 的一个顶点集且$|S|\geq k$,其中 $2\leq k\leq n$.连接 S 的树 T 叫作斯坦纳树.两棵斯坦纳树 T_1 和 T_2 称为内部不交的当且仅当它们满足 $E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$ 和 $V(T_1)\cap V(T_2)=S$. 令 $\kappa_G(S)$是内部不交的斯坦纳树的最大数目,$\kappa_k(G)=\min\{\kappa_G(S):S\subseteq V(G),|S|=k\}$定义为 G 的广义 k-连通度.当 $|S|=2$ 时,$\kappa_2(G)=\kappa(G)$.因此广义连通度是经典连通度的推广.但是 $\kappa_k(G)$ 的获取并不容易. 文献[12]给出了完全图 K_n 的广义 k-连通度.文献[13]给出了图 G 的广义 3-连通度 $\kappa_3(G)$的紧的上界和下界.多种互连网络的广义 3-连通度或广义 4-连通度已经得到[14-19].本文讨论泡序图 B_n 的广义 4-连通度.

1　预备知识

设 $G=(V,E)$ 是一个简单无向图,$|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 分别是 G 中的顶点数和边数.对任意顶点 $v\in V(G)$,用 $N_G(v)$ 表示与 v 相邻的顶点的集合,$d_G(v)$ 表示 v 的度,$\delta(v)$ 表示 v 的最小度.对于 $V(G)$ 的两个不同子集 X,Y,如果有一簇内部不交的路,它们的起点在 X 中、终点在 Y 中,且除起点和终点外的点都不在 X 和 Y 中,则这簇内部不交路称为(X,Y)-路.当 X 只含有一个点,即,$X=\{u\}$时,(u,Y)-路是一簇起点为 u、终点是 Y 中不同点的内部不交路.如果内部不交的(u,Y)-路的数目是 k,则这就是一个从 u 到 Y 的 k-扇[20].

收稿日期:2022-07-29;**修回日期**:2022-10-19.

基金项目:内蒙古自然科学基金(2022LHMS01006);2022 年度自治区直属高校基本科研业务费项目(GXKY22156).

作者简介(通信作者):王艳玲(1980—),女,河南新乡人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为离散数学与理论计算机科学,E-mail:wangyanlinghtu@163.com.

令 $[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$,$(p_1p_2\cdots p_n)$ 是$[1,n]$上的置换,(ij) 表示只在 i,j 位上两个元素的置换.则,$(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)(ij)=(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$.

泡序图 B_n 有 $n!$ 个顶点且每个顶点 u 具有形式 $u=u_1u_2\cdots u_n$.任意两个顶点 u 和 v 相邻当且仅当 $v=u(i,i+1)$ 对所有的 $1\leq i\leq n-1$ 成立.显然,B_n 是$(n-1)$-正则的.任意顶点 u 的最后一位是一个固定的正整数 $i\in[1,n]$,沿着最后一位把 B_n 分解为 n 个子块 $B_{n-1}^1,B_{n-1}^2,\cdots,B_{n-1}^n$,则 $B_{n-1}^1\oplus B_{n-1}^2\oplus\cdots\oplus B_{n-1}^n$ 是 B_n 的分解.B_{n-1}^i 叫作 B_n 的一个子块且有 $B_{n-1}^i\cong B_{n-1}$ 对所有的 $i\in[1,n]$ 成立.对于不同的 $i,j\in[1,n]$,如果 $u\in V(B_{n-1}^i)$,用 $u'=u(n-1,n)$ 表示 u 的外邻点且有 $u'\in V(B_{n-1}^j)$.B_n 的一些性质和结论列在下面.

性质 1[15,21] 当 $n\geq 2$ 时,$\kappa(B_n)=n-1$.

性质 2[22] 当 $i\in[1,n]$时,任意顶点 $u\in V(B_{n-1}^i)$都有唯一一个外邻点且该子块中点的外邻点都不相同.

性质 3[22] 任意不同的 $i,j\in[1,n]$,子块 B_{n-1}^i 和 B_{n-1}^j 之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边.

性质 4[15] 当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_3(B_n)=n-2$.

性质 5[15] 当 $n\geq 3$ 时,$\kappa(B_{n-1}^i\oplus B_{n-1}^j)=n-2$,其中不同的 $i,j\in[1,n]$.

性质 6[15] 当 $n\geq 3$ 时,$B_{ni}=B_n[V(B_n)\backslash V(B_{n-1}^i)]$ 是由 $V(B_n)\backslash V(B_{n-1}^i)$ 导出的 B_n 的子图,则有 $\kappa(B_{ni})=n-2$ 对 $i\in[1,n]$ 成立.

引理 1[23] 若 G 是 n 阶连通图且有最小度 $\delta(G)$,如果 G 中有两个相邻的度为 $\delta(G)$ 的顶点,则有 $\kappa_k(G)\leq\delta(G)-1$ 对 $3\leq k\leq n$ 成立.

引理 2[20] 若 G 是一个 k-连通图且任意 $X,Y\subseteq V(G)$有至少 k 个顶点,则 G 中有 k 条两两不交的(X,Y)-路.

引理 3[20] 若 G 是一个 k-连通图,对于 $u\in V(G)$和至少有 k 个顶点的集合 $Y\subseteq V(G)\backslash\{u\}$,存在一个从 u 到 Y 的 k-扇.

定理 1[20] 若 G 是一个 k-连通图,对于任意不同顶点 $u,v\in V(G)$,有 k 条内部不交的路连接 u 和 v.

