

# 双时滞 Rossler 系统的分支分析与混沌控制

杨纪华<sup>1</sup>, 刘 媚<sup>1</sup>, 李艳秋<sup>2</sup>

(1. 宁夏师范学院 数学与计算机科学学院, 宁夏 固原 756000; 2. 南京工业大学 理学院, 南京 210009)

**摘 要:**从稳定性与混沌控制的角度,研究了双时滞 Rossler 系统,这些系统通常出现在发送和接收信号的有源传感问题中. 首先,从对系统的特征方程根的分布分析入手,研究时滞对系统平衡点稳定性、Hopf 分支及 Hopf-zero 分支存在性的影响;其次,通过选择合适的几何因子和时滞,混沌振荡转变为稳定的平衡点或稳定的周期轨;最后,数值模拟验证了理论结果.

**关键词:**双时滞;稳定性;Hopf 分支;Hopf-zero 分支;混沌控制

**中图分类号:**O174.13

**文献标志码:**A

多重时滞 Rossler 系统出现在信号发送和接收稍后时间的有源传感问题中. 有源传感系统通过发射信号和处理接收器的输出来探测环境. 在发送和接收之间常常存在延迟,这表现为一个脉冲形式. 通常时滞  $\tau$  在确定探测系统的特征方面起着关键作用,文献[1-3]研究了这些系统的使用. 文献[4]用数值模拟的方法给出了关于不同几何因子的分支结构,并应用 Galerkin 近似技术把时滞微分方程转化为一族常微分方程,较容易的计算出来条件 Lyapunov 指数.

本文研究了多重时滞的 Rossler 系统,主要研究该系统的稳定性、分支和混沌等现象,并通过选择合适的“几何因子”对混沌进行控制,关于混沌控制可参见文献[5-7]. 这些“几何因子”关系到发射器-目标系统的几何结构,如图 1 所示.

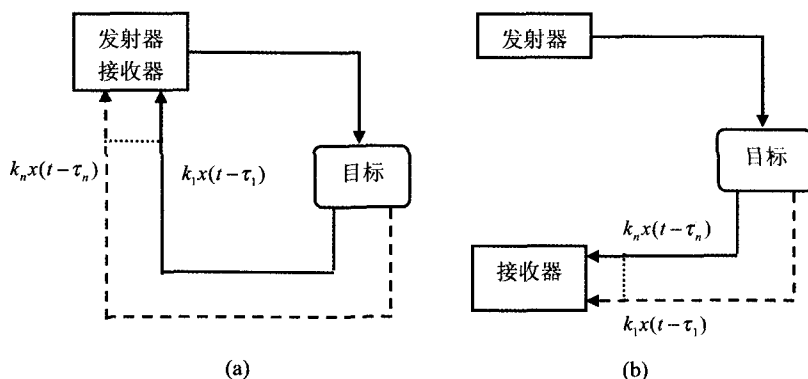


图1 含有不同时滞类型的有源传感系统简图

## 1 平衡点的稳定性与分支的存在性分析

$$\text{双时滞 Rossler 系统为} \begin{cases} \dot{x} = -y - z + k_1 x(t - \tau) + k_2 x(t - \sigma), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $a, b, c$  是参数,  $\tau, \sigma$  是时滞参数,  $k_1, k_2$  是几何因子. 系统(1)的平衡点为

$$S_1 \left( -ax_1, x_1, \frac{b}{ax_1 + c} \right), S_2 \left( -ax_2, x_2, \frac{b}{ax_2 + c} \right),$$

收稿日期:2014-05-15;修回日期:2014-11-23.

基金项目:国家自然科学基金(11361046;11301263);宁夏自然科学基金(NZ13213);宁夏高等学校科研项目(宁教高[2014]222号(16,17)).

作者简介:杨纪华(1983-),男,河南周口人,宁夏师范学院讲师,主要从事微分方程的稳定性与分支理论, E-mail: jihuall13@163.com.

