

平方图的 2-距离和可区别边染色

王芹¹, 杨超¹, 姚兵²

(1. 上海工程技术大学 数理与统计学院; 智能计算与应用统计研究中心, 上海 201620;

2. 西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 为了进一步研究图的 2-距离和可区别边染色的问题. 利用组合分析法、反证法以及分类讨论的思想, 得到了路、圈、 $C_n \wedge P_m$ 、 $C_m \wedge C_n$ 、 $C_n \wedge P_m \wedge C_k$ 等 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数, 结果表明这 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数均不超过 $\Delta + 2$.

关键词: 边染色; 2-距离和可区别边染色; 平方图

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

1 预备知识

染色问题是图论中的经典问题之一, 具有较强的应用背景, 它解决了如存储问题、课程表问题、电路设计等众多实际问题^[1]. 2002 年, ZHANG 等^[1]首次提出了图的邻点可区别正常边染色, 即在正常边染色的基础上区分相邻点的色集合, 相关研究成果详见文献[2-8]. 对于两个不同的集合, 它们的元素之和可能会相同, 但若两个集合元素之和不同, 则这两个集合一定不同. 2013 年, FLANDRIN 等^[9]提出了图的邻和可区别正常边染色, 需要考虑相邻顶点边色集合的元素之和, 即图 G 的一个正常边染色满足任意相邻两点的色集合的元素之和不同. 2021 年, 强会英等^[10]在邻和可区别边染色的基础上考虑将相邻点扩展为距离不超过 2 的点, 提出了图的 2-距离和可区别边染色的概念, 并研究了无 K_4 -子式图的 2-距离和可区别边染色. 本文探讨 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数问题.

定义 1^[10] 设 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 为图 G 的一个正常边染色, 若对任意的 $u, v \in V(G)$ 且 $dist_G(u, v) \leq 2$, 都有 $\sigma_G(u) \neq \sigma_G(v)$, 其中 $dist_G(u, v)$ 表示 u, v 两点间的最短距离, $\sigma_G(u) = \sum_{w \in N(u)} f(uw)$, 则称 f 为图 G 的 2-距离和可区别边染色. 将图 G 存在 2-距离和可区别 k -边染色的最小值 k 称为图 G 的 2-距离和可区别边色数, 记为 $\chi'_{2-\Sigma}(G)$.

定义 2 设 u 和 v 分别表示连通图 G 和 H 中的最小度点, 称图 $G \wedge H$ 表示将 G 中的点 u 与 H 中的点 v 粘连一起后得到的图.

定义 3^[11] 图 G 的平方图 G^2 是以 $V(G)$ 作为它的点集, 任意两个点 u, v 在 G^2 中相邻当且仅当 $1 \leq dist_G(u, v) \leq 2$.

引理 1^[12] 若图 G 存在两个距离小于等于 2 的最大度点, 则 $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geq \Delta(G) + 1$.

本文论及的图均为有限、无向、连通的简单图. 设 $N(u)$ 表示 u 的邻点集, $\Delta(G)$ (或 Δ) 表示图的最大度; 设 u, v 为图 G 中任意两点, 称满足 $D_G(u, v) \leq 2$ 的点为 2-距离点. 文中未定义的术语和符号均采用于

收稿日期: 2022-04-06; 修回日期: 2022-04-21.

基金项目: 国家自然科学基金(61672001; 61662066; 62072296).

作者简介: 王芹(1997-), 女, 山东滨州人, 上海工程技术大学硕士研究生, 研究方向为图论及其应用, E-mail: w1913942134@163.com.

通信作者: 杨超(1988-), 男, 河南光山人, 上海工程技术大学讲师, 博士, 研究方向为图论及其应用、网路与系统安全. E-mail: yangchao@sues.edu.cn.

文献[13].

2 主要结论

定理 1 对 n 阶路平方图 $P_n^2 (n \geq 5)$, 有 $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) = 5$.