2 B_n 的广义 4-连通度

引理 4 当 $n\geq 3$ 时,用 $B_{n-1}^{[r,s]}=B_{n-1}^r\oplus B_{n-1}^{r+1}\oplus\cdots\oplus B_{n-1}^s$ 表示由 $V(B_{n-1}^r)\cup V(B_{n-1}^{r+1})\cup\cdots\cup V(B_{n-1}^s)$ 导出的 B_n 的子图,则 $B_{n-1}^{[r,s]}$ 是连通的且 $\kappa(B_{n-1}^{[r,s]})=n-2$,其中 $r,s\in[1,n]$ 且 $r<s$.

证明 对于不同的 $i,j\in[1,n]$,由性质3得,B_{n-1}^i 和 B_{n-1}^j 间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边,则有 $B_{n-1}^{[r,s]}$ 是连通的.再由性质 5 可得,$\kappa(B_{n-1}^i\oplus B_{n-1}^j)=n-2$,因此,有 $\kappa(B_{n-1}^{[r,s]})=n-2$,其中 $r,s\in[1,n]$ 且 $r<s$.

结合引理 1 和性质 1 可得下面的引理.

引理 5 当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_4(B_n)\leq\delta(B_n)-1=n-2$.

为了得到 $\kappa_4(B_n)$,只需要证明下面的引理是成立的.

引理 6 当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_4(B_n)\geq n-2$.

证明 对 n 用假设归纳法证明这个结论是成立的.令 $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\subseteq V(B_n)$,则 $|S|=4$.

当 $n=3$ 时,$S\subseteq V(B_3)$且$|S|=4$,通过图 1 可以看到 B_3 中有一棵斯坦纳树.

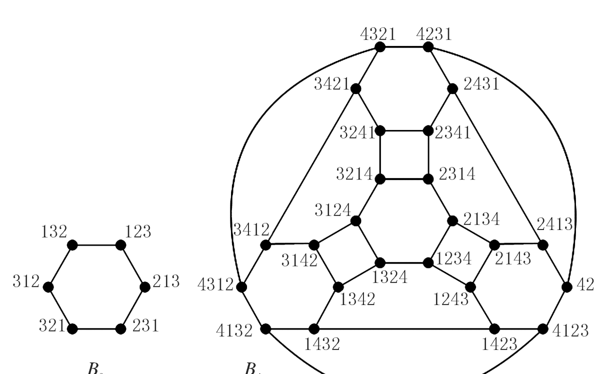

图1 泡序图B_3和B_4

Fig.1 The bubble-sort graphs of B_3 and B_4

当 $n=4$ 时,$S\subseteq V(B_4)$ 且 $|S|=4$,B_4 如图 1 所示.不失一般性,不妨令 $v_1=1234$ 且具有 B_n 的最大度.当 $d_{B_4}(v_1)=3$ 时,有$\{v_2,v_3,v_4\}=\{2134,1243,1324\}$,两棵内部不交的斯坦纳树如图 2(a)所示.当 $d_{B_4}(v_1)=2$ 时,有两种情况:$\{v_2,v_3\}=\{2134,1243\}$ 和$\{v_2,v_3\}=\{1324,2134\}$,每一种情况中,$v_4$ 都不和 v_1 相邻,类似可以找到两棵内部不交的斯坦纳树如图 2(b)和 2(c)所示.当 $d_{B_4}(v_1)=1$ 时,只考虑 $v_2=1324$ 和 $v_2=1243$ 就足够了,在每一种情况下,v_3 和 v_4 都不与 v_1 相邻,类似可以找到两棵内部不交的斯坦纳

树如图 2(d)和 2(e)所示.当 $d_{B_4}(v_1)=0$ 时，有 $\{v_2,v_3,v_4\}=\{3124,2143,1423\}$.两棵内部不交的斯坦纳树如图 2(f)所示.

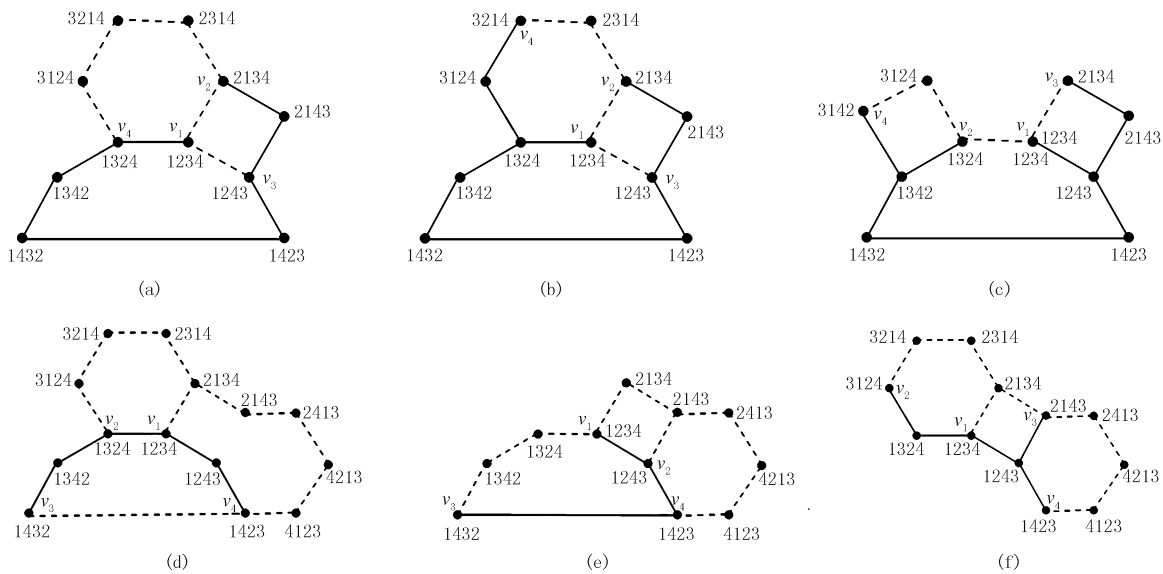

图2　n=4时的S-Steiner树

Fig.2　The illustration of S-Steiner trees when n=4

当 $n\geq 5$ 时，假设 $\kappa_4(B_n)\geq n-2$ 对 $n-1$ 成立，即，$\kappa_4(B_{n-1})\geq n-3$.下面将证明 $\kappa_4(B_n)\geq n-2$ 对 n 成立.