其中  $A = 1 + a(k_1 + k_2)$ ,  $c^2 A^2 \geq 4abA$ ,  $x_1 = \frac{-cA + \sqrt{c^2 A^2 - 4abA}}{2aA}$ ,  $x_2 = \frac{-cA - \sqrt{c^2 A^2 - 4abA}}{2aA}$ . 设  $(x_0, y_0, z_0)$  是系统(1)的平衡点,则它在此平衡点处线性化方程对应的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 - k_1(\lambda^2 + a_2 \lambda + b_0)e^{-\lambda \tau} - k_2(\lambda^2 + a_2 \lambda + b_0)e^{-\lambda \sigma} = 0, \quad (2)$$

其中  $a_2 = c - x_0 - a$ ,  $a_1 = 1 + z_0 + ax_0 - ac$ ,  $a_0 = c - x_0 - az_0$ ,  $b_0 = a(x_0 - c)$ .

### 1.1 $\tau = 0, \sigma = 0$ 的情形

此时特征方程(2)变为

$$\lambda^3 + (a_2 - k_1 - k_2)\lambda^2 + (a_1 - k_1 a_2 - k_2 a_2)\lambda + a_0 - k_1 b_0 - k_2 b_0 = 0. \quad (3)$$

**引理 1** (i) 当  $a_0 = b_0(k_1 + k_2)$  时,  $\lambda = 0$  是方程(3)的根; 当  $a_0 = b_0(k_1 + k_2)$ ,  $a_1 > a_2(k_1 + k_2)$ , 且  $a_2 > k_1 + k_2$  时, 方程(3)有一个零根和两个具有负实部的根. 此时, 系统(1)经历了不动点分支;

(ii) 当  $a_0 > b_0(k_1 + k_2)$ ,  $a_2 > k_1 + k_2$ ,  $(a_1 - k_1 a_2 - k_2 a_2)(a_2 - k_1 - k_2) > a_0 - b_0(k_1 + k_2)$  时, 方程(3)的所有根具有负实部.

作如下假设: (H1)  $a_0 > b_0(k_1 + k_2)$ ,  $a_2 > k_1 + k_2$ ,  $(a_1 - k_1 a_2 - k_2 a_2)(a_2 - k_1 - k_2) > a_0 - b_0(k_1 + k_2)$ .

### 1.2 $\tau \neq 0, \sigma = 0$ 的情形

此时特征方程(2)变为

$$\lambda^3 + (a_2 - k_2)\lambda^2 + (a_1 - k_2 a_2)\lambda + a_0 - k_2 b_0 - k_1(\lambda^2 + a_2 \lambda + b_0)e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (4)$$

易知,  $\lambda = i\beta(\beta > 0)$  是方程(4)的根的充分必要条件是  $\beta$  满足

$$\begin{cases} k_1(\beta^2 - b_0)\cos(\beta\tau) - k_1 a_2 \beta \sin(\beta\tau) = (a_2 - k_2)\beta^2 - a_0 + k_2 b_0, \\ k_1(b_0 - \beta^2)\sin(\beta\tau) - k_1 a_2 \beta \cos(\beta\tau) = \beta^3 - (a_1 - k_2 a_2)\beta. \end{cases}$$

平方相加, 并令  $\xi = \beta^2$  可得

$$g(\xi) = \xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r = 0, \quad (5)$$

其中  $p = a_2^2 + k_2^2 - 2a_1 - k_1^2$ ,  $q = (a_1 - k_2 a_2)^2 + 2b_0 k_1^2 + 2(a_2 - k_2)(k_2 b_0 - a_0) - k_1^2 a_2^2$ ,  $r = a_0^2 + 2a_0 b_0$ .

**引理 2**<sup>[8]</sup> (i) 若  $r < 0$ , 则方程(5)至少一个正实根;

(ii) 若  $r \geq 0$  且  $p^2 \leq 3q$ , 则方程(5)没有正实根;

(iii) 若  $r \geq 0$  且  $p^2 > 3q$ , 则方程(5)有正实根的充要条件是  $z_* = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3} > 0$  且  $g'(z_*) \leq 0$ .

作如下假设: (H2)  $r \geq 0, p^2 \leq 3q$ ; (H3)  $r < 0$ ; (H4)  $r \geq 0, p^2 > 3q, z_* = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3} > 0$  且  $g'(z_*) \leq 0$ .

