文章编号:1000－2367(2018)05－0013－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.05.002

变指数 Herz-type Hardy 空间上的一类分数次积分及交换子

周疆, 赵欢

(新疆大学 数学与系统科学学院,乌鲁木齐 830046)

摘　要:设 $\Omega \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n) \times L^r(S^{n-1})(r \geq 1)$ 是零次齐次函数,且 $b \in \mathrm{Lip}_{\gamma}(\mathbf{R}^n)$. 利用 Herz-type Hardy 空间的原子分解理论,研究了带变量核的分数次积分算子,当核函数满足一定条件时,证明了这类算子 $T_{\Omega,\mu}$ 及其交换子 $[b^m, T_{\Omega,\mu}]$ 在变指数 Herz-type Hardy 空间上的有界性.

关键词:变量核;分数次积分算子;高阶交换子;变指数 Herz-type Hardy 空间

中图分类号:O174.2 **文献标志码**:A

设 $S^{n-1}(n \geq 2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面,$\mathrm{d}\sigma$ 是 S^{n-1} 上规范的 Lebesgue 测度,称定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上的核函数 $\Omega(x,z) \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n) \times L^r(S^{n-1})(r \geq 1)$,如果 $\Omega(x,z)$ 满足(i)对 $\forall x, z \in \mathbf{R}^n$ 以及 $\lambda > 0$,有 $\Omega(x,\lambda z) = \Omega(x,z)$;(ii) $\|\Omega\|_{L^{\infty}(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})} := \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x,z')|^r \mathrm{d}\sigma(z')\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$,其中 $z' = \frac{z}{|z|}$,$z \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

对于 $0 < \mu < n$,$\Omega(x,z) \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$,且$\int_{S^{n-1}} \Omega(x,z')\mathrm{d}\sigma(z') = 0$,$\forall x \in \mathbf{R}^n$. 带变量核的分数次积分算子定义为 $T_{\Omega,\mu}f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\mu}} f(y)\mathrm{d}y$.

1971 年,Muckenhoupt 等人[1]证明了 $T_{\Omega,\mu}$ 是从$L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 有界的.当 $\mu = 0$ 时,$T_{\Omega,\mu}$ 与一类具有变系数的二阶线性椭圆方程问题有密切联系,关于此类算子的研究首先见 Calderón 和 Zygmund[2] 的工作.随后,带变量核的分数次积分算子的研究受到了众多学者的关注.

自 1991 年 Kováčik 等人[3]研究了变指数 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间以来,变指数空间由于在流体动力学及具有非增长条件的微分方程等领域有着广泛的应用,近二十年来得到了飞速的发展.2006 年,Cruz-Uribe 等人[4]考虑了调和分析中许多经典算子在变指数 Lebesgue 空间上的有界性,其中包括奇异积分算子和分数次积分算子等.2010 年,Izuki[5]首先引入了变指数 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 的概念,其中 $p(\cdot)$ 是变指数,并研究了分数次积分算子在其上的有界性.2012 年,Wang 等人[6]定义了变指数 Herz-type Hardy 空间,并且给出了此类空间上的原子刻画.

算子的有界性和函数空间的刻画是调和分析的两个重要内容,交换子可以对函数空间进行刻画,因此研究交换子是非常有意义的.设 $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$,定义由 b 和 $T_{\Omega,\mu}$ 生成的高阶交换子为

$$[b^m, T_{\Omega,\mu}]f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}(b(x)-b(y))^m f(y)\mathrm{d}y, m \in \mathbf{N}.$$

2016 年,Abdalmonem 等人[7]证明了带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\mu}$ 及其交换子在变指数 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha,q(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性.2017 年,Wang[8]考虑了分数次积分算子的交换子在变指数 Herz-type Hardy 空间上的有界性.受以上文献的启发,本文的主要目的是证明带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\mu}$ 及其与 Lipschitz

收稿日期:2017-10-28;**修回日期**:2018-04-27.

