第 43 卷 第 3 期
2015 年 5 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)

Vol. 43 No. 3
May 2015

文章编号:1000－2367(2015)03－0011－05 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.03.003

构造新的辫子交叉范畴

董丽红[1], 袁玉卓[2]

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 南阳师范学院 数学与统计学院, 河南 南阳 473061)

摘 要:设 π 是一个群,首先引入弱 α-Yetter-Drinfeld 模的概念, 然后证明范畴 $\mathscr{WYD}(H)_\pi = \{{}_H\mathscr{WYD}_\alpha^H\}_{\alpha\in\pi}$ 构成一个辫子交叉范畴. 特别的, 如果 H 是一个有限型 π-三角弱 Hopf π-余代数, 则可得一个对称的辫子交叉子范畴 $\mathscr{WYD}(H)_\pi$. 其次, 如果 H 是一个有限型弱交叉 Hopf π-余代数, 则可得 $\mathscr{WYD}(H)_\pi$ 和拟三角弱 Hopf π-余代数 $D(H)$ 的表示范畴是同构的.

关键词:弱交叉 Hopf π-余代数;弱 Yetter-Drinfeld 模;辫子交叉范畴

中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A

在本文中, 假设 k 是一个域,π 是一个带有单位元 e 的群. 有关 Hopf 代数, 弱 Hopf 代数以及范畴方面的内容可参见文献[1－3]. 有关 Hopf 群余代数和弱 Hopf 群余代数方面的内容可分别参见文献[4－6].

为了推广 3-维流形的量子不变量到带有同伦类映射 $M \to K(\pi,1)$ 的 3-维流形上,著名的拓扑学专家 Turaev 引入了交叉 π-集上的张量 Freyd-Yetter 范畴[7],也即辫子交叉范畴. 这类范畴可以产生带有目标空间的 3-维同伦量子域理论并在构造同伦不变量中有重要的作用. 有关辫子交叉范畴的应用可参见文献[8－9]. 值得关注的是, 辫子交叉范畴可以由 Hopf 群余代数的表示范畴得到, 相关研究成果见文献[10－12]. 弱 Hopf 群余代数[6]是 Hopf 群余代数的一种弱化, 它是由 Van Daele A 和王栓宏引入的. 同时在文献[6]中, 作者把很多弱 Hopf 代数中的性质和结论推广到了弱 Hopf 群余代数上. 在文献[13]中, 王栓宏从 Hopf 群代数出发构造了一个带有特殊辫子张量子范畴的辫子交叉范畴. 本文主要从弱 Hopf 群余代数出发来构造一个新的辫子交叉范畴.

1 预备知识

定义 1[5] 在 π 上的交叉范畴 C 是由下面的数据组成的:

(1) C 是一个张量范畴; (2) C 是一簇子范畴 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 的非交并, 且对任意的 $U \in C_\alpha$ 和 $V \in C_\beta$, $U \otimes V \in C_{\alpha\beta}$. 子范畴 C_α 称为 C 的第 α 个分支; (3) 令 $aut(C)$ 为从 C 到其自身的可逆严格张量函子构成的群. 考虑群同态 $\varphi:\pi \to aut(C)$, $\beta \mapsto \varphi_\beta$, 假设对所有 $\alpha,\beta \in \pi$, $\varphi_\beta(C_\alpha) = C_{\beta\alpha\beta^{-1}}$, 则函子 φ_β 称为共轭同构.

交叉范畴 C 的一个辫子是一簇同构 $\{c = c_{U,V}\}_{U,V\in C}$, 其中 $c_{U,V}: U \otimes V \to {}^U V \otimes U$ 满足下列条件:

(1) 对任意的箭 $f \in C_\alpha(U,U')$ 和 $g \in C(V,V')$, $(\alpha_g \otimes f)c_{U,V} = c'_{U,V'}(f \otimes g)$;

(2) 对任意的 $U, V, W \in C$, 有 $c_{U\otimes V,W} = a_{U\otimes V_{W,U,V}}(c_{U,{}^V W} \otimes id_V)\, a^{-1}_{U,{}^V W,V}(id_U \otimes c_{V,W})$, $c_{U,V} \otimes id_W = a^{-1}_{U\otimes V_{W,U,V}}(id_{U_V} \otimes c_{U,W})\, a_{U_{V,U,W}}$, $(c_{U,V} \otimes id_W)\, a^{-1}_{U,V,W}$, 其中 a 是范畴 C 中的自然同构;

(3) 对任意的 $U, V \in C$ 和 $\beta \in \pi$, $\varphi_\beta(c_{U,V}) = c_{\varphi_\beta(U),\varphi_\beta(V)}$.