不失一般性, 假设方程(5)有3个正实根  $\xi_1, \xi_2$  和  $\xi_3$ . 于是(4)有3个正根  $\beta_k = \sqrt{\xi_k} (k = 1, 2, 3)$ . 根据三角函数的性质, 记

$$\tau_k^{(j)} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_k} [2j\pi + \arccos(P_1)], & Q_1 \geq 0, \\ \frac{1}{\beta_k} [2(j+1)\pi - \arccos(P_1)], & Q_1 < 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $P_1 = \cos(\beta_k \tau_k^{(j)}) = \frac{(\beta_k^2 - b_0)[(a_2 - k_2)\beta_k^2 - a_0 + k_2 b_0] - a_2 \beta_k^4 + a_2(a_1 - k_2 a_2)\beta_k^2}{k_1 a_2^2 \beta_k^2 + k_1(b_0 - \beta_k^2)^2}$ ,  $Q_1 = \sin(\beta_k \tau_k^{(j)}) = \frac{(b_0 - \beta_k^2)[\beta_k^2 - (a_1 - k_2 a_2)\beta_k] - a_2(a_2 - k_2)\beta_k^3 + a_2(a_0 - k_2 b_0)\beta_k}{k_1 a_2^2 \beta_k^2 + k_1(b_0 - \beta_k^2)^2}$ ,  $k = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, \dots$ .

定义  $\tau_0 = \tau_{k_0}^0 = \min_{k \in \{1, 2, 3\}} \{\tau_k^0\}$ ,  $\omega_0 = \omega_{k_0}$ . 应用引理 2 和文献[9]中的推论 2.4 可得如下引理 3.

**引理 3** 设(H1)成立, (i) 如果(H2)成立, 则当  $\tau \geq 0$  时, 方程(4)的根都具有负实部; (ii) 如果(H3)或者(H4)成立, 则当  $\tau = \tau_k^{(j)}$  时, 方程(4)有一对简单纯虚根  $\pm i\beta_k$ , 且当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 方程(4)的根都具有负实部, 其中  $\tau_k^{(j)}$  如(6)式定义.

由隐函数定理, 存在  $\epsilon_0 > 0$ , 使得当  $|\tau - \tau_k^{(j)}| < \epsilon_0$  时, 方程(4)有一对单根  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$ , 且满足

$$\alpha(\tau_k^{(j)}) = 0, \beta(\tau_k^{(j)}) = \beta_k.$$

**引理 4** 如果  $g'(\beta_k) \neq 0$ , 则  $\frac{d\text{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau} \neq 0$ , 并且  $\frac{d\text{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}$  与  $g'(\beta_k)$  的符号相同.

**证明** 把  $\lambda(\tau)$  代入方程(4), 并关于  $\tau$  求导可得  $\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\bigg|_{\lambda=i\beta_k, \tau=\tau_k^{(j)}}\right)^{-1} = \frac{\beta_k g'(\beta_k)}{\Omega}$ . 其中  $\Omega = k_1^2 [a_2^2 \beta_k^4 + (b_0 \beta_k - \beta_k^3)^2]$ . 因为  $\beta_k > 0, \Omega > 0$ , 所以  $\frac{d\text{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau} \neq 0$ , 且  $\frac{d\text{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}$  与  $g'(\beta_k)$  的符号相同. 引理 4 得证.

**定理 1** 假设(H1)成立, (i) 当  $\sigma = 0$  时, 如果(H2)成立, 则当  $\tau \geq 0$  时, 系统(1)的平衡点是局部渐近稳定的. (ii) 当  $\sigma = 0$  时, 如果(H3)或者(H4)成立, 则当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 系统(1)的平衡点是局部渐近稳定的. 而且如果  $g'(\beta_k) \neq 0$ , 当  $\tau = \tau_k^{(j)} (j = 0, 1, 2, \dots)$  时, 系统(1)经历了 Hopf 分支.

### 1.3 $\tau \neq 0, \sigma \neq 0$ 的情形

本小节中, 固定  $\tau$ , 以  $\sigma$  为参数, 且  $\tau$  取值于使得方程(4)的根都具有负实部的区间. 为了讨论方便, 记

$$F(\omega) = \omega^6 + (a_2^2 - 2a_1 - k_1^2 - k_2^2)\omega^4 + (a_1^2 + 2k_1^2 b_0 + 2k_2^2 b_0 - 2a_0 a_2 - k_1^2 a_2^2 - k_2^2 a_2^2)\omega^2 + a_0^2 - k_1^2 b_0^2 - k_2^2 b_0^2. \quad (7)$$