证明 设路 $P_n = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n$, 则 $d_{P_n^2}(\nu_1) = d_{P_n^2}(\nu_n) = 2, d_{P_n^2}(\nu_2) = d_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 3, d_{P_n^2}(\nu) = 4, \nu \in V(P_n^2) - \{\nu_1, \nu_n, \nu_2, \nu_{n-1}\}$. 由引理 1 知 $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) \geq 5$. 当 $n = 5$ 时, P_5^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1}$ 按照 $(3, 1, 2, 1)$ 着色, 对边 $\nu_i \nu_{i+2}$ 按照 $(4, 5, 3)$ 着色, 则有 $\sigma_{P_n^2}(\nu_1) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_2) = 9, \sigma_{P_n^2}(\nu_3) = 10, \sigma_{P_n^2}(\nu_4) = 8, \sigma_{P_n^2}(\nu_5) = 4$. 下面定义 $P_n^2 (n \geq 6)$ 的一个 5-边染色: P_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1}$ 按照 $(3, 1, 2, 1, 2)$ 循环着色, 对边 $\nu_i \nu_{i+2}$ 按照 $(4, 4, 3, 5, 5)$ 循环着色. 由上述

$$\text{染色可得 } \sigma_{P_n^2}(\nu_1) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_2) = 8, \sigma_{P_n^2}(\nu_i) = \begin{cases} 10, i \equiv 3 \pmod{5} \\ 12, i \equiv 4 \pmod{5} \\ 11, i \equiv 0 \pmod{5}, i \in [3, n-2] \\ 14, i \equiv 1 \pmod{5} \\ 13, i \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

当 $n \equiv 0 \pmod{5}$ 时, $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 4, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 7$; 当 $n \equiv 1 \pmod{5}$ 时, $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 6$; 当 $n \equiv 2 \pmod{5}$ 时, 需要调整边 $\nu_n \nu_{n-1}$ 的染色, 用 1 重新给边 $\nu_n \nu_{n-1}$ 染色, 得 $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 6, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 8$; 当 $n \equiv 3 \pmod{5}$ 时, $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 5, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 9$; 当 $n \equiv 4 \pmod{5}$ 时, $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 6, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 7$.

综上所述, $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) = 5$.

定理 2 对 n 阶圈平方图 C_n^2 , 有 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) = \begin{cases} 5, n \equiv 0 \pmod{5} \\ 6, n \not\equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$.

证明 设 $C_n = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n \nu_1$, 则 $d_{C_n^2}(\nu) = 4$. 由引理 1 知, $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) \geq 5$. 对圈平方图 C_n^2 的边染色分如下情况进行讨论.

情形 1 $n \equiv 0 \pmod{5}$

下面给出 C_n^2 的一个 5-边染色: 边 $\nu_i \nu_{i+1}$ 按照 $(1, 2, 1, 2, 3)$ 依次循环染色, 边 $\nu_i \nu_{i+2}$ 按照 $(4, 3, 5, 5, 4)$ 依次循环染色. 此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1), \sigma_{C_n^2}(\nu_2), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$ 按照 $(12, 10, 12, 11, 14)$ 依次循环, 结论成立.

情形 2 $n \not\equiv 0 \pmod{5}$

首先证明 C_n^2 中不存在 2-距离和可区别 5-边染色. 假设当 $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ 时 C_n^2 中存在一个 2-距离和可区别 5-边染色. 由于 C_n^2 中任意 5 个连续点距离均不超过 2, 不失一般性, 取 C_n^2 中的 6 个连续点 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$, 则一定有 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_6)$. 当 $n \equiv 1 \pmod{5}$ 时, 有 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$; 当 $n \equiv 2 \pmod{5}$ 时, 有 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$; 当 $n \equiv 3 \pmod{5}$ 时, 有 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})$; 当 $n \equiv 4 \pmod{5}$ 时, 有 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})$. 这与定义 1 矛盾, 因此 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) \geq 6$.