基金项目:国家自然科学基金(11661075)

作者简介:周疆(1968－),男,四川安岳人,新疆大学教授,主要研究方向为调和分析,E-mail:zhoujiang@xju.edu.cn.

通信作者:赵欢(1994－),女,主要研究方向为调和分析,E-mail:zhaohuanmath1994@163.com.

函数生成的高阶交换子$[b^m,T_{\Omega,\mu}]$在变指数 Herz-type Hardy 空间上的有界性.

在本文中,C 总表示和主要参数无关的一个正常数且其取值在不同的位置可以是不同的. $B_k=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\le 2^k\}$,$A_k=B_k\backslash B_{k-1}$,$\chi_k=\chi_{A_k}$,$k\in\mathbf{Z}$,其中 χ_{A_k} 表示集合 A_k 的特征函数.用 $p'(\cdot)$ 表示 $p(\cdot)$ 的共轭指数,即$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$.$f\approx g$ 表示 $f\le Cg$ 且 $g\le Cf$.$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数,其中 $x\in\mathbf{R}$.

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测子集且 $|E|>0$. 首先介绍变指数 Lebesgue 空间的相关定义.

令 $p(\cdot):E\to[1,\infty)$ 是一可测函数.变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(E)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(E):=\left\{f\text{ 是可测函数:对于某个常数 }\eta>0,\text{有}\int_E\left(\frac{|f(x)|}{\eta}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

局部可积的变指数 Lebesgue 空间 $L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(E)$ 定义为

$$L_{\mathrm{loc}}{}^{p(\cdot)}(E):=\{f\text{ 是可测函数:对所有的紧子集 }K\subset E,f\in L^{p(\cdot)}(K)\}.$$

当赋予如下的范数时,$L^{p(\cdot)}(E)$ 是 Banach 空间,$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)}=\inf\left\{\eta>0:\int_E\left(\frac{|f(x)|}{\eta}\right)^{p(\cdot)}\mathrm{d}x\le 1\right\}$.

定义 $\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 是可测函数 $p(\cdot):\mathbf{R}^n\to[1,\infty)$ 的集合,使得 $p^-=\operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^n}p(x)>1$,$p^+=\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}p(x)<\infty$.

设 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子.用 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 中所有使 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 上有界的函数 $p(\cdot)$ 组成的集合.

下面介绍变指数 Herz 空间的定义.

定义 1[5] 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,$0<q<\infty$,且 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$.变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)$ 定义为

$$\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)}=\left\{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}^q\right\}^{1/q}$.

显然,$\dot{K}_{p(\cdot)}^{0,p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)=L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$.当 $p(\cdot)\equiv p$ 为常数时,即为经典 Herz 空间.

在此基础上给出变指数 Herz-type Hardy 空间的定义及其原子分解特征.用 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的 Schwartz 空间,它是由无穷可微且在无穷远处迅速递减的函数所构成的,$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的对偶空间.令 G_Nf 为 f 的 grand 极大函数,其定义为 $G_Nf(x)=\sup\limits_{\phi\in\mathscr{A}_N}|\phi_\nabla^*(f)(x)|$,其中 $\mathscr{A}_N=\{\phi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n):\sup\limits_{|\alpha|,|\beta|\le N}|x^\alpha D^\beta\phi(x)\le 1|\}$ 且 $N>n+1$,ϕ_∇^* 是非切向极大算子并且其定义为

$$\phi_\nabla^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|\phi_t*f(y)|,$$

这里 $\phi_t(x)=t^{-n}\phi(x/t)$,$\forall x\in\mathbf{R}^n$.

定义 2[6] 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,$0<q<\infty$,$p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$,且 $N>n+1$.变指数 Herz-type Hardy 空间 $H\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)$ 定义为 $H\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n):=\{f\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n):G_N(f)(x)\in\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)\}$,且 $\|f\|_{H\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)}:=\|G_N(f)\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbf{R}^n)}$.

2012 年,Wang 等人在文献[6]中给出了如下的定义.

定义 3 设 $n\delta_2\le\alpha<\infty$,$p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$,非负整数 $s\ge[\alpha-n\delta_2]$.