**引理 5** 假设  $F(\omega)$  的有限个正根为  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ . 则当  $\sigma = \sigma_k^{(j)}$  时, 特征方程(2)有一对纯虚根  $\pm i\sigma_k$ , 其中

$$\sigma_k^{(j)} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k} (2j\pi + \arccos P_2), & Q_2 \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_k} (2(j+1)\pi - \arccos P_2), & Q_2 < 0, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, s. \quad (8)$$

$$P_2 = \cos(\omega\sigma) = \frac{(b_0 - \omega^2)[k_1(\omega^2 - b_0)\cos(\omega\tau) - k_1 a_2 \omega \sin(\omega\tau) - a_2 \omega^2 + a_0]}{k_2 [a_2^2 \omega^2 + (b_0 - \omega^2)^2]} + \frac{k_1 a_2 (b_0 - \omega^2) \omega \sin(\omega\tau) - k_1 a_2^2 \omega^2 \cos(\omega\tau) - a_2 \omega^4 + a_1 a_2 \omega^2}{k_2 [a_2^2 \omega^2 + (b_0 - \omega^2)^2]},$$

$$Q_2 = \sin(\omega\sigma) = \frac{(\omega^2 - b_0)[k_1(b_0 - \omega^2)\sin(\omega\tau) - k_1 a_2 \omega \cos(\omega\tau) - \omega^3 + a_1 \omega]}{k_2 [a_2^2 \omega^2 + (b_0 - \omega^2)^2]} + \frac{k_1 a_2 (\omega^2 - b_0) \omega \cos(\omega\tau) - k_1 a_2^2 \omega^2 \sin(\omega\tau) - a_2^2 \omega^3 + a_0 a_2 \omega}{k_2 [a_2^2 \omega^2 + (b_0 - \omega^2)^2]}.$$

**证明** 设  $i\omega (\omega > 0)$  是方程(2)的根, 则可得

$$\begin{cases} k_1(\omega^2 - b_0)\cos(\omega\tau) - k_1 a_2 \omega \sin(\omega\tau) + k_2(\omega^2 - b_0)\cos(\omega\sigma) - k_2 a_2 \omega \sin(\omega\sigma) = a_2 \omega^2 - a_0, \\ k_1(b_0 - \omega^2)\sin(\omega\tau) - k_1 a_2 \omega \cos(\omega\tau) + k_2(b_0 - \omega^2)\sin(\omega\sigma) - k_2 a_2 \omega \cos(\omega\sigma) = \omega^3 - a_1 \omega. \end{cases} \quad (9)$$

把(9)式中两个方程平方相加可得  $\omega^6 + (a_2^2 - 2a_1 - k_1^2 - k_2^2)\omega^4 + (a_1^2 + 2k_1^2 b_0 + 2k_2^2 b_0 - 2a_0 a_2 - k_1^2 a_2^2 - k_2^2 a_2^2)\omega^2 + a_0^2 - k_1^2 b_0^2 - k_2^2 b_0^2 = 0$ .

由假设可得方程(7)的正根为  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ . 定义  $\sigma_k^{(j)}$  如(8)式. 则  $(\sigma_k^{(j)}, \omega_j)$  是(9)的根. 所以当  $\sigma = \sigma_k^{(j)}$  时, 方程(2)有一对纯虚根  $\pm i\sigma_k$ . 引理 5 得证.

定义  $\sigma_0 = \min\{\sigma_k^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, s\}$ , 并且记与之相对应的  $\omega_j$  为  $\omega_0$ . 假设  $\lambda(\sigma) = \alpha(\sigma) + i\omega(\sigma)$  是特征方程(2)在  $\sigma = \tau_k^{(j)}$  附近的根, 且满足  $\alpha(\sigma_0) = 0, \omega(\sigma_0) = \omega_0$ .

**引理 6** 如果  $\Delta \neq 0$ , 则  $\text{Re}\left(\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\lambda=i\omega_k, \sigma=\sigma_k^{(j)}}\right) \neq 0$ , 且  $\text{Re}\left(\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\lambda=i\omega_k, \sigma=\sigma_k^{(j)}}\right)$  与  $\Delta$  的符号相同. 其中