情形 2.1 当 $n \equiv 1 \pmod{5}$ 时, 对 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$ 按照 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 循环染色, 边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 2, 边 $\nu_n \nu_1$ 染 5, 边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$ 按照 $(4, 5, 1, 6, 3)$ 循环染色, 边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 6, 边 $\nu_n \nu_2$ 染 4. 则权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$ 按照 $(10, 18, 13, 16, 11)$ 依次循环 $\sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 17, \sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 16, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 12$, 结论成立.

情形 2.2 当 $n \equiv 2 \pmod{5}$ 时, 对 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$ 按照 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 循环染色, 边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 2, 边 $\nu_n \nu_1$ 染 6, 边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$ 按照 $(4, 5, 1, 6, 3)$ 循环染色, 边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 3, 边 $\nu_n \nu_2$ 染 4. 此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$ 依次按照 $(10, 18, 13, 16, 11)$ 顺序循环 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 12, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 15$, 结论成立.

情形 2.3 当 $n \equiv 3 \pmod{5}$ 时, 对 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-3])$ 按照 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 依次循环染色, 边 $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$ 染 4, 边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 6, 边 $\nu_n \nu_1$ 染 5, 边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-3])$ 按照 $(4, 5, 1, 6, 3)$ 循环染色, 边 $\nu_{n-2} \nu_n$ 染 2, 边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 2, 边 $\nu_n \nu_2$ 染 3. 此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_2), \sigma_{C_n^2}(\nu_3), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})$ 依次按照 $(11, 10, 18, 13, 16)$ 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 12, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 16, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 15, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 17$, 结论成立.

情形 2.4 当 $n \equiv 4 \pmod{5}$ 时,对 C_n^2 的边 $\nu_i\nu_{i+1} (i \in [1, n-4])$ 按照 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 循环染色,边 $\nu_{n-3}\nu_{n-2}$ 染 4,边 $\nu_{n-2}\nu_{n-1}$ 染 6,边 $\nu_{n-1}\nu_n$ 染 1,边 $\nu_n\nu_1$ 染 6,边 $\nu_i\nu_{i+2} (i \in [1, n-4])$ 按照 $(4, 5, 1, 6, 3)$ 循环染色,边 $\nu_{n-3}\nu_{n-1}$ 染 2,边 $\nu_{n-2}\nu_n$ 染 2,边 $\nu_{n-1}\nu_1$ 染 5,边 $\nu_n\nu_2$ 染 3.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_2), \sigma_{C_n^2}(\nu_3), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-4})$ 依次按照 $(11, 10, 18, 13, 16)$ 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1)=16, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)=12, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})=14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})=15, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})=17$, 结论成立.

定理 3 $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m]^2) = \Delta + 1$.

证明 不妨记 $G_1 = [C_n \wedge P_m]^2$, 其中 $C_n = \nu_1\nu_2 \cdots \nu_n\nu_1, P_m = u_1u_2 \cdots u_{m-1}u_m$. 令 $u_1 = \nu_x, u_2 = u_y, u_3 = u_{y+1}, u_4 = u_{y+2}$, 则 $G_1 = (C_n^2 \wedge P_m^2) \cup \{u_y\nu_{x-1}, u_y\nu_{x+1}\}$, 其中 ν_x 为 C_n^2 和 P_m^2 的黏接点. $[C_6 \wedge P_7]^2$ 如图 1 所示.

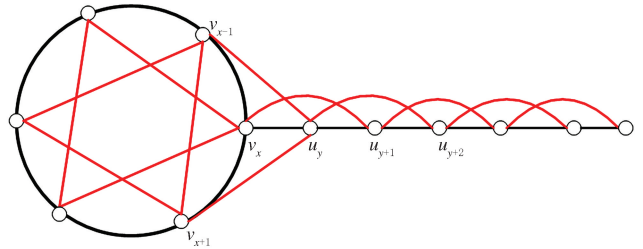


图1 $[C_6 \wedge P_7]^2$
Fig. 1 $[C_6 \wedge P_7]^2$

图 G_1 中圈平方图 C_n^2 的边染色方式见定理 2 且使 $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = \max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\}$, 其中 $\nu_i \in V(C_n^2)$. 由引理 1 知 $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m]^2) \geq \Delta + 1$. 下面分 3 种情形对 G_1 进行边染色.