情形 1　S 中的点都在 B_n 的一个子块中.

不失一般性，不妨令 $v_i\in V(B^1_{n-1})$ 对 $i\in[1,4]$ 成立.由假设条件，$\kappa_4(B_{n-1})\geq n-3$，则在 B^1_{n-1} 中有 $(n-3)$ 棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3}$ 连接 S.由性质 6 得，$B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 是连通的，因此有一棵树 $\hat{T}_{n-2}$ 连接 v'_1,v'_2,v'_3 和 v'_4.令 $T_{n-2}=\hat{T}_{n-2}\cup v_1v'_1\cup v_2v'_2\cup v_3v'_3\cup v_4v'_4$ 是一棵连接 S 的树.显然，$V(T_{n-2})\cap V(B^1_{n-1})=S$.

因此，B_n 中有 $(n-2)$ 棵内部不交斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3},T_{n-2}$ 连接 S，即，$\kappa_4(B_n)\geq n-2$.

情形 2　S 中的点在 B_n 的两个子块中.

因为 S 中有 4 个点，所以 B_n 的一个子块中可能有 1,2 或 3 个点. 考虑如下子情形.

子情形 2.1　S 中的 3 个点在 B_n 的一个子块中.

不失一般性，不妨令 $v_1,v_2,v_3\in V(B^1_{n-1})$ 和 $v_4\in V(B^2_{n-1})$.在这个子情况中，考虑 v'_4 是否在 B^1_{n-1} 中，需要讨论两种子情况.

子情形 2.1.1　$v'_4\in V(B^1_{n-1})$.

子情形 2.1.1.1　$v'_4\notin\{v_1,v_2,v_3\}$.

此时，$v_1,v_2,v_3,v'_4\in V(B^1_{n-1})$.由假设条件可得，$\kappa_4(B_{n-1})\geq n-3$.则 B^1_{n-1} 中有 $(n-3)$ 棵内部不交的斯坦纳树 $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}$ 连接 $\{v_1,v_2,v_3,v'_4\}$.令 $T_1=\hat{T}_1\cup v_4v'_4$.注意到由性质 1 得 $d_{B^1_{n-1}}(v'_4)=n-2$.所以，对 $i\in[1,n-3]$，v'_4 在 $\hat{T}_i$ 中最多有 2 个邻点.当 v'_4 在 $\hat{T}_i$ 中有一个邻点 v_{4i1} 时，$v'_{4i1}\notin V(B^1_{n-1})$.由性质 6 得，$B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 是连通的，则存在一条路 P_i 连接 v'_{4i1} 和 v_4.此时，对 $i,j\in[2,n-3]$，令 $T_j=(\hat{T}_j-v'_4)\cup v_{4i1}v'_{4i1}\cup P_i$.当 v'_4 在 $\hat{T}_i$ 中有 2 个邻点 v_{4i1} 和 v_{4i2} 时，由性质 2 可得，$v'_{4i1},v'_{4i2}\notin V(B^1_{n-1})$ 且它们不相同.结合性质 6，有一棵树 $\hat{T}_j$ 连接 v'_{4i1},v'_{4i2} 和 v_4(图 3).此时，令 $T_j=(\hat{T}_j-v'_4)\cup v_{4i1}v'_{4i1}\cup v_{4i2}v'_{4i2}\cup\hat{T}_j$，其中 $j\in[2,n-3]$.

由性质 6，存在一棵树 $\hat{T}_{n-2}$ 连接 $\{v'_1,v'_2,v'_3,v_4\}$.令 $T_{n-2}=\hat{T}_{n-2}\cup v_1v'_1\cup v_2v'_2\cup v_3v'_3$ 是连接 S 的树.显然，$V(T_{n-2})\cap V(B^1_{n-1})=S$.

因此,B_n 中有$(n-2)$棵斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3},T_{n-2}$ 连接 S.

子情形 2.1.1.2 $v'_4 \in \{v_1,v_2,v_3\}$.

不失一般性,不妨令 $v'_4=v_1$.由性质 4,$\kappa_3(B^1_{n-1})=n-3$.则在 B^1_{n-1} 中有$(n-3)$棵内部不交的斯坦纳树 $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}$ 连接$\{v_1,v_2,v_3\}$.从 $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}$ 中选取不同的 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-3}$ 使得 $x_i\in V(\hat{T}_i)$ 对 $i\in[1,n-3]$ 成立.注意到$\{\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}\}$ 中最多有一棵树是一条路