(i) $\mathbf{R}^n$ 上的函数 a 称为一个中心$(\alpha,p(\cdot))$- 原子,如果满足:(a)$\operatorname{supp}a\subset B(0,r)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<r\}$;(b)$\|a\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\le|B(0,r)|^{-\alpha/n}$;(c)$\int_{\mathbf{R}^n}a(x)x^\beta\mathrm{d}x=0$,$|\beta|\le s$.

(ii) $\mathbf{R}^n$ 上的函数 a 称为一个限制型中心$(\alpha,p(\cdot))$- 原子,若满足(b),(c)及(a)$'\operatorname{supp}a\subset B(0,r)$,$r\ge 1$.

若 $r=2^k$,$k\in\mathbf{Z}$,则中心$(\alpha,p(\cdot))$- 原子为二进制中心$(\alpha,p(\cdot))$- 原子.

2002 年,文献[9]定义了如下的 L^r-Dini 条件.

定义 4 设$\Omega(x,z)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})(r\ge 1)$为它的 r 阶积分连续模,称$\Omega(x)$满足L^r-Dini 条件,如果$\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta<\infty$,其中 $\omega_r(\delta)$ 是它的 r 阶积分连续模,其定义为 $\omega_r(\delta)=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n,|\rho|<\delta}(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,\rho z')-$

$\Omega(x,z')|^r d\sigma(z'))^{\frac{1}{r}}$,这里 ρ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的旋转,且 $|\rho| = \sup_{z'\in S^{n-1}} |\rho z' - z'|$.

定义 5　对 $0<\gamma\leq 1$, Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)$ 是满足下面条件的函数 b 所组成的空间

$$\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)} = \sup_{x,y\in\mathbf{R}^n, x\neq y} \frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty.$$

1　命题与引理

下面给出一些必要的命题与引理.

命题 1　设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{-C}{\lg(|x-y|)}, 若\ |x-y|\leq\frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{C}{\lg(e+|x|)}, 若\ |x|\leq|y|, \tag{2}$$

则 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$,即 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有界的.

上述结论分别被 Cruz-Uribe 等人在文献[10]以及 Nekvinda 在文献[11]中独立证得.

2012 年,Wang 和 Liu 在文献[6]中证得了如下的结论.

命题 2　设 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, $0<q<\infty$, $n\delta_2\leq\alpha<\infty$,则 $\mathbf{R}^n$ 上的分布 $f\in H\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 当且仅当存在支集为 B_k 的中心 $(\alpha,p(\cdot))$- 原子 a_k 和常数 λ_k, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^q<\infty$,使得 $f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$ 在分布意义下成立,并且 $\|f\|_{H\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \approx \inf\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^q\right)^{1/q}$,其中下确界取自 f 的所有中心原子分解.

命题 3[12]　设 $p_1(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, $\Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})$.若 $0<\mu\leq\frac{n}{(p_1)^+}$,且定义变指数 $p_2(\cdot)$ 为 $\frac{1}{p_1(x)}-\frac{1}{p_2(x)}=\frac{\mu}{n}$,则对任意的 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有 $\|T_{\Omega,\mu}f\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}$.

命题 4[7]　设 $p_1(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, $b\in\mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{R}^n)$, $0<\beta\leq1$, $\Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})$.若 $0<\mu+m\beta\leq\frac{n}{(p_1)^+}$,且定义变指数 $p_2(\cdot)$ 为 $\frac{1}{p_1(x)}-\frac{1}{p_2(x)}=\frac{\mu+m\beta}{n}$,则对任意的 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\|[b^m,T_{\Omega,\mu}]f\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{R}^n)}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}.$$

引理 1[3]　设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$,则对任意的 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$, $g\in L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$,有 $\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx\leq r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}$,其中 $r_p:=1+1/p^- - 1/p^+$. 上述不等式被称为广义 Hölder 不等式.