情形 1 $n \equiv 0 \pmod{5}$

根据定理 2 可知 $\max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\} = 14$, 在没有连接路平方图 P_m^2 时 $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 11, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 13$. 令边 $\nu_x u_y$ 染 6, 边 $\nu_{x-1} u_y$ 染 4, 边 $\nu_{x+1} u_y$ 染 7, 边 $\nu_x u_{y+1}$ 染 1, 边 $u_y u_{y+1}$ 染 3, 然后对图 G_1 中路平方图 P_m^2 进行染色, 对于 $P_m^2, u_1 = \nu_x, u_2 = u_y$, 对边 $u_i u_{i+1} (i \in [3, m-1])$ 按照 $(2, 3, 1, 2, 1)$ 依次循环染色, 对边 $u_i u_{i+2} (i \in [2, m-2])$ 按照 $(5, 5, 4, 4, 3)$ 依次循环染色. 由上述染色可得, $\sigma_{G_1}(\nu_x) = 21, \sigma_{G_1}(\nu_{x-1}) = 15, \sigma_{G_1}(\nu_{x+1}) = 20, \sigma_{G_1}(u_y) = 25$, 图 G_1 中路平方图 P_m^2 中的点 $\sigma_{G_1}(u_i) (i \in [3, m-2])$ 按照 $(11, 14, 13, 10, 12)$ 循环, 若 $\sigma_{G_1}(u_{m-1}) = \sigma_{G_1}(u_m)$, 调色方式与定理 1 相同, 若 $\sigma_{G_1}(u_{m-1}) = \sigma_{G_1}(u_{m-4})$, 将边 $u_{m-1}u_m$ 重新染 1, 此时 $\sigma_{G_1}(u_m) = 6, \sigma_{G_1}(u_{m-1}) = 8, \sigma_{G_1}(u_{m-4}) = 10$, 故对于图 $[C_n \wedge P_m]^2$ 中路平方图 P_m^2 中的任意 2-距离点都是可区分的. 容易验证, $\nu_x, \nu_{x-1}, \nu_{x+1}, u_y$ 的权重也是可区分的, 结论得证.

情形 2 $n \not\equiv 0 \pmod{5}$

由定理 2 可知 $\max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\} = 18$, 在没有连接路平方图 P_m^2 时 $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = 18, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 10, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 13$. 令边 $\nu_x u_y$ 染 2, 边 $\nu_{x-1} u_y$ 染 5, 边 $\nu_{x+1} u_y$ 染 7, 边 $\nu_x u_{y+1}$ 染 7, 边 $u_y u_{y+1}$ 染 1, 边 $u_{y+1} u_{y+2}$ 染 2, 边 $\nu_y u_{y+2}$ 染 6, 接下来对图 G_1 中路平方图 P_m^2 进行染色, 对于 $P_m^2, u_1 = \nu_x, u_2 = u_y$, 边 $u_i u_{i+1} (i \in [4, m-1])$ 按照 $(1, 2, 1, 2, 3)$ 循环染色, 边 $u_i u_{i+2} (i \in [3, m-2])$ 按照 $(4, 4, 3, 5, 5)$ 循环染色. 此时 $\sigma_{G_1}(\nu_x) = 27, \sigma_{G_1}(\nu_{x-1}) = 15, \sigma_{G_1}(\nu_{x+1}) = 20, \sigma_{G_1}(u_y) = 21, \sigma_{G_1}(u_{y+1}) = 14, \sigma_{G_1}(u_{y+2}) = 13$. 图 $[C_n \wedge P_m]^2$ 中路平方图 P_m^2 中的点 $\sigma_{G_1}(u_i) (i \in [5, m-2])$ 按照 $(10, 12, 11, 14, 13)$ 循环, 若 $\sigma_{G_1}(u_{n-1})$ 和 $\sigma_{G_1}(u_n)$ 冲突, 调色方式与定理 1 相同, 对于 P_m^2 中的任意 2-距离点都是可区分的. 同时, $\nu_x, \nu_{x-1}, \nu_{x+1}, u_y$ 权重也是可区分的, 结论得证.