带有辫子的交叉范畴称为辫子交叉范畴.

收稿日期:2014-07-05;**修回日期**:2015-03-10.

基金项目:国家自然科学基金天元基金(11426095);河南省基础与前沿技术研究计划(072300410050;142300410385);河南省教育厅科学技术研究重点项目(14B110003);博士科研启动项目(qd14151).

作者简介(通信作者):董丽红(1980—),女,河南安阳人,河南师范大学讲师,主要从事 Hopf 代数方面的研究,E-mail:dlh0373@163.com.

定义 2[6] 一个拟三角弱 Hopf π- 余代数是一个对(H, R),其中 $H=(\{H_\alpha, \Delta, \varepsilon, S, \varphi\})$ 是一个弱交叉 Hopf π- 余代数[6],且带有一簇映射 $R=\{R_{\alpha,\beta}\in \overline{\Delta}^{cop}_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}(1_{\alpha\beta})(id_{H_\alpha}\otimes_k id_{H_\beta})\Delta_{\alpha,\beta}(1_{\alpha\beta})\}$(称为 R- 矩阵),满足下面的条件成立:

(QT1) $(id_{H_\alpha}\otimes \Delta_{\beta,\gamma})(R_{\alpha,\beta\gamma})=(R_{\alpha,\gamma})_{1\beta 3}(R_{\alpha,\beta})_{12\gamma}$,

(QT2) $(\overline{\Delta}_{\alpha,\beta}\otimes id_{H_\gamma})(R_{\beta^{-1}\alpha^{-1},\gamma})=(R_{\alpha^{-1},\gamma})_{1\beta^{-1}3}(R_{\beta^{-1},\gamma})_{\alpha^{-1}23}$,

(QT3) $R_{\alpha,\beta}\Delta_{\alpha,\beta}(h)=\overline{\Delta}^{cop}_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}(h)R_{\alpha,\beta}$,

(QT4) $(\varphi_\beta\otimes\varphi_\beta)(R_{\alpha,\gamma})=R_{\beta\alpha\beta^{-1},\beta\gamma\beta^{-1}}$,

对于任意的 $h\in H_{\alpha\beta}, \alpha,\beta,\gamma\in\pi$,且 R 存在一个正则逆,即存在一簇映射 $\bar{R}=\{\bar{R}_{\alpha,\beta}\in \Delta_{\alpha,\beta}(1_{\alpha\beta})(H_\alpha\otimes_k H_\beta)\overline{\Delta}^{cop}_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}(1_{\alpha\beta})\}$ 满足

$$R_{\alpha,\beta}\bar{R}_{\alpha,\beta}=\overline{\Delta}^{cop}_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}(1_{\alpha\beta}), \bar{R}_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta}=\Delta_{\alpha,\beta}(1_{\alpha\beta}),$$

对于任意的$\alpha,\beta\in\pi$.

注记 (1) 注意到$(H_e, R_{e,e})$是通常的拟三角弱 Hopf 代数. 称拟三角弱 Hopf π- 余代数(H, R)是 π- 三角的,如果 $R^{-1}_{\alpha,\beta}=R^{(2)}_\alpha\otimes\varphi_{\beta^{-1}}(R^{(1)}_\beta)$;