$$\begin{aligned} \Delta = & k_2 [a_2 \omega_k^2 \cos(\omega_k \sigma) - (\omega_k^2 + b_0 \omega_k) \sin(\omega_k \sigma)] [-3\omega_k^2 + a_1 + k_1 (a_2 \tau \omega_k - 2\omega_k) \sin(\omega_k \tau) + \\ & k_1 (b_0 \tau - a_2 - \tau \omega_k^2) \cos(\omega_k \tau) + k_2 (a_2 \sigma \omega_k - 2\omega_k) \sin(\omega_k \sigma) + k_2 (b_0 \sigma - a_2 - \sigma \omega_k^2) \cos(\omega_k \sigma)] - \\ & k_2 [(\omega_k^2 - b_0 \omega_k) \cos(\omega_k \sigma) - a_2 \omega_k^2 \sin(\omega_k \sigma)] [2a_2 \omega_k + k_1 (a_2 \tau \omega_k - 2\omega_k) \cos(\omega_k \tau) + k_1 (a_2 + \\ & \tau \omega_k^2 - b_0 \tau) \sin(\omega_k \tau) + k_2 (a_2 \sigma \omega_k - 2\omega_k) \cos(\omega_k \sigma) + k_2 (a_2 + \sigma \omega_k^2 - b_0 \sigma) \sin(\omega_k \sigma)], \\ M = & [-3\omega_k^2 + a_1 + k_1 (a_2 \tau \omega_k - 2\omega_k) \sin(\omega_k \tau) + k_1 (b_0 \tau - a_2 - \tau \omega_k^2) \cos(\omega_k \tau) + \\ & k_2 (a_2 \sigma \omega_k - 2\omega_k) \sin(\omega_k \sigma) + k_2 (b_0 \sigma - a_2 - \sigma \omega_k^2) \cos(\omega_k \sigma)]^2 + [2a_2 \omega_k + \\ & k_1 (a_2 \tau \omega_k - 2\omega_k) \cos(\omega_k \tau) + k_1 (a_2 + \tau \omega_k^2 - b_0 \tau) \sin(\omega_k \tau) + \end{aligned}$$

$$k_2(a_2\sigma\omega_k - 2\omega_k)\cos(\omega_k\sigma) + k_2(a_2 + \sigma\omega_k^2 - b_0\sigma)\sin(\omega_k\sigma)]^2.$$

证明 方程(2) 两端同时关于  $\sigma$  求导可得

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{-k_2\lambda(\lambda^2 + a_2\lambda + b_0)e^{-\lambda\sigma}}{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 + k_1[(\lambda^2 + a_2\lambda + b_0)\tau - (2\lambda + a_2)]e^{-\lambda\tau} + k_2[(\lambda^2 + a_2\lambda + b_0)\sigma - (2\lambda + a_2)]e^{-\lambda\sigma}}.$$

通过直接而繁琐的计算可得  $\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\lambda=i\omega_k, \sigma=\sigma_k^{(j)}}\right) = \frac{\Delta}{M}$ .

因为  $\Delta \neq 0, M > 0$ , 所以  $\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\lambda=i\omega_k, \sigma=\sigma_k^{(j)}}\right) \neq 0$ , 且  $\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\lambda=i\omega_k, \sigma=\sigma_k^{(j)}}\right)$  与  $\Delta$  的符号相同. 引理 6 得证.

由本文引理 2 至引理 6 和文献[10] 中第 11 章的定理 1.1, 可以得到下面关于系统(1) 的平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性定理.

**定理 2** 假设(H1) 成立, (i) 如果(H2) 成立且  $F(\omega)$  没有正根, 则当  $\sigma \geq 0$  时, 系统(1) 的零平衡点是局部渐近稳定的; 如果(H2) 成立且  $F(\omega)$  有正根, 则当  $\sigma \in [0, \sigma_0)$  时, 系统(1) 的零平衡点是局部渐近稳定的; 在后一种情况, 如果  $\Delta \neq 0$ , 则当  $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s, j = 0, 1, 2, \dots)$  时, 系统(1) 经历了 Hopf 分支. (ii) 如果(H3) 或者(H4) 成立,  $\tau \in [0, \tau_0)$ , 且  $F(\omega)$  没有正根, 则当  $\sigma \geq 0$  时, 系统(1) 的平衡点是局部渐近稳定的; 如果(H3) 或者(H4) 成立,  $\tau \in [0, \tau_0)$ , 且  $F(\omega)$  有正根, 则当  $\sigma \in [0, \sigma_0)$  时, 系统(1) 的平衡点是局部渐近稳定的; 在后一种情况, 如果  $\Delta \neq 0$ , 则当  $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s, j = 0, 1, 2, \dots)$ , 系统(1) 经历了 Hopf 分支.

综合上面的讨论可得如下定理.