定理 4 $\chi'_{2-\Sigma}([C_m \wedge C_n]^2) = \Delta + 1$.

证明 设 $G_2 = [C_m \wedge C_n]^2$, 其中 $C_m = u_1u_2 \cdots u_mu_1, C_n = \nu_1\nu_2 \cdots \nu_n\nu_1$. 则 $G_2 = (C_m^2 \wedge C_n^2) \cup \{u_{x-1}\nu_{x+1}, u_{x-1}\nu_{x-1}, u_{x+1}\nu_{x+1}, u_{x+1}\nu_{x-1}\}$, 这里 C_m^2 与 C_n^2 黏接点为 u_x (或 ν_x), $u_x \in V(C_m), \nu_x \in V(C_n)$. 图 $[C_5 \wedge C_7]^2$ 如图 2 所示.

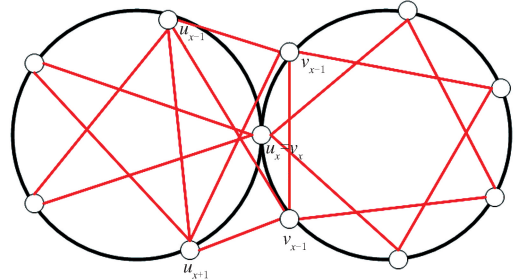


图2 $[C_5 \wedge C_7]^2$
Fig. 2 $[C_5 \wedge C_7]^2$

在 C_m^2 未连接 C_n^2 时, 使 $\max\{\sigma_{C_m^2}(u_x)\} = 18, \sigma_{C_m^2}(u_{x-1}) = 10, \sigma_{C_m^2}(u_{x+1}) = 13$. C_m^2 在 $m \not\equiv 0 \pmod{5}$ 时的边染色方式见定理 2, 当 $m \equiv 0 \pmod{5}$ 时, C_m^2 的边 $u_i u_{i+1} (i \in [1, n])$ 按照 $(1,$

2,3,4,5) 循环染色,边 $u_i u_{i+1} (i \in [1, n])$ 按照(4,5,1,6,3) 循环染色. 此时权重 $\sigma_{G_2}(u_1), \sigma_{G_2}(u_2), \dots, \sigma_{G_2}(u_n)$ 依次按照(16,11,10,18,13) 顺序循环. C_n^2 的边染色方式分以下 5 种情况.

情形 1 当 $n \equiv 0 \pmod{5}$ 时,对圈平方图 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1}$ 按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边 $\nu_i \nu_{i+2}$ 按照(2,6,9,8,7) 循环染色.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_1), \sigma_{C_n^2}(\nu_2), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$ 依次按照(22,30,26,25,23) 顺序循环,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

情形 2 当 $n \equiv 1 \pmod{5}$ 时,对圈平方图 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-1])$ 按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边 $\nu_n \nu_1$ 染 1,边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-1])$ 按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边 $\nu_n \nu_2$ 染 5.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$ 依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 19, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 17$,在该情形下 2-距离点的权重可区别.

情形 3 当 $n \equiv 2 \pmod{5}$ 时,对圈平方图 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$ 按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 9,边 $\nu_n \nu_1$ 染 3,边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$ 按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 5,边 $\nu_n \nu_2$ 染 5.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$ 依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 19, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 25, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 24$,在该情形下除了 ν_{n-1} 与 2-距离点有冲突其他点均无冲突,连接 C_m^2 后,与 ν_{n-1} 权重相同的 2-距离点的权重也会对应增加,因此不会影响其他已区分权重的点.