(2) 作为上述定义的一个直接结果,可得

$$\varepsilon(R^{(1)}_e)R^{(2)}_\beta=1_\beta, R^{(1)}_\alpha(R^{(2)}_e)=1_\alpha,$$

$$R^{-1}_{\alpha,\beta}=R^{(1)}_\alpha\otimes S^{-1}_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}})=S_{\alpha^{-1}}\varphi_\alpha(R^{(1)}_{\alpha^{-1}})\otimes R^{(2)}_\beta.$$

定义 3[10] 设 $C=\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是一个 π- 余代数[5],V 是一个 k- 向量空间. 一个右 π-C- 余模像对象是一个对 $V=(V, \rho^V=\{\rho^V_\lambda\}_{\lambda\in\pi})$,其中,对于任意的 $\lambda\in\pi$, $\rho^V_\lambda: V\to V\otimes C_\lambda$ 是一个 k- 线性映射,这个线性映射被称为是一个余模像结构,记为 $\rho^V_\lambda(v)=v_{(0,0)}\otimes v_{(1,\lambda)}$,满足:(1) V 是余结合的,即对于任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in\pi$,有 $(\rho^V_{\lambda_1}\otimes id_{C_{\lambda_2}})\rho^V_{\lambda_2}=(id_V\otimes\Delta_{\lambda_1,\lambda_2})\rho^V_{\lambda_1\lambda_2}$;(2) V 是余单位的,即$(id_V\otimes\varepsilon)\rho^V_e=id_V$.

定义 4 设 H 是一个弱交叉 Hopf π- 余代数[6],任取 $\alpha\in\pi$. 一个弱左- 右 α-H-Yetter-Drinfeld 模是一个右 π-H- 余模像对象 $M=(M, \rho^M=\{\rho^M_\lambda\}_{\lambda\in\pi})$,其中 M 是一个左 H_α- 模,满足相容条件

$$\rho^M_\lambda(h\cdot m)=h_{(2,\alpha)}\cdot m_{(0,0)}\otimes h_{(3,\lambda)}m_{(1,\lambda)}S^{-1}_\lambda\varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\lambda^{-1}\alpha^{-1})}), \tag{1}$$

对于任意的 $\lambda\in\pi, m\in M, h\in H_\alpha$.

接下来,可以构造弱左 - 右α-H-Yetter-Drinfeld模范畴${}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha$,其中$\alpha$-$H$-Yetter-Drinfeld模同态的复合是相应的线性映射的复合. 进一步,定义 $\mathcal{WYD}(H)_\pi=\Pi_{\alpha\in\pi}{}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha$,即范畴${}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha$ 的无交并,对于任意的 $\alpha\in\pi$.

例 1 (1) 如果 π 是一个平凡群,那么一个弱左- 右 e-Yetter-Drinfeld 模就是通常的弱左 - 右 Yetter-Drinfeld 模.

(2) 设 H 是一个弱交叉 Hopf π- 余代数. 固定 $\alpha\in\pi$,考虑 H_α,定义

$$\rho^{H_\alpha}_\lambda(h)=h_{(2,\alpha)}\otimes h_{(3,\lambda)}S^{-1}_\lambda\varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\lambda^{-1}\alpha^{-1})}),$$

对于任意的 $h\in H_\alpha, \lambda\in\pi$. 直接验证可知$(H_\alpha, \rho^{H_\alpha}_\lambda)_{\lambda\in\pi}$ 是一个右π-H- 余模像对象. 进一步,考虑在 H_α 上的左 H_α- 模结构,其左模结构是用其自身的乘法定义的,得$(H_\alpha, \mu_\alpha, \rho_\lambda)$ 是一个弱左- 右 α-Yetter-Drinfeld 模.

引理 1 对于任意的 $m\in M$, $h\in H_{\alpha\lambda}$,等式(1)与下面的等式等价:

$$\rho^M_\lambda(m)=m_{(0,0)}\otimes m_{(1,\lambda)}\triangleq(1_{(1,\alpha)}\otimes 1_{(2,\beta)})\cdot(M\otimes H), \tag{2}$$

$$h_{(1,\alpha)}\cdot m_{(0,0)}\otimes h_{(2,\lambda)}m_{(1,\lambda)}=(h_{(2,\alpha)}\cdot m)_{(0,0)}\otimes(h_{(2,\alpha)}\cdot m)_{(1,\lambda)}\varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\lambda\alpha^{-1})}). \tag{3}$$

证明 直接证明即得该结论.