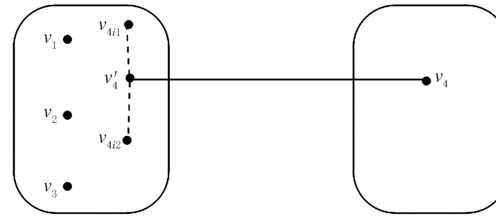

图3 子情形2.1.1.1的说明

Fig.3 The illustration of Subcase 2.1.1.1

$v_1v_2v_3$,结合 $d_{B^1_{n-1}}(v_1)=n-2$,选取不是路 $v_1v_2v_3$ 的那些树.对 $i\in[1,n-3]$,令 $X'=\{x'_1,\cdots,x'_{n-3}\}$ 是 x_i 的外邻点的集合.由性质 2,X' 中的点是不同的,则 $|X'|=n-3$.结合性质 6,$B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 是连通的,所以有 v_4 与 X' 连通.由引理 3,有$(n-3)$条内部不交的(v_4,X')-路 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-3}$.结合 k-扇的定义[20],不失一般性,对 $i\in[1,n-3]$,令 x'_i 是路P_i 的终点.令 $T_1=\hat{T}_1\cup x_1x'_1\cup P_1,T_2=\hat{T}_2\cup x_2x'_2\cup P_2,\cdots,T_{n-3}=\hat{T}_{n-3}\cup x_{n-3}x'_{n-3}\cup P_{n-3}$.注意到 $v'_1=v_4$.因为 $B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 是连通的,存在一棵树 $\hat{T}_{n-2}$ 连接$\{v_4,v'_2,v'_3\}$.令 $T_{n-2}=\hat{T}_{n-2}\cup v_1v_4\cup v_2v'_2\cup v_3v'_3$.

因此,B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-2}$ 连接 S.

子情形 2.1.2 $v'_4\notin V(B^1_{n-1})$.

与子情形 2.1.1.2 类似,在 B^1_{n-1} 中有$(n-3)$棵内部不交的斯坦纳树 $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}$ 连接$\{v_1,v_2,v_3\}$.对于 $i\in[1,n-3]$,令 x_i,X' 和 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-3}$ 与子情形 2.1.1.2 中相同.因为 $B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 连通,由性质 6 得有一棵树 $\hat{T}_{n-2}$ 连接$\{v'_1,v'_2,v'_3,v_4\}$.令 $T_1=\hat{T}_1\cup x_1x'_1\cup P_1,T_2=\hat{T}_2\cup x_2x'_2\cup P_2,\cdots,T_{n-3}=\hat{T}_{n-3}\cup x_{n-3}x'_{n-3}\cup P_{n-3},T_{n-2}=\hat{T}_{n-2}\cup v_1v'_1\cup v_2v'_2\cup v_3v'_3$.

因此,B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3},T_{n-2}$ 连接 S.

子情形 2.2 S 中的两个点在 B_n 的一个子块中.

不失一般性,不妨令 $v_1,v_2\in V(B^1_{n-1})$ 和 $v_3,v_4\in V(B^2_{n-1})$.由性质 1,$\kappa(B^1_{n-1})=\kappa(B^2_{n-1})=n-2$.结合定理 1,在 B^1_{n-1} 中有$(n-2)$条内部不交的(v_1,v_2)-路 $P_1,\cdots,P_{n-2}$,同时在 B^2_{n-1} 中有$(n-2)$条内部不交的(v_3,v_4)-路 $\hat{P}_1,\cdots,\hat{P}_{n-2}$.对 $i\in[1,n-2]$,从 $P_1,\cdots,P_{n-2}$ 中选取不同的 $x_1,\cdots,x_{n-2}$ 使得 $x_i\in V(P_i)$,从 $\hat{P}_1,\cdots,\hat{P}_{n-2}$ 中选取不同的 $y_1,\cdots,y_{n-2}$ 使得 $y_i\in V(\hat{P}_i)$.注意到 $\kappa(B^1_{n-1})=\kappa(B^2_{n-1})=n-2$,以上路中最多有一条是长度为 1 的,如果是这样的话,令 $V(P_1)=\{v_1,v_2\}$ 和 $V(\hat{P}_1)=\{v_3,v_4\}$,同时取 $x_1=v_1$ 和 $y_1=v_3$.令 $X'=\{x'_1,\cdots,x'_{n-2}\}$ 和 $Y'=\{y'_1,\cdots,y'_{n-2}\}$,则由性质 2,有 $|X'|=n-2$ 和 $|Y'|=n-2$.结合引理 4,$B^{[3,n]}_{n-1}=B_n[V(B^3_{n-1})\cup V(B^4_{n-1})\cup\cdots\cup V(B^n_{n-1})]$ 连通且 $\kappa(B^{[3,n]}_{n-1})=n-2$.再结合引理 2,$B^{[3,n]}_{n-1}$ 中有$(n-2)$条两两不交的(x'_i,y'_i)-路 $P'_1,\cdots,P'_{n-2}$,其中 $i\in[1,n-2]$.由 k-扇[20]的定义,不妨令 P'_i 的起点和终点分别是 x'_i 和 y'_i,其中 $i\in[1,n-2]$.令 $T_1=P_1\cup x_1x'_1\cup P'_1\cup y_1y'_1\cup\hat{P}_1,T_2=P_2\cup x_2x'_2\cup P'_2\cup y_2y'_2\cup\hat{P}_2,\cdots,T_{n-2}=P_{n-2}\cup x_{n-2}x'_{n-2}\cup P'_{n-2}\cup y_{n-2}y'_{n-2}\cup\hat{P}_{n-2}$.

因此,B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-2}$ 连接 S.

情形 3 S 中的点在 B_n 的 3 个子块中.