情形 4 当 $n \equiv 3 \pmod{5}$ 时,对圈平方图 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-3])$ 按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边 $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$ 染 9,边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 1,边 $\nu_n \nu_1$ 染 8,边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-3])$ 按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边 $\nu_{n-2} \nu_n$ 染 4,边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 3,边 $\nu_n \nu_2$ 染 5.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})$ 依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 22, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 24, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 20, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 18$,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

情形 5 当 $n \equiv 4 \pmod{5}$ 时,对圈平方图 C_n^2 的边 $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-4])$ 按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边 $\nu_{n-3} \nu_{n-2}$ 染 1,边 $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$ 染 2,边 $\nu_{n-1} \nu_n$ 染 1,边 $\nu_n \nu_1$ 染 8,边 $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-4])$ 按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边 $\nu_{n-3} \nu_{n-1}$ 染 9,边 $\nu_{n-2} \nu_n$ 染 4,边 $\nu_{n-1} \nu_1$ 染 3,边 $\nu_n \nu_2$ 染 5.此时权重 $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-4})$ 依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 22, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3}) = 21, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 15, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 18$,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

选择 C_n^2 中 $\sigma_{C_n^2}(\nu_i) = 26$ 的点为黏接点,该点记为 ν_x .在未连接 C_m^2 时, $\sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 25, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 30$.将 C_n^2 与 C_m^2 用点 $\nu_x (=u_x)$ 黏接,令边 $u_{x-1} \nu_{x+1}$ 染 9,边 $u_{x+1} \nu_{x-1}$ 染 9,当 $n \equiv 0 \pmod{5}$ 时,边 $u_{x-1} \nu_{x-1}$ 染 6,边 $u_{x+1} \nu_{x+1}$ 染 2,出现边 $u_{x+1} \nu_{x-1}$ 与边 $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$ 的颜色相同,此时边 $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$ 调色为 5,于是有 $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 26, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 24, \sigma_{G_2}(\nu_{x+1}) = 33, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 36, \sigma_{G_2}(\nu_{x-3}) = 17$;当 $n \equiv 1 \pmod{5}$ 时,边 $u_{x-1} \nu_{x-1}$ 染 4,边 $u_{x+1} \nu_{x+1}$ 染 6,此时 $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 24, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 29, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 35, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 39$;当 $n \equiv 2, 3, 4 \pmod{5}$ 时,边 $u_{x-1} \nu_{x-1}$ 染 7,边 $u_{x+1} \nu_{x+1}$ 染 2,出现边 $u_{x+1} \nu_{x-1}$ 与边 $\nu_{x-1} \nu_{x-2}$ 的颜色相同,将边 $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$ 调色为 5,边 $\nu_{x-1} \nu_{x-2}$ 调色为 4,可得 $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 26, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 24, \sigma_{G_2}(\nu_{x+1}) = 36, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 39, \sigma_{G_2}(\nu_{x-2}) = 17, \sigma_{G_2}(\nu_{x-3}) = 21$;其中 $\sigma_{G_2}(u_{x-1}), \sigma_{G_2}(u_{x+1})$ 与 C_n^2 中权重相同点的距离大于 2,且 $\min\{\sigma_{G_2}(\nu_{x+1}), \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}), \sigma_{G_2}(u_x)\} > \max\{\sigma_{G_2}(u_i), \sigma_{G_2}(\nu_i)\}$, 结论得证.

定理 5 $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m \wedge C_k]^2) = \Delta + 1$.

证明 令 $G_3 = [C_n \wedge P_m \wedge C_k]^2$,且设 $C_n = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \nu_1, P_m = u_1 u_2 \dots u_{m-1} u_m, C_k = w_1 w_2 \dots w_k w_1$.不妨设 $C_n \wedge P_m$ 与定理 3 定义相同, $C_n \wedge P_m$ 与 C_k 黏接点记为 w_x, w_x 在 P_n 中相邻点为 w_q .令 $w_q = u_{m-1}, w_x = u_m$,则 $G_3 = G_2 \cup C_k^2 \cup \{w_q w_{x-1}, w_q w_{x+1}\}$,这里图 G_2 同定理 3.图 $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$ 如图 3 所示.