**定理 3** 假设  $a_0 = b_0(k_1 + k_2), a_1 > b_1(k_1 + k_2), a_2 > k_1 + k_2$ , 且方程(7) 至少一个正实根  $\omega_k (k = 1, 2, \dots, s)$ , (i) 如果(H2) 成立, 且  $\Delta \neq 0$ , 则当  $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s, j = 0, 1, 2, \dots)$  时, 系统(1) 在零平衡点经历了 Hopf-zero 分支; (ii) 如果(H3) 或者(H4) 成立,  $\tau \in [0, \tau_0)$ , 且  $\Delta \neq 0$ , 则当  $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s, j = 0, 1, 2, \dots)$  时, 系统(1) 在零平衡点经历了 Hopf-zero 分支.

证明 因为  $a_0 = b_0(k_1 + k_2)$ , 所以 0 是方程(2) 的根. 由引理 5 可得,  $\pm i\sigma_k$  是方程(2) 的一对纯虚根. 再由定理 1 和定理 2 可得, 方程(2) 除了零根和纯虚根  $\pm i\sigma_k$  外, 其余根均具有负实部. 定理 3 得证.

## 2 数值模拟

取  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ , 当  $k_1 = k_2 = 0$  时, 系统(1) 是混沌的(具体见图 2). 为了控制混沌, 选取  $k_1 = -1, k_2 = -1$ . 此时系统(1) 的平衡点为  $S_1(0.011 7, -0.058 6, 0.035 2)$  和  $S_2(5.688 3, -28.441 4, 17.064 8)$ . 下面只对平衡点  $S_1$  进行数值模拟. 平衡点  $S_2$  可以类似的进行模拟.

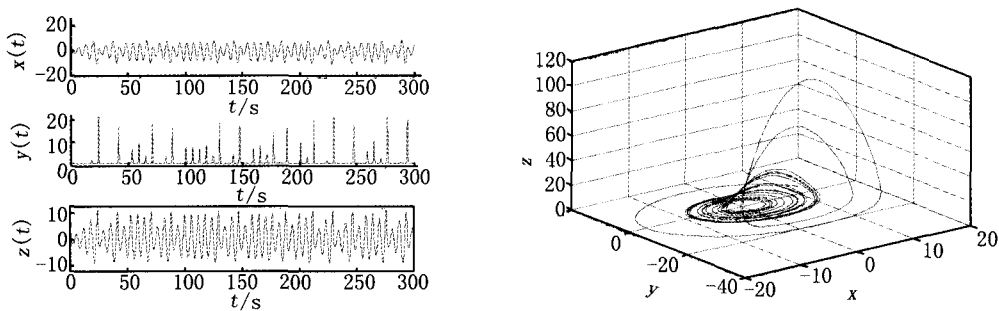


图2 当  $a=0.2, b=0.2, c=5.7$  时, 系统(1) 出现了混沌吸引子

通过计算知(H1) 和(H4) 满足,  $g(\xi)$  有一两个正根  $\xi_1 = 0.382 3$  和  $\xi_2 = 1.568$ , 所以  $\beta_1 = 0.618 3, \beta_2 = 1.252 2, g'(\beta_1) < 0, g'(\beta_2) > 0$ . 由(6) 式和引理 4 可得

$$\tau_1^{(j)} = 6.713 3 + 10.162 j, \frac{\operatorname{Re}\lambda(\tau_1^{(j)})}{d\tau} < 0, j = 0, 1, 2, \dots, \tag{10}$$

$$\tau_2^{(j)} = 2.116 5 + 5.017 7 j, \frac{\operatorname{Re}\lambda(\tau_2^{(j)})}{d\tau} > 0, j = 0, 1, 2, \dots. \tag{11}$$

所以计算可得  $\tau_2^{(0)} = 2.116 5 < \tau_1^{(0)} = 6.713 3 < \tau_2^{(1)} = 7.134 2 < \tau_1^{(1)} = 16.875 3 \dots$ .

因此,由(10)和(11)式可如下结论.

**结论 1** 假设  $\tau_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots$ ) 如(10)和(11)所定义,

(i) 当  $\tau \in [0, \tau_2^{(0)})$  时,系统(1)的平衡点  $S_1$  是局部渐近稳定的;

(ii) 当  $\tau \in (\tau_2^{(0)}, +\infty)$  时,系统(1)的平衡点  $S_1$  是不稳定的;

(iii) 当  $\tau = \tau_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,系统(1)在平衡点  $S_1$  经历了 Hopf 分支.