不失一般性,不妨令 $v_1,v_2\in V(B^1_{n-1}),v_3\in V(B^2_{n-1})$和 $v_4\in V(B^3_{n-1})$.由性质 1,得 $\kappa(B^1_{n-1})=n-2$.结合定理 1,B^1_{n-1} 中有$(n-2)$条内部不交的(v_1,v_2)-路 $P_1,\cdots,P_{n-2}$.对 $i\in[1,n-2]$,从 $P_1,\cdots,P_{n-2}$ 中选取不同的 $x_1,\cdots,x_{n-2}$ 使得 $x_i\in V(P_i)$.这些路中最多有一条长度为 1,如果是这样的话,令 $V(P_1)=\{v_1,v_2\}$ 和 $x_1=v_1$.令 $X'=\{x'_1,\cdots,x'_{n-2}\}$,则由性质 2,$X'$ 中的点都不相同,即,$|X'|=n-2$.结合性质 6,$B_{n1}=B_n[V(B_n)\backslash V(B^1_{n-1})]$ 连通且 $\kappa(B_{n1})=n-2$.

子情形 3.1 v'_3 和 v'_4 都不在 B^1_{n-1} 中.

这种情形下,注意到 $\kappa(B_{n1})=n-2$ 和$|X'|=n-2$.由引理 3,有$(n-2)$条内部不交的(v_3,X')-路

$\hat{P}_1,\cdots,\hat{P}_{n-2}$和$(n-2)$条内部不交的$(v_4,X')$-路 $\widetilde{P}_1,\cdots,\widetilde{P}_{n-2}$.不失一般性，不妨令 $\hat{P}_i$ 和 $\widetilde{P}_i$ 的终点为 x'_i，其中 $i\in[1,n-2]$.令 $T_1=P_1\cup x_1x'_1\cup\hat{P}_1\cup\widetilde{P}_1$，$T_2=P_2\cup x_2x'_2\cup\hat{P}_2\cup\widetilde{P}_2,\cdots,T_{n-2}=P_{n-2}\cup x_{n-2}x'_{n-2}\cup\hat{P}_{n-2}\cup\widetilde{P}_{n-2}$.

子情形 3.2　v'_3 和 v'_4 中的一个或两个都在$\{v_1,v_2\}$中.

基于子情形 3.1 的讨论，只需要选取一些特殊的路.

当 $v'_3=v_1$ 时，选取 $x_1=v_1$ 和 $\hat{P}_1=v_1v_3$.令 $\widetilde{X}'=X'-v_3$，则 $|\widetilde{X}'|=n-3$.注意到 $d_{B^2_{n-1}}(v_3)=n-2$.由引理 3，有$(n-3)$条内部不交的$(v_3,\widetilde{X}')$-路 $\hat{P}_2,\cdots,\hat{P}_{n-2}$.令 $T_1=P_1\cup v_1v_3\cup\widetilde{P}_1$，对于 $i\in[2,n-2]$，取 T_i 与子情形 3.1 中相同.

当 $v'_4=v_1$ 时，选取 $x_1=v_1$ 和 $\widetilde{P}_1=v_1v_4$.令 $\widetilde{X}'=X'-v_4$，则 $|\widetilde{X}'|=n-3$.注意到 $d_{B^3_{n-1}}(v_4)=n-2$.由引理 3，有$(n-3)$条内部不交的$(v_4,\widetilde{X}')$-路 $\widetilde{P}_2,\cdots,\widetilde{P}_{n-2}$.令 $T_1=P_1\cup x_1x'_1\cup\hat{P}_1\cup v_1v_4$，对于 $i\in[2,n-2]$，取 T_i 与子情形 3.1 中相同.

当 $v'_3=v_1$ 和 $v'_4=v_2$ 时，基于以上讨论，令 $T_1=P_1\cup v_1v_3\cup v_2v_4$，对于 $i\in[2,n-2]$，T_i 与子情形 3.1 中相同.

当 $v'_3\in V(B^1_{n-1})$ 或 $v'_4\in V(B^1_{n-1})$ 但是 $v'_3,v'_4\notin\{v_1,v_2\}$，$T_i$ 与子情形 3.1 中都相同，其中 $i\in[1,n-2]$.

因此，B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-2}$ 连接 S.

情形 4　S 中的点在 B_n 的 4 个子块中.

不失一般性，不妨令 $v_1\in V(B^1_{n-1})$，$v_2\in V(B^2_{n-1})$，$v_3\in V(B^3_{n-1})$ 和 $v_4\in V(B^4_{n-1})$.令 $v_1=(a_1a_2\cdots a_{n-1}1)$.

首先，选取 v_1 作为起点，在 B^1_{n-1} 中构造$(n-1)$条内部不交的路.

$P^1_2=(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}1)(a_2a_1a_3\cdots a_{n-1}1)(a_2a_3a_1\cdots a_{n-1}1)\cdots(a_2a_3\cdots a_{n-1}a_11)$；

$P^1_3=(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}1)(a_1a_3a_2\cdots a_{n-1}1)\cdots(a_1a_3\cdots a_{n-1}a_21)$；

…

$P^1_{n-1}=(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}1)(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_{n-2}1)$；

$P^1_n=(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}1)$.

令 $\mathscr{P}_1=\{P_2{}^1,P_3{}^1,\cdots,P^1_n\}$ 是由 v_1 出发构造的路的集合.对 $i\in[2,n]$，令 u^1_i 是构造的路 P^1_i 的终点且 $X^1=\{u^1_2,u^1_3,\cdots,u^1_n\}$.由文献[15]的定理 4.1，$V(P^1_s)\cap V(P^1_t)=\{v_1\}$，且$(u^1_i)'$分别$B^2_{n-1},B^3_{n-1},\cdots,B^n_{n-1}$中，其中不同的 $s,t\in[2,n]$.为了讨论方便，对 $i\in[2,n]$，不妨令$(u^1_i)'\in V(B^i_{n-1})$.否则的话，可以把上述构造的路重新排序使得它们的终点的外邻点$(u^1_i)'$分别在 $B^2_{n-1},B^3_{n-1},\cdots,B^n_{n-1}$ 中.