图 G_3 中子图 G_2 的边染色见定理 3. $C_k^2 (k \neq 0 \pmod{5})$ 的边染色方式以及各点的权重见定理 2, $C_k^2 (k \equiv 0 \pmod{5})$ 的边染色方式如下: $w_i w_{i+1}$ 按照(1,2,3,4,5) 循环染色, $w_i w_{i+2}$ 按照(4,5,1,6,3) 循环染色,权重 $\sigma_{C_k^2}(w_i)$ 按照(16,11,10,18,13) 循环.选择 C_k^2 中, $\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18, \sigma_{C_k^2}(w_{i-1}) = 10, \sigma_{C_k^2}(w_{i+1}) = 13$ 的点 w_i 为黏接点记为 w_x ,与 w_i 相邻的点 w_{i-1}, w_{i+1} 分别记为 w_{x-1}, w_{x+1} .下面对 $\sigma_{P_m^2}(u_m)$ 和 $\sigma_{P_m^2}(u_{m-1})$ 进行分类讨论.

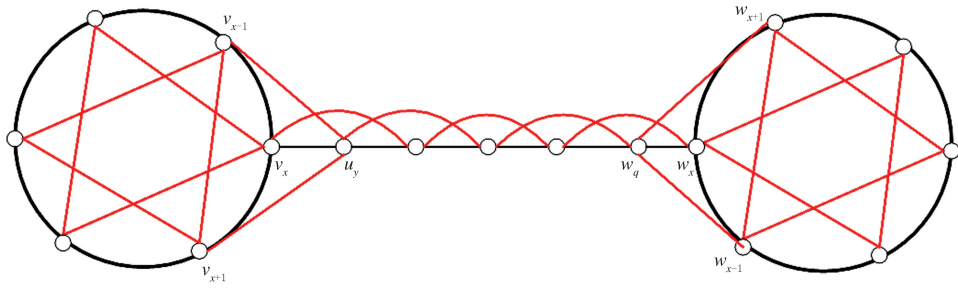


图3 $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$

Fig. 3 $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$

情形 1 当 $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 6, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 8$ 时,边 $w_q w_{x+1}$ 染 6,边 $w_q w_{x-1}$ 染 7,调色使边 $w_x w_{q-1}$ 染 7,边 $w_q w_{q-1}$ 染 4,此时 $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 15, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$, 且有

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{q-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}, w_{x-1}\}), \sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}, w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 2 当 $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 7, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 6$ 时,边 $w_q w_{x+1}$ 染 6,边 $w_q w_{x-1}$ 染 7,调色使边 $w_x w_{q-1}$ 染 7,边 $w_q w_{q-1}$ 染 5,此时 $\sigma_{G_3}(w_x) = 27, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 18, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$, 且有

$$\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18 (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 3 当 $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 4, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 7$ 时,边 $w_q w_{x+1}$ 染 6,边 $w_q w_{x-1}$ 染 7,调色使边 $w_x w_{q-1}$ 染 7,边 $w_x w_{q-1}$ 染 3,此时 $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 21, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 15, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$, 且有

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{q-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}), \sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 4 当 $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 6, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 7$ 时,边 $w_q w_{x+1}$ 染 6,边 $w_q w_{x-1}$ 染 7,调色使边 $w_x w_{x+1}$ 染 7,此时 $\sigma_{G_3}(w_x) = 27, \sigma_{G_3}(w_q) = 20, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 22, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$, 且有,

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 5 当 $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 5, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 9$ 时,边 $w_q w_{x+1}$ 染 6,边 $w_q w_{x-1}$ 染 7,调色使边 $w_x w_{q-1}$ 染 7,边 $w_q w_{q-1}$ 染 4,此时 $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 18, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$, 且有

$$\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18 (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

综上所述,结论成立.