引理 2[4]　设 $0<\mu<n$, $\Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})(r>1)$ 满足 L^r-Dini 条件.若存在 $0<\alpha_0<1/2$,使得 $|y|<\alpha_0 R$,则

$$\left\{\int_{R<|x|<2R}\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(x,x)}{|x|^{n-\mu}}\right|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}\leq CR^{(\frac{n}{r}-n+\mu)}\left\{\frac{|y|}{R}+\int_{|y|/2R}^{|y|/R}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}d\delta\right\}.$$

引理 3[13]　设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$.若 $q\in(p^+,\infty)$,且定义 $\tilde{q}(\cdot)$ 为 $\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{q}+\frac{1}{\tilde{q}(x)}(x\in\mathbf{R}^n)$,则对任意的可测函数 f 和 g 有 $\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C\|f\|_{L^{\tilde{q}(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}$.

引理 4[5]　若 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$,则存在一个正常数 C,使得对所有 $\mathbf{R}^n$ 中的球 B,有

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C.$$

引理 5[14]　若 $p_1(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$,则存在正常数 δ_1,δ_2 和 C,使得对所有 $\mathbf{R}^n$ 中的球 B 和所有的可测子集 $S\subset B$,有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\leq C\frac{|B|}{|S|}, \frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1}, \frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}.$$

引理 6 设 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$,且 $0<p^-\le p^+<\infty$,对每个球 $B\subset\mathbf{R}^n$ 有 $\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B|^{1/p(x)}$,当 $|B|\le 2^n$,$x\in B$ 且 $\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B|^{1/p_\infty}$,当 $|B|\ge 1$.其中 $p_\infty=\lim\limits_{|x|\to\infty}p(x)$. 此引理参见文献[13]中的推论 4.5.9.

2 主要定理及其证明

本文的主要结果如下.

定理 1 设 $0<q_1\le q_2<\infty$,$n\delta_2\le\alpha<n\delta_2+\beta$,$\Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})(r>p_2^+)$ 且对于 $0<\beta\le 1$,积分连续模 $\omega_r(\delta)$ 满足 $\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+\beta}}\mathrm{d}\delta<\infty$.若 $0<\mu<n-\beta$,$p_1(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 满足(1)式和(2)式使得 $p_1^+<\frac{\mu}{n}$,且定义 $p_2(x)$ 为 $\frac{1}{p_1(x)}-\frac{1}{p_2(x)}=\frac{\mu}{n}$.则 $T_{\Omega,\mu}$ 从 $H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 到 $\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有界.

证明 假设 $f\in H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$,由命题 2 得,$f=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j$ 在分布意义下成立,其中 a_j 是支集为 B_j 的二进制中心 $(\alpha,p_1(\cdot))$- 原子,且 $\|f\|_{H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx\inf\Big(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big)^{1/q_1}$. 其中下确界取自 f 的所有中心原子分解.由 $0<q_1/q_2\le 1$,得

$$
\begin{aligned}
\|T_{\Omega,\mu}(f)\|^{q_1}_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}&=\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_2}\|T_{\Omega,\mu}(f)\chi_k\|^{q_2}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big\}^{q_1/q_2}\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\|T_{\Omega,\mu}(f)\chi_k\|^{q_1}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\le\\
&C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|\,\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big)^{q_1}+\\
&C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|\,\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big)^{q_1}=:I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

估计 I_1.对于 $k\in\mathbf{Z}$,$j\le k-2$ 及 $x\in A_k$,利用 Minkowski 不等式和 a_j 原子的消失性,可得

$$
\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\le\int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right|\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|a_j(y)|\,\mathrm{d}y.
$$

注意到 $r>p_2^+$,定义 $\tilde{p}_2(\cdot)>1$ 且 $\frac{1}{p_2(x)}=\frac{1}{\tilde{p}_2(x)}+\frac{1}{r}$, 根据引理 3,有

$$
\begin{aligned}
\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right|\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}&\le\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\|\chi_k\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\le\\
&\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

当 $|B_k|\le 2^n$,$x_k\in B_k$ 时,由引理 6,可得 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B_k|^{\frac{1}{\tilde{p}_2(x_k)}}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu}{n}}$.