类似地，可以在 B^2_{n-1} 中从 v_2 出发构造$(n-1)$条内部不交的路 $P^2_1,P^2_3,P^2_4\cdots,P^2_n$.令 $\mathscr{P}_2=\{P^2_1,P^2_3,\cdots,P^2_n\}$ 是从 v_2 出发构造的路的集合.令 u^2_j 是路 P^2_j 的终点且满足$(u^2_j)'\in V(B^j_{n-1})$，$X^2=\{u^2_1,u^2_3,\cdots,u^2_n\}$，其中 $j\in\{1,3,4,\cdots,n\}$.同时，在 B^3_{n-1} 中从 v_3 出发构造$(n-1)$条内部不交的路 $P^3_1,P^3_2,P^3_4\cdots,P^3_n$.令 $\mathscr{P}_3=\{P^3_1,P^3_2,P^3_4,\cdots,P^3_n\}$ 是从 v_3 出发构造的路的集合.令 u^3_k 是 P^3_k 的终点且满足$(u^3_k)'\in V(B^k_{n-1})$，$X^3=\{u^3_1,u^3_2,u^3_4,\cdots,u^3_n\}$，其中 $k\in\{1,2,4,\cdots,n\}$.在 B^4_{n-1} 中从 v_4 出发构造$(n-1)$条内部不交的路 $P^4_1,P^4_2,P^4_3,P^4_5,\cdots,P^4_n$.令 $\mathscr{P}_4=\{P^4_1,P^4_2,P^4_3,P^4_5,\cdots,P^4_n\}$ 是从 v_4 出发构造的路的集合.令 u^4_l 是路 P^4_l 的终点且满足$(u^4_l)'\in V(B^l_{n-1})$，$X^4=\{u^4_1,u^4_2,u^4_3,u^4_5,\cdots,u^4_n\}$，其中 $l\in\{1,2,3,5,\cdots,n\}$.

其次，下面说明在 B_n 中有$(n-2)$棵斯坦纳树.

子情形 4.1　$\mathscr{P}_i$ 中路的终点的外邻点在 $\mathscr{P}_j$ 中的前 3 条路上，其中不同的 $i,j\in[1,4]$.

此时，对 $s\in[5,n]$ 和 $t\in[1,4]$，$(u^t_s)'\in V(B^s_{n-1})$，令$(X^t)'=\{(u^t_5)',(u^t_6)',\cdots,(u^t_n)'\}$.由性质 2，得 $|(X^t)'|=n-4$.由引理 4，$B^{[5,n]}_{n-1}=B_n[V(B^5_{n-1})\cup V(B^6_{n-1})\cup\cdots\cup V(B^n_{n-1})]$ 连通且 $\kappa(B^{[5,n]}_{n-1})=n-2$.结合引理 2，对不同的 $k,l\in[1,4]$，在 $B^{[5,n]}_{n-1}$ 中有两两不交的$((X^k)',(X^l)')$-路.注意到 $B^{[5,n]}_{n-1}$ 是连通的，存在树 $\hat{T}_s$ 连接$\{(u^1_s)',(u^2_s)',(u^3_s)',(u^4_s)'\}$，其中 $s\in[5,n]$.由引理 2，对不同的 $r,m\in[5,n]$，树 $\hat{T}_r$ 和 $\hat{T}_m$ 内部

不交.令 $T_s=\hat{T}_s\cup u_s^1(u_s^1)'\cup u_s^2(u_s^2)'\cup u_s^3(u_s^3)'\cup u_s^4(u_s^4)'$,其中 $s\in[5,n]$. B_n 中有$(n-4)$棵内部不交的斯坦纳树.下一步将会选 B_n 中另外 2 棵内部不交的斯坦纳树.

这种情形下,对 $i\in[2,4]$,$(u_i^1)'\in V(B_{n-1}^i)$;对 $j\in\{1,3,4\}$,$(u_j^2)'\in V(B_{n-1}^j)$;对 $k\in\{1,2,4\}$,$(u_k^3)'\in V(B_{n-1}^k)$;对 $l\in[1,3]$,$(u_l^4)'\in V(B_{n-1}^l)$.令 r_1 是$((u_2^1)',v_2)$-路 $\hat{P}_1$ 与 $V(P_1^2)$相交的第一个点,$\hat{P}_1[(u_2^1)',r_1]$是起点为$(u_2^1)'$终点为 r_1 的路;r_2 是$((u_3^2)',v_3)$-路 $\hat{P}_2$ 与 $V(P_1^3)$相交的第一个点,$\hat{P}_2[(u_3^2)',r_2]$是起点为(u_3^2)终点为 r_2 的路;r_3 是$((u_4^3)',v_4)$-路 $\hat{P}_3$ 与 $V(P_1^4)$相交的第一个点,$\hat{P}_3[(u_4^3)',r_3]$是起点为$(u_4^3)'$终点为 r_3 的路;r_4 是$((u_3^1)',v_3)$-路 $\hat{P}_4$ 与 $V(P_2^3)$相交的第一个点,$\hat{P}_4[(u_3^1)',r_4]$是起点为$(u_3^1)'$终点为 r_4 的路;r_5 是$((u_4^1)',v_4)$-路 $\hat{P}_5$ 与 $V(P_3^4)$相交的第一个点,$\hat{P}_5[(u_4^1)',r_5]$是起点为$(u_4^1)'$终点为 r_5 的路;r_6 是$((u_2^4)',v_2)$-路 $\hat{P}_6$ 与 $V(P_4^2)$相交的第一个点,$\hat{P}_6[(u_2^4)',r_6]$是起点为$(u_2^4)'$终点为 r_6 的路.令 $T_1=P_2^1\cup\hat{P}_1[(u_2^1)',r_1]\cup P_1^2\cup P_3^2\cup\hat{P}_2[(u_3^2)',r_2]\cup P_1^3\cup P_4^3\cup\hat{P}_3[(u_4^3)',r_3]\cup P_1^4$,$T_2=P_2^3\cup\hat{P}_4[(u_3^1)',r_4]\cup P_3^1\cup P_4^1\cup\hat{P}_5[(u_4^1))',r_5]\cup P_3^4\cup P_2^4\cup\hat{P}_6[(u_2^4)',r_6]\cup P_4^2$.