参 考 文 献

[1] ZHANG Z F, LIU L Z, WANG J F. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623-626.
 [2] 安 卓 莫, 田 双 亮, 蔡 瑾. 路 的 强 积 的 邻 点 可 区 别 边 染 色 [J]. 西 北 民 族 大 学 学 报 (自 然 科 学 版), 2020, 41(4): 7-10.
 AN Z M, TIAN S L, CAI J. Adjacent vertex distinguishing edge coloring of strong product of paths[J]. Journal of Northwest Minzu Uni-

- versity(Natural Science),2020,41(4):7-10.
- [3] BURRIS A C,SCHHELP R H.Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J].Journal of Graph Theory,1997,26(2):73-82.
- [4] 张小秀.平面图邻点可区别边染色[D].金华:浙江师范大学,2020.
ZHANG X X.Adjacent vertex distinguishing edge coloring of planar graphs[D].Jinhua:Zhejiang Normal University,2020.
- [5] 张小秀,黄丹君.围长至少为 5 的平面图的邻点可区别边染色[J].数学学报(中文版),2022,65(2):325-334.
ZHANG X X,HUANG D J.Adjacent vertex distinguishing edge coloring of planar graphs with girth at least 5[J].Acta Mathematica Sinica(Chinese Series),2022,65(2):325-334.
- [6] WANG W F,WANG Y Q.Adjacent vertex-distinguishing edge colorings of K_4 -minor free graphs[J].Applied Mathematics Letters,2011,24(12):2034-2037.
- [7] 严谦泰,张忠辅.一类正则二部图的邻强边染色[J].河南师范大学学报(自然科学版),2006,34(3):12-13.
YAN Q T,ZHANG Z F.On the adjacent strong edge coloring of r -regular partite graph[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2006,34(3):12-13.
- [8] 王治文,文飞,杨随义,等.图 $K_{2n} | E(F_5)(n \geq 13)$ 的点可区别边染色[J].河南师范大学学报(自然科学版),2010,38(6):1-3.
WANG Z W,WEN F,YANG S Y,et al.Vertex-distinguishing edge coloring of $K_{2n} | E(F_5)(n \geq 13)$ [J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2010,38(6):1-3.
- [9] FLANDRIN E,MARCZYK A,PRZYBYLO J,et al.Neighbor sum distinguishing index[J].Graphs and Combinatorics,2013,29(5):1329-1336.
- [10] 强会英,姚丽.无 K_4 -子式图的 2-距离和可区别边染色[J].山东大学学报(理学版),2021,56(11):83-86.
QIANG H Y,YAO L.2-distance sum distinguishing edge coloring of K_4 -minor-free graphs[J].Journal of Shandong University(Natural Science),2021,56(11):83-86.
- [11] WEGNER G.Graphs with given diameter and coloring problem[R].Dortmund:University of Dortmund,1977.
- [12] 姚丽.几类图的 2-距离和可区别边染色[D].兰州:兰州交通大学,2021.
YAO L.2-distance sum distinguishing coloring of several kinds of graphs[D].Lanzhou:Lanzhou Jiaotong University,2021.
- [13] BONDY J A,MURTY U S R.Graph theory with applications[M].London:The Macmillan Press,1976.

2-Distance sum distinguishing edge colorings of square graphs

Wang Qin¹, Yang Chao¹, Yao Bing²

(1. School of Mathematics, Physics and Statistics, Center of Intelligent Computing and Applied Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: This paper is to further study the problem of the 2-distance sum distinguishing edge coloring of graphs. By using the methods of combinatorial analysis, reduction to absurdity and categorical discussion, the 2-distance sum distinguishing edge chromatic numbers of five types of square graphs including paths, cycles, $C_n \wedge P_m$, $C_m \wedge C_n$ and $C_n \wedge P_m \wedge C_k$ are determined, respectively. The above results implies that the 2-distance sum distinguishing edge chromatic numbers are no more than $\Delta + 2$.

Keywords: edge coloring; 2-distance sum distinguishing edge coloring; square graphs

[责任编辑 陈留院 赵晓华]