取  $\tau = 0.57$ . 计算可得  $F(\omega)$  有两个正实根  $\omega_1 = 0.497 2$  和  $\omega_2 = 1.928 4$ . 当  $\omega = \omega_1$  时,  $\Delta < 0$ ; 当  $\omega = \omega_2$  时,  $\Delta > 0$ . 由(8)式和引理 6 可得

$$\sigma_1^{(j)} = 9.103 2 + 12.637 1j, \frac{\text{Re}\lambda(\sigma_1^{(j)})}{d\sigma} < 0, j = 0, 1, 2, \dots; \tag{12}$$

$$\sigma_2^{(j)} = 0.598 8 + 3.258 2j, \frac{\text{Re}\lambda(\sigma_2^{(j)})}{d\sigma} > 0, j = 0, 1, 2, \dots. \tag{13}$$

所以计算可得  $\sigma_2^{(0)} = 0.598 8 < \sigma_1^{(0)} = 9.103 2 \dots$  因此,由(12)和(13)式可如下结论.

**结论 2** 假设  $\sigma_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots$ ) 如(10)和(11)所定义,

(i) 当  $\sigma \in [0, \sigma_2^{(0)})$  时,系统(1)的平衡点  $S_1$  是局部渐近稳定的(如图 3 所示);

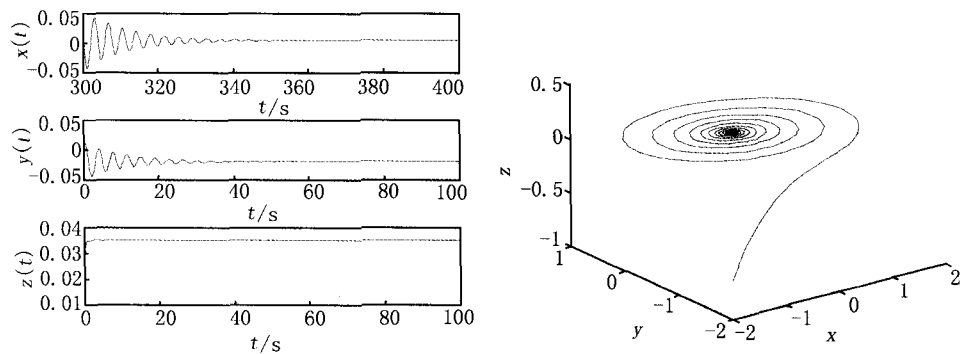


图3 当  $\tau=0.57, \sigma=0.352$  时, 系统(1)的平衡点  $S_1$  是局部渐近稳定的

(ii) 当  $\sigma \in (\sigma_2^{(0)}, +\infty)$  时,系统(1)的平衡点  $S_1$  是不稳定的(如图 4 所示);

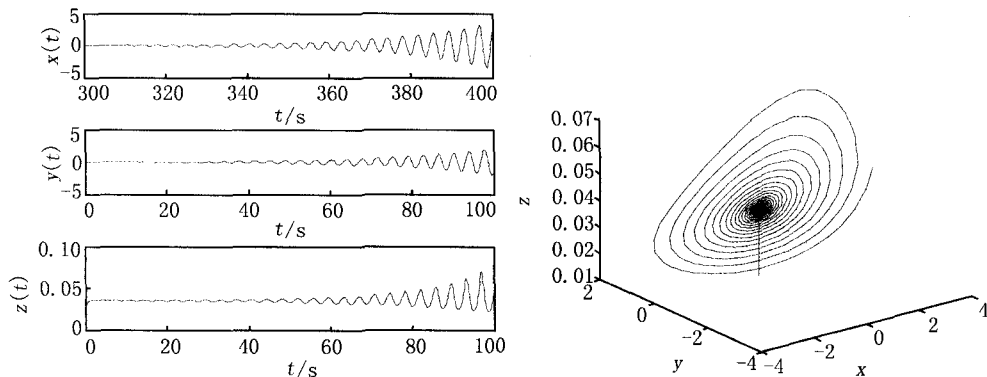


图4 当  $\tau=0.57, \sigma=1.3$  时, 系统(1)的平衡点  $S_1$  是不稳定的

(iii) 当  $\sigma = \sigma_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,系统(1)在平衡点  $S_1$  经历了 Hopf 分支(如图 5 所示).