因此,在 B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,T_5,\cdots,T_n$ 连接 S.

子情形 4.2 对不同的 $i,j\in[1,n]$,$\mathscr{P}_i$ 中路的终点的外邻点在 $\mathscr{P}_j$ 中的路上.

在这种情形下,令 t_1 是$((u_3^1)',v_3)$-路 $\bar{P}_1$ 与 $V(P_5^3)$相交的第一个点,$\bar{P}_1[(u_3^1)',t_1]$是起点为$(u_3^1)'$终点为 t_1 的路;t_2 是$((u_2^3)',v_2)$-路 $\bar{P}_2$ 与 $V(P_5^2)$相交的第一个点,$\bar{P}_2[(u_2^3)',t_2]$是起点为$(u_2^3)'$终点为 t_2 的路;t_3 是$((u_1^4)',v_1)$-路 $\bar{P}_3$ 与 $V(P_5^1)$相交的第一个点,$\bar{P}_3[(u_1^4)',t_3]$是起点为$(u_1^4)'$终点为 t_3 的路.令 $T_{n-2}=P_3^1\cup\bar{P}_1[(u_3^1)',t_1]\cup P_5^3\cup P_2^3\cup\bar{P}_2[(u_2^3)',t_2]\cup P_5^2\cup P_5^1\cup\bar{P}_3[(u_1^4)',t_3]\cup P_1^4$.

由以上讨论,$\mathscr{P}_1$ 中除 P_3^1 和 P_5^1 外还有$(n-3)$条构造的路;$\mathscr{P}_3$ 中除 P_2^3 和 P_5^3 外还有$(n-3)$条构造的路;$\mathscr{P}_2$ 中除 P_5^2 外还有$(n-2)$条构造的路;$\mathscr{P}_4$ 中除 P_1^4 外还有$(n-2)$条构造的路.注意到 $v_1=(a_1a_2\cdots a_{n-1}1)$.所以,$a_{n-1}\neq 2$ 和 $a_{n-1}\neq 3$ 有一个是成立的.不失一般性,不妨令 $a_{n-1}\neq 2$.由 P_2^1 的构造方法,得 $u_2^1=(a_2a_3\cdots a_{n-1}a_11)$.令 $u_2^1=(a_2a_3\cdots a_{n-1}21)$ 和 $a_i=5$.把路 P_2^1 从点 u_2^1 起进行如下延伸:

$$(a_2\cdots 5a_{i+1}\cdots a_{n-1}21)(a_2\cdots a_{i+1}5\cdots a_{n-1}21)\cdots(a_2\cdots a_{i+1}\cdots a_{n-1}251).$$

令 $\hat{u}_2^1=(a_2\cdots a_{i+1}\cdots a_{n-1}251)$,则$(\hat{u}_2^1)'\in V(B_{n-1}^5)$.令 $\widetilde{P}_2^1$ 是起点为 v_1 终点为 $\hat{u}_2^1$ 的路.由文献[15]的定理 4.1,得$V(\widetilde{P}_2^1)\cap V(P_j^1)=\emptyset$,其中 $j\in[3,n]$.用同样的方法延伸 P_4^1 使得延伸后路的终点的外邻点在 B_{n-1}^l 中,其中 $l\in[5,n]$.所有不包含在 T_{n-2} 中的路都可以按照上述方法进行延伸.注意到延伸后路的终点的外邻点在 $B_{n-1}^{[5,n]}$ 中.由引理 4,$B_{n-1}^{[5,n]}$ 连通且 $\kappa(B_{n-1}^{[5,n]})=n-2$.与子情形 4.1 类似,令 B_{n-1}^i 中延伸后路的终点的外邻点集合为$(X^i)'$,其中 $i\in[1,4]$.结合性质 2 和 B_{n-1}^i 中构造的路的数目,有 $|(X^1)'|=|(X^3)'|=n-3$ 和 $|(X^2)'|=|(X^4)'|=n-2$.再次注意到由引理 4 得 $B_{n-1}^{[5,n]}$ 连通且 $\kappa(B_{n-1}^{[5,n]})=n-2$.结合引理 2,对不同的 $k,l\in[1,4]$,$B_{n-1}^{[5,n]}$中有$(n-3)$条两两不交的$((X^k)',(X^l)')$-路.因此有$(n-3)$棵树 $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\cdots,\hat{T}_{n-3}$ 连接$(X^i)'$.由引理 2,对不同的 $r,m\in[5,n]$,树 $\hat{T}_r$ 和 $\hat{T}_m$ 是内部不交的.令树 $\hat{T}_j$ 并上延伸的路为树 T_j,其中 $j\in[1,n-3]$.此时,在 B_n 中有$(n-3)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3}$ 连接 S.

因此,B_n 中有$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树 $T_1,T_2,\cdots,T_{n-3},T_{n-2}$连接 S.