2 弱 Hopf 群余代数上的辫子交叉范畴 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$

设 H 是任意一个弱交叉 Hopf π- 余代数,带有双射对极. 在这一节中,首先证明 H 上的范畴 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 是一个辫子交叉范畴. 然后通过一个有限型 π- 三角弱 Hopf π- 余代数,得到一个特殊的对称子范畴.

设 $M \in {}_H\mathcal{WYD}_\alpha^H$，$N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H$. 定义 $M \bar{\otimes} N = (1_{(1,\alpha)} \otimes 1_{(2,\beta)}) \cdot (M \otimes N)$.

命题 1　如果 $M \in {}_H\mathcal{WYD}_\alpha^H, N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H$，那么 $M \bar{\otimes} N \in {}_H\mathcal{WYD}_{\alpha\beta}^H$，其 Yetter-Drinfeld 模结构为：

$$h \cdot (m \otimes n) = h_{(1,\alpha)} \cdot m \otimes h_{(2,\beta)} \cdot n, \rho_\lambda(m \otimes n) = (m_{(0,0)} \otimes n_{(0,0)}) \otimes n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}),$$

对于任意的 $\alpha, \beta, \lambda \in \pi$，$h \in H_{\alpha\beta}$，$m \in M, n \in N$.

证明　易证 $M \bar{\otimes} N$ 是一个左 $H_{\alpha\beta^{-1}}$ 模和 π-H- 余模像对象. 而且可以证明下式成立

$$\begin{gathered}
1_{(1,\alpha\beta)} \cdot (m_{(0,0)} \otimes n_{(0,0)}) \otimes 1_{(2,\lambda)} n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) = 1'_{(1,\alpha)} \cdot \\
m_{(0,0)} \otimes 1_{(1,\beta)} 1'_{(2,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes 1_{(2,\lambda)} n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) = \\
1_{(1,\alpha)} \cdot m_{(0,0)} \otimes 1_{(2,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) = \\
m_{(0,0)} \otimes n_{(0,0)} \otimes n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}).
\end{gathered}$$

最后验证相容条件成立.

$$\begin{gathered}
(h \cdot (m \otimes n))_{(0,0)} \otimes (h \cdot (m \otimes n))_{(1,\lambda)} = (h_{(1,\alpha)} \cdot m \otimes h_{(2,\beta)} \cdot n)_{(0,0)} \otimes (h_{(1,\alpha)} \cdot m \otimes h_{(2,\beta)} \cdot n)_{(1,\lambda)} = \\
(h_{(1,\alpha)} \cdot m)_{(0,0)} \otimes (h_{(2,\beta)} \cdot n)_{(0,0)} \otimes (h_{(2,\beta)} \cdot n)_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}((h_{(1,\alpha)} \cdot m)_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) = \\
h_{(2,\alpha)} \cdot m_{(0,0)} \otimes h_{(5,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes h_{(6,\lambda)} n_{(1,\lambda)} \underline{S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}}(h_{(4,\beta\lambda^{-1}\beta^{-1})})} \times \\
\underline{\varphi_{\beta^{-1}}(h_{(3,\beta\lambda\beta^{-1})}} m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})} S_{\beta\lambda\beta^{-1}}^{-1} \varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})})) = \\
h_{(2,\alpha)} \cdot m_{(0,0)} \otimes h_{(4,\beta)} \otimes n_{(0,0)} \otimes h_{(5,\lambda)} n_{(1,\lambda)} S_\lambda^{-1} \underline{\varepsilon_{\lambda^{-1}}^{s} \varphi_{\beta^{-1}}}(h_{(3,e)}) \times \\
\varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}) = h_{(2,\alpha)} \cdot \\
m_{(0,0)} \otimes \underline{h_{(4,\beta)}} \cdot n_{(0,0)} \otimes h_{(5,\lambda)} n_{(1,\lambda)} S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}} \underline{\varepsilon_{\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}}^{s}(h_{(3,e)})} \times \\
\varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}) = h_{(2,\alpha)} \cdot m_{(0,0)} \otimes \\
h_{(3,\beta)} \cdot (1_{2,\beta} \cdot n_{(0,0)}) \otimes h_{(4,\lambda)} 1_{(3,\lambda)} n_{(1,\lambda)} S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}}(1_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) \times \\
\varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}) = h_{(2,\alpha)} \cdot m_{(0,0)} \otimes \\
h_{(3,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes h_{(4,\lambda)} n_{(1,\lambda)} \varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}) S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}) = \\
h_{(2,\alpha\beta)} \cdot (m \otimes n)_{(0,0)} \otimes h_{(2,\lambda)} (m \otimes n)_{(1,\lambda)} S_\lambda^{-1} \varphi_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}),
\end{gathered}$$