### 3 结 论

本文的研究表明具多重时滞的 Rossler 系统模型具有某些特殊的特性. 此系统在有源传感问题的研究

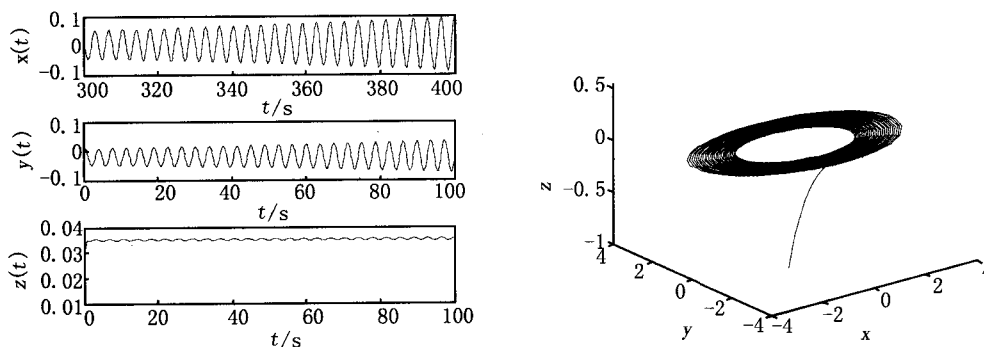


图5 当  $\tau=0.57$ ,  $\sigma=1.3$  时, 系统(1)在平衡点 $S$ 附近经历了Hopf分支

中起着非常重要的作用. 通过对系统线性化方程的特征方程根的分析入手, 得出了系统的线性稳定性区域, 当时滞经历一系列临界值时, 系统经历了 Hopf 分支和 Hopf-zero 分支. 对于系统中出现的混沌现象, 通过选择合适的几何因子和时滞, 混沌振荡转变为稳定的平衡点或稳定的周期轨.

### 参 考 文 献

- [1] Barrio R, Blesa F, Dena A. Qualitative and numerical analysis of the Rossler model: bifurcation of equilibria[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(11): 4140-4150.
- [2] Bauer A. Utilization of chaotic signals for radar and sonar purposes[J]. NORSIG, 1996, 96: 33-39.
- [3] Mossa M, Sawalha A, Noorani M S M. Application of the differential transformation method for the solution of the hyperchaotic Rössler system[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1509-1514.
- [4] Ghosh D, Chowdhury A, Saha P. Multiple delay Rossler systems-bifurcation and chaos control[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2008, 35: 472-485.
- [5] Yin Li, Zhao Yulin, Yao Zhengan. The scroll control and improving cascade synchronization system[J]. International Journal of Modern Physics B, 2014, 28: 1450058.
- [6] Yin Li, Zhao Yulin, Yao Zhengan. Chaotic control and generalized synchronization for a Hyperchaotic Lorenz-Stenflo system[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 515: 1-18.
- [7] 李 银, 吕显瑞, 赵 昕. 非线性 Lorenz-Like 系统的定性分析及控制[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2014, 52: 429-434.
- [8] Song Yongli, Wei Junjie. Bifurcation analysis for Chen's system with delayed feedback and its application to control of chaos[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 22: 75-91.
- [9] Ruan S, Wei J. On the zeros of transcendental functions to stability of delay differential equations with two delays[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst A Math Anal, 2003, 10: 863-874.
- [10] Hale J K, Lunel S V. Introduction to functional differential equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

## Bifurcation Analysis and Chaos Control of Rossler System with Two Time Delays

YANG Jihua<sup>1</sup>, LIU Mei<sup>1</sup>, LI Yanqiu<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan 765000, China;

2. Department of Science, Nanjing University of Technology, Nanjing 100029, China)

**Abstract:** From the view of stability and chaotic control, the Rossler system with two time delays is investigated. Usually these systems occur in active sensing problems where a signal is transmitted and received. Firstly, by analyzing the distribution of the roots of associated characteristic equation, we consider the effect of delay on the stability of equilibrium point and the existence of Hopf bifurcation and Hopf-zero bifurcation. Secondly, by designing appropriate geometric factors and delays, chaotic oscillation is converted into stable equilibrium or stable periodic orbits. Finally, some numerical simulation are carried out to support the analytic results.

**Keywords:** two time delays; stability; Hopf bifurcation; Hopf-zero bifurcation; chaos control