综上所述,$\kappa_4(B_n)\geq n-2$ 对 n 成立.

结合引理 5 和引理 6,可得下述结论.

定理 2 当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_4(B_n)=n-2$.

3 结 论

泡序图有许多吸引研究者的性质.本文证明了当 $n\geq 3$ 时,$\kappa_4(B_n)=n-2$,即,在 B_n 中有至少$(n-2)$棵内部不交的斯坦纳树连接任意 4 个顶点.需要说明的是,那些内部不交的斯坦纳树是通过构造得到的,因此不是唯一存在的,B_n 中还可能存在其他形式的内部不交斯坦纳树.随后,作者会寻求 B_n 的广义 k-连通度中更一般的 k.

参 考 文 献

[1] WHITNEY H.Congruent graphs and the connectivity of graphs[J].American Journal of Mathematics,1932,54(1):150-168.

[2] HARARY F.Conditional connectivity[J].Networks,1983,13(3):347-357.

[3] FÀBREGA J,FIOL M A.On the extraconnectivity of grphs[J].Discrete Mathematics,1996,155:49-57.

[4] LATIFI S,HEGDE M,NARAGHI-POUR M.Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems[J].IEEE Transactions on Computers,1994,43(2):218-222.

[5] MENGER K.Zur allgemeinen kurventheorie[J].Fundamenta Mathematicae,1927,10:96-115.

[6] LIN C-K,ZHANG L,FAN J,et al.Structure connectivity and substructure connectivity of hypercubes[J].Theoretical Computer Science,2016,634:97-107.

[7] LI M,ZHANG S,LI R,et al.Structure fault tolerance of k-ary n-cube networks[J].Theoretical Computer Science,2019,795:213-218.

[8] XU M,JING J. The connectivity and super connectivity of bubble-sort graph[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica-Chinese,2012,35(5):789-794.

[9] WANG S,WANG Z,WANG M.The 2-extra connectivity and 2-extra diagnosability of bubble-sort star graph networks[J].The Computer Journal,2016,59(12):1839-1856.

[10] WANG Y,WANG S.The 3-good-neighbor connectivity of modified bubble-sort graphs[J].Mathematical Problems in Engineering,2020,2020:1-18.

[11] 王世英，杨婕，马晓蕾.修正泡型图的条件匹配排除[J].河南师范大学学报(自然科学版),2021,49(1):1-9.
WANG S Y,YANG J,MA X L.Conditional matching preclusion of the modified bubble-sort graph[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2021,49(1):1-9.

[12] CHARTRAND G,KAPOOR S F,LESNIAK L,LICK D R.Generalized connectivity in graphs[J].Bulletin Bombay Math Colloq,1984,2:1-6.

[13] LI S,LI X,ZHOU W.Sharp bounds for the generalized connectivity $\kappa_3(G)$[J].Discrete Mathematics,2010,310:2147-2163.

[14] ZHAO S,HAO R,WU J.The generalized 3-connectivity of some regular networks[J].The Journal of Parallel and Distributed Computing,2019,133:18-20.

[15] LI S,TU J,YU C.The generalized 3-connectivity of star graphs and bubble-sort graphs[J].Applied Mathematics and Computation,2016,274:41-46.

[16] LI S,SHI Y,TU J.The generalized 3-connectivity of Cayley graphs on symmetric groups generated by trees and cycles[J].Graphs and Combinatorics,2017,33:1195-1209.

[17] LIN S,ZHANG Q.The generalized 4-connectivity of hypercubes[J].Discrete Applied Mathematics,2017,220:60-67.

[18] ZHAO S,HAO R,WU J.The generalized 4-connectivity of hierarchical cubic networks[J].Discrete Applied Mathematics,2021,289:194-206.

[19] ZHAO S,HAO R.The generalized 4-connectivity of exchanged hypercubes[J].Applied Mathematics and Computation,2019,347:342-353.

[20] BONDY J A.Murty,Graph Theory[M].New York:Springer,2007.

[21] XU M.The connectivity and super connectivity of bubble-sort graph[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica-Chinese,2012,35:789-794.

[22] CHENG E,LIPTÁK L.Linearly many faults in Cayley graphs generated by transposition trees[J].Information Sciences,2007,177:4877-4882.

[23] LI S.Some Topics on Generalized Connectivity of Graphs[D].Tianjing:Nankai University,2012.

The generalized 4-connectivity of bubble-sort graphs

Wang Yanling[1], Feng Wei[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;
2. College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia Minzu University, Tongliao 028043, China)

Abstract: Let $S \subseteq V(G)$ be a vertex set and $|S| \geq k$ for $2 \leq k \leq n$, a tree T is called an S-Steiner tree if T connects S . Two S-Steiner trees T_1 and T_2 are internally disjoint if $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$ and $V(T_1) \cap V(T_2) = S$. Let $\kappa_\kappa G(S)$ be the maximum number of the internally disjoint S-Steiner trees. $\kappa_k(G) = \min\{\kappa_G(S) : S \subseteq V(G), |S| = k\}$ is defined as the generalized k-connectivity of G . Obviously, when $|S| = 2$, the generality 2-connectivity $\kappa_2(G)$ is the classical connectivity $\kappa(G)$. Then the generality connectivity is a generalization of the classical connectivity. In this paper, we focus on the generality 4-connectivity $\kappa_4(B_n)$ of the bubble-sort graph B_n and get $\kappa_4(B_n) = n - 2$ when $n \geq 3$.

Keywords: generalized 4-connectivity; internally disjoint; bubble-sort graphs; paths

[责任编校　陈留院　赵晓华]