因此可得 $M \bar{\otimes} N \in {}_H\mathcal{WYD}_{\alpha\beta}^H$.

下面命题的证明是直接的.

命题 2　设 $N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H$，任取 $\alpha \in \pi$，作为向量空间，${}^{\alpha}N = N$，其模和余模分别如下定义：

$$h \rhd n = {}^{\alpha}(\varphi_{\alpha^{-1}}(h) \cdot n), \rho_\lambda^{\alpha N}(n) =: n_{<0,0>} \otimes n_{<1,\lambda>} = {}^{\alpha}(n_{(0,0)}) \otimes \varphi_\alpha(n_{(1,\alpha^{-1}\lambda\alpha)}),$$

那么 ${}^{\alpha}N \in {}_H\mathcal{WYD}_{\alpha\beta\alpha^{-1}}^H$.

设 $M \in {}_H\mathcal{WYD}_\alpha^H$，$N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H, \gamma \in \pi$. 那么由上述命题可得 ${}^{\alpha\gamma}N = {}^{\alpha}({}^{\gamma}N)$ 是范畴 ${}_H\mathcal{WYD}_{\alpha\gamma\beta\gamma^{-1}\alpha^{-1}}^H$ 中的一个对象，而且 ${}^{\gamma}(M \otimes N) = {}^{\gamma}M \otimes {}^{\gamma}N$ 也是范畴 ${}_H\mathcal{WYD}_{\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}}^H$ 中的对象.

命题 3　设 $M \in {}_H\mathcal{WYD}_\alpha^H, N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H$. 作为范畴 ${}_H\mathcal{WYD}_{\alpha\beta\alpha^{-1}}^H$ 中的对象，定义 ${}^{M}N = {}^{\alpha}N$. 定义映射.

$$c_{M,N} : M \otimes N \to {}^{M}N \otimes M, c_{M,N}(m \otimes n) = n_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta(n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)}) \cdot m,$$

那么 $c_{M,N}$ 既是 $H_{\alpha\beta}$- 线性的，又是 π-H- 余线性的，并且满足条件（对于任意的 $P \in {}_H\mathcal{WYD}_\gamma^H$）

$$c_{M \otimes N, P} = (c_{M, {}^{N}P} \otimes id_N)(id_M \otimes c_{N,P}),$$

$$c_{M, N \otimes P} = (id_{M_N} \otimes c_{M,P})(c_{M,N} \otimes id_P).$$

进一步，如果 $M \in {}_H\mathcal{WYD}_\alpha^H$，$N \in {}_H\mathcal{WYD}_\beta^H$，那么 $c_{{}^{\gamma}M, {}^{\gamma}N} = c_{M,N}, \gamma \in \pi$.