当 $|B_k|\ge 1$ 时,得到 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B_k|^{\frac{1}{\tilde{p}_2(\infty)}}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu}{n}}$.

从而 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu}{n}}$.

另一方面,根据引理 2,有

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}&\le C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}\left\{\frac{|y|}{2^{k-1}}+\int_{|y|/2^k}^{|y|/2^{k-1}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\}\le\\
&C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}\left(2^{j-k}+2^{(j-k)\beta}\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+\beta}}\mathrm{d}\delta\right)\le C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}2^{(j-k)\beta}.
\end{aligned}\tag{3}
$$

利用广义 Hölder 不等式,引理 4 和引理 5,可得

$$
\begin{aligned}
\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}&\le C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}2^{(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu}{n}}\int_{B_j}|a_j(y)|\,\mathrm{d}y\le\\
&C2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\le
\end{aligned}
$$

$$C2^{(j-k)\beta}\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\frac{\|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\leq C2^{-j\alpha+(j-k)(\beta+n\delta_2)}.$$

通过以上的估计，有

$$I_1\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|2^{-j\alpha+(j-k)(\beta+n\delta_2)}\Big)^{q_1}=C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)}\Big)^{q_1}.$$

下面对 $0<q_1<\infty$ 分两种情况讨论.当 $0<q_1\leq 1$ 时，由 $\beta+n\delta_2-\alpha>0$，得

$$I_1\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{q_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)q_1}\Big)=C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)q_1}\Big)\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

当 $1<q_1<\infty$ 时，根据 Hölder 不等式，得到

$$I_1\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{q_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)q_1/2}\Big)\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)q'_1/2}\Big)^{q_1/q'_1}\leq$$

$$C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)q_1/2}\Big)\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

估计 I_2.利用 $T_{\Omega,\mu}$ 从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有界的，有

$$I_2\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}}\Big)^{q_1}\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|2^{(k-j)\alpha}\Big)^{q_1}.$$

下面对 $0<q_1<\infty$ 分两种情况讨论.当 $0<q_1\leq 1$ 时，得

$$I_2\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=-\infty}^{j+1}2^{(k-j)\alpha q_1}\Big)\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

当 $1<q_1<\infty$ 时，根据 Hölder 不等式，可得

$$I_2\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}2^{(k-j)\alpha q_1/2}\Big)\times\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}2^{(k-j)\alpha q'_1/2}\Big)^{q_1/q'_1}\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

综合 I_1,I_2 的估计，就完成了定理 1 的证明.

定理 2　设 $0<q_1\leq q_2<\infty, n\delta_2\leq\alpha<n\delta_2+\gamma$.令 $b\in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n), m\in\mathbf{N}, \Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times L^r(S^{n-1})(r>p_2^+), 1\leq r'<p_1^-$ 且对于 $0<\gamma\leq 1$，积分连续模 $\omega_r(\delta)$ 满足

$$\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+\gamma}}\mathrm{d}\delta<\infty.$$

若 $0<\mu<n-\gamma, p_1(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 满足(1)和(2)式使得 $p_1^+<\dfrac{n}{\mu+\gamma}$，且定义 $p_2(x)$ 为 $\dfrac{1}{p_1(x)}-\dfrac{1}{p_2(x)}=\dfrac{\mu+\gamma}{n}$.则$[b^m,T_{\Omega,\mu}]$ 从 $H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 到 $\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有界.

证明　类似于定理 1 的证明.假设 $f\in H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$，由命题 2 得，$f=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j$ 在分布意义下成立，其中 a_j 是支集为 B_j 的二进制中心$(\alpha,p_1(\cdot))$- 原子，且 $\|f\|_{H\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx\inf\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big)^{1/q_1}$.其中下确界取自 f 的所有中心原子分解.由 $0<q_1/q_2\leq 1$，有

$$\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](f)\|^{q_1}_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}=\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_2}\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](f)\chi_k\|^{q_2}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big\}^{q_1/q_2}\leq$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](f)\chi_k\|^{q_1}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big)^{q_1}+$$

$$C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\Big)^{q_1}=:J_1+J_2.$$

估计 J_1.对于 $k\in\mathbf{Z}, j\leq k-2$ 及 $x\in A_k$，利用 Minkowski 不等式和 a_j 原子的消失性，可得

$$\|[b^m,T_{\Omega,\mu}](a_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq\int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right|(b(\cdot)-b(y))^m\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|a_j(y)|\mathrm{d}y\leq$$

$$\int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right||b(\cdot)-b(0)|^m\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|a_j(y)|\mathrm{d}y+$$

$$\int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right|\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|b(0)-b(y)|^m|a_j(y)|\mathrm{d}y=:J_{11}+J_{12}.$$

先考虑 J_{11}.注意到 $r>p_2^+$,定义 $\tilde{p}_2(\cdot)>1$ 且 $\frac{1}{p_2(x)}=\frac{1}{\tilde{p}_2(x)}+\frac{1}{r}$,根据引理 3,有

$$\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right||b(\cdot)-b(0)|^m\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\||b(\cdot)-$$

$$b(0)|^m\chi_k\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{k\gamma}\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^{n-\mu}}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}.$$

当 $|B_k|\leq 2^n,x_k\in B_k$ 时,由引理 6,可得 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B_k|^{\frac{1}{\tilde{p}_2(x_k)}}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu+\gamma}{n}}$.
当 $|B_k|\geq 1$ 时,得到 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx|B_k|^{\frac{1}{\tilde{p}_2(\infty)}}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu+\gamma}{n}}$.
从而 $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{p}_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\approx\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu+\gamma}{n}}$.

另一方面,根据引理 2,类似于(3)式,有 $\left\|\frac{\Omega(\cdot,\cdot-y)}{|\cdot-y|^n}-\frac{\Omega(\cdot,\cdot)}{|\cdot|^n}\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\leq C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}2^{(j-k)\gamma}$.
由以上的估计和广义 Hölder 不等式,得

$$J_{11}\leq C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{-kn+(j-k)\gamma}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq$$

$$C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{(j-k)\gamma}\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\frac{\|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\leq C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{-j\alpha+(j-k)(\gamma+n\delta_2)}.$$

考虑 J_{12},类似于 J_{11} 的估计,可得

$$J_{12}\leq C2^{(k-1)(\frac{n}{r}-n+\mu)}2^{(j-k)\gamma}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{r}-\frac{\mu+\gamma}{n}}\int_{B_j}|b(0)-b(y)||a_j(y)|\mathrm{d}y\leq$$

$$C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{-kn+(j-k)\gamma}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\leq$$

$$C\|b\|^m_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}2^{-j\alpha+(j-k)(\gamma+n\delta_2)}.$$

由此可得

$$J_1\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|2^{-j\alpha+(j-k)(\gamma+n\delta_2)}\Big)^{q_1}=$$

$$C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)}\Big)^{q_1}.$$

下面对 $0<q_1<\infty$ 分两种情况讨论.当 $1<q_1<\infty$ 时,根据 Hölder 不等式,得到

$$J_1\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{q_1}2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)q_1/2}\Big)\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)q'_1/2}\Big)^{q_1/q'_1}\leq$$

$$C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)q_1/2}\Big)\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

当 $0<q_1\leq 1$ 时,由 $\gamma+n\delta_2-\alpha>0$,得

$$J_1\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)q_1}\Big)\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

估计 J_2.利用$[b^m,T_{\Omega,\mu}]$ 从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 有界的,有

$$J_2\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q_1}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|\|a_j\|_{L^{p_1(\cdot)}}\Big)^{q_1}\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|2^{(k-j)\alpha}\Big)^{q_1}.$$

下面对 $0<q_1<\infty$ 分两种情况讨论.当 $0<q_1\leq 1$ 时,得

$$J_2\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}\Big(\sum_{k=-\infty}^{j+1}2^{(k-j)\alpha q_1}\Big)\leq C\|b\|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{q_1}.$$

当 $1<q_1<\infty$ 时,根据 Hölder 不等式,可得

$$J_2 \leq C \| b \|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j|^{q_1} 2^{(k-j)\alpha q_1/2} \Big) \times \Big(\sum_{j=k-1}^{\infty} 2^{(k-j)\alpha q'_1/2} \Big)^{q_1/q'_1} \leq C \| b \|^{mq_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{q_1}.$$

综合 J_1，J_2 的估计，就完成了定理 2 的证明.