证明　首先证明 $c_{M,N}$ 是良定义的.

$$\begin{gathered}
c_{M,N}(1_{(1,\alpha)} \cdot m \otimes 1_{(2,\beta)} \cdot n) = (1_{(2,\beta)} \cdot n)_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta((1_{(2,\beta)} \cdot n)_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)}) \cdot (1_{(1,\alpha)} \cdot m) = \\
1_{(3,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta(1_{(4,\beta^{-1}\alpha\beta)} n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)} \underline{S_{\beta^{-1}\alpha\beta}^{-1} \varphi_{\beta^{-1}}}(1_{(2,\alpha^{-1})})) \cdot (1_{(1,\alpha)} \cdot m) = \\
1_{(3,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta(1_{(4,\beta^{-1}\alpha\beta)} n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)} \varphi_{\beta^{-1}} S_\alpha^{-1}(1_{(2,\alpha^{-1})})) \cdot (1_{(1,\alpha)} \cdot m) = \\
1_{(3,\beta)} \cdot n_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta(1_{(4,\beta^{-1}\alpha\beta)} n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)} \varphi_{\beta^{-1}}(S_\alpha^{-1}(1_{(2,\alpha^{-1})}) 1_{(1,\alpha)})) \cdot m = \\
\underline{1_{(2,\beta)}} \cdot n_{(0,0)} \otimes \varphi_\beta(1_{(3,\beta^{-1}\alpha\beta)} n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)} \varphi_{\beta^{-1}} S_\alpha^{-1} \underline{\varepsilon_{\alpha^{-1}}^{s}(1_{(1,e)})}) \cdot m =
\end{gathered}$$

$$1_{(1,\beta)}1'_{(2,\beta)}\cdot n_{(0,0)}\otimes\varphi_\beta(1_{(2,\beta^{-1}\alpha\beta)}1'_{(3,\beta^{-1}\alpha\beta)}n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)}S^{-1}_{\beta^{-1}\alpha\beta}\varphi_{\beta^{-1}}(1'_{(1,\alpha^{-1})}))\cdot$$
$$m=n_{(0,0)}\otimes\varphi_\beta(n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)})\cdot m.$$

通过计算可以证明 $c_{M,N}$ 是 $H_{\alpha\beta}$- 线性和 π-H- 余线性的. 故该命题得证.

对于任意带有双射对极的弱交叉 Hopf π- 余代数 H，可构造一个辫子 T- 范畴 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$.

如果在范畴 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 上如命题1中定义张量积$\bar{\otimes}$,那么由文献[6]可得 H_e^t 是 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 的张量单位对象. 群同态 $\varphi:\pi\to aut(\mathcal{WYD}(H)_\pi),\alpha\mapsto\varphi(\alpha)=\varphi_\alpha$ 在其分支上如下定义:$\varphi_\alpha:{}_H\mathcal{WYD}_\beta^H\to{}_H\mathcal{WYD}^H_{\alpha\beta\alpha^{-1}},N\mapsto{}^\alpha N$, 函子 φ_α 在态射上的作用是恒等映射. $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 中的辫子由上述的一簇映射 $c_{M,N}$(见命题 3) 给出. 因此，得到.

定理 1 如上述定义，那么 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 是一个辫子交叉范畴.

证明 由命题 1，2 和 3，只需证明命题 3 中定义的映射 $c_{M,N}$ 是双射即可.

对于任意的 $m\in M\in{}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha,n\in{}^MN\in{}_H\mathcal{YD}^H_{\alpha\beta\alpha^{-1}}$,定义 $c^{-1}_{M,N}:{}^MN\otimes M\to M\otimes N$ 为

$c^{-1}_{M,N}(n\otimes m)=S_{\alpha^{-1}}\varphi_\beta(n_{(1,\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta)})\cdot m\otimes n_{(0,0)}$.