3　结束语

本文考虑带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\mu}$ 及其与 Lipschitz 函数生成的高阶交换子 $[b^m, T_{\Omega,\mu}]$ 在变指数 Herz-type Hardy 空间上的有界性，该结论将经典的分数次积分算子拓展为带变量核的分数次积分算子，使得理论分析更具有意义.

参　考　文　献

[1] Muckenhoupt B，Wheeden R.Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals[J].Trans Am Math Soc，1971，161：249-258.

[2] Calderón A，Zygmund A.On singular integral with variable kernels[J].Appl Anal，1978，7(3)：221-238.

[3] Kováčik O，Rákosník J.On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$[J].Czechoslovak Math J，1991，41(4)：592-618.

[4] Cruz-Uribe D，Fiorenza A，Martell J，et al.The boundedness of classical operators on variable L^p spaces[J].Ann Acad Sci Fenn Math，2006，31(1)：239-264.

[5] Izuki M.Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization[J].Anal Math，2010，36(1)：33-50.

[6] Wang H B，Liu Z G.The Herz-type Hardy spaces with variable exponent and their applications[J].T J Math，2012，16(4)：1363-1389.

[7] Abdalmonem A，Abdalrhman O，Tao S P.Boundedness of fractional integral with variable kernel and their commutators on variable exponent Herz spaces[J].Appl Math，2016，7(10)：1165-1182.

[8] Wang H B.Commutators of homogeneous fractional integrals on Herz-type Hardy spaces with variable exponent[J].J Contemporary Math Anal，2017，52(3)：134-143.

[9] 丁勇，陈杰诚，范大山.Hardy 空间上一类带可变核的积分算子[J].数学年刊 A 辑(中文版)，2002，23(3)：289-296.

[10] Cruz-Uribe D，Fiorenza A，Neugebauer C J.The Maximal Function on Variable L^p Spaces[J].Ann Acad Sci Fenn Math，2003，28(1)：223-238.

[11] Nekvinda A.Hardy-Littlewood Maximal Opeator on $L^{p(x)}(\mathbf{R}^n)$[J].Math Inequal Appl，2004，7(2)：255-265.

[12] Wu H，Lan J.The Boundedness for a Class of Rough Fractional Integral Operators on Variable Exponent Lebesgue Spaces[J].Anal in Theory and Appl，2012，28(3)：286-293.

[13] Diening L，Harjulehto P，Hästö P，et al.Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents[M].Berlin：Springer，2011.

[14] Karlovich A Y，Lerner A K.Commutators of Singular Integral on Generalized L^p Spaces with Variable Exponent[J].Publicacions Matematiques，2005，49(1)：111-125.

Boundedness of a class of fractional integral operators and commutators on variable exponent herz-Type hardy space

Zhou Jiang，Zhao Huan

(College of Mathematics and System Sciences，Xinjiang University，Urumqi 830046，China)

Abstract：Let $\Omega \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \times L^r(S^n-1)(r \geq 1)$ be a homogeneous function of degree zero and $b \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbf{R}^n)$. With the atomic decomposition of the Herz-Hardy space，the fractional integral with variable kernel are discussed.When some conditions are given about kernel function，we obtain some boundedness of the fractional intrgral operators $T_{\Omega,\mu}$ and its commutators $[b^m, T_{\Omega,\mu}]$ on variable exponent Herz-type Hardy Spaces.

Keywords：variable kernel；fractional integral operator；higher order commutator；variable exponent Herz-type Hardy space

[责任编校　陈留院]