首先计算

$$\rho_\lambda(\varepsilon^s_{\alpha\varphi\beta}(n_{(1,e)})\cdot m\otimes n_{(0,0)})=(\varepsilon^s_{\alpha\varphi\beta}(n_{(1,e)})\cdot m)_{(0,0)}\otimes n_{(0,0)(0,0)}\otimes n_{(0,0)(1,\lambda)}\varphi_{\beta^{-1}}((\varepsilon^s_{\alpha\varphi\beta}(n_{(1,e)})\cdot m)_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})})=$$
$$1_{(2,\alpha)}\cdot m_{(0,0)}\otimes n_{(0,0)}\otimes n_{(1,\lambda)}\varphi_{\beta^{-1}}(\varepsilon^s_{\beta\lambda\beta^{-1}}\varphi_\beta(n_{(2,e)})\cdot 1_{(3,\beta\lambda\beta^{-1})}m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})}S^{-1}_{\beta\lambda\beta^{-1}}\varphi_{\beta^{-1}}(1_{(1,\alpha\beta\lambda^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})}))=$$
$$m_{(0,0)}\otimes n_{(0,0)}\otimes n_{(1,\lambda)}\varepsilon^s_\lambda(n_{(2,1)})\varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})})=$$
$$m_{(0,0)}\otimes n_{(0,0)}\otimes n_{(1,\lambda)}\varphi_{\beta^{-1}}(m_{(1,\beta\lambda\beta^{-1})})=\rho_\lambda(m\otimes n),$$

因此可得 $\rho_\lambda(\lambda^s_\alpha\varphi_\beta(n_{(1,e)})\cdot m\otimes n_{(0,0)})=\rho_\lambda(m\otimes n)$. 设 $\lambda=e$，然后用 $id\otimes\varepsilon$ 作用在上述等式两边，可得 $\varepsilon^s_{\alpha\varphi\beta}(n_{(1,e)})\cdot m\otimes n_{(0,0)}=m\otimes n$. 接下来证明

$$c^{-1}_{M,N}c_{M,N}(m\otimes n)=c^{-1}_{M,N}(n_{(0,0)}\otimes\varphi_\beta(n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)})\cdot m)=$$
$$S_{\alpha^{-1}}{}_{\varphi_\beta}(n_{(1,\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta)})\varphi_\beta(n_{(2,\beta^{-1}\alpha\beta)})m\otimes n_{(0,0)}=\varepsilon^s_{\alpha\varphi\beta}(n_{(1,e)})\cdot m\otimes n_{(0,0)}=m\otimes n.$$

同理可证 $c_{M,N}c^{-1}_{M,N}=id$. 此定理得证.

命题 4 设(H,R)是一个有限型拟三角弱 Hopf π- 余代数. 对于任意的$\alpha\in\pi,M\in{}_{H_\alpha}\mathcal{M}$,定义:$\rho^R_\lambda(m)=R^{(1)}_\alpha\cdot m\otimes S^{-1}_\lambda(R^{(2)}_{\lambda^{-1}})$,那么$(M,\rho^R)\in{}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha$.

另外,如果(H,R)是 π- 三角的,那么由所有对象(M,ρ^R)构成的全子范畴 $\mathcal{WYD}(H)_\pi$ 是对称范畴.

证明 因为 $\rho^R_\lambda(h\cdot m)=R^{(1)}_\alpha h\cdot m\otimes S^{-1}_\lambda(R^{(2)}_{\lambda^{-1}})$，其中 $h\in H_\alpha$，$m\in M,R_{\alpha,\beta}\Delta_{\alpha,\beta}(h)=\bar{\Delta}^{cop}_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}(h)R_{\alpha,\beta}$, 由此可得

$$h_{(3,\lambda)}m_{(1,\lambda)}S^{-1}_\lambda\varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\lambda^{-1}\alpha^{-1})})\otimes h_{(2,\alpha)}\cdot m_{(0,0)}=h_{(3,\lambda)}S^{-1}_\lambda(R^{(2)}_{\lambda^{-1}})S^{-1}_\lambda\varphi\alpha^{-1}(h_{(1,\alpha^{-1}\alpha^{-1})})\otimes h_{(2,\alpha)}R^{(1)}_\alpha\cdot m=$$
$$h_{(3,\lambda)}S^{-1}_\lambda(\varphi_{\alpha^{-1}}(h_{(1,\alpha\lambda^{-1}\alpha^{-1})})R^{(2)}_{\lambda^{-1}})\otimes h_{(2,\alpha)}R^{(1)}_\alpha\cdot m=h_{(3,\lambda)}S^{-1}_\lambda(R^{(2)}_{\lambda^{-1}}h_{(2,\lambda^{-1})})\otimes R^{(1)}_\alpha h_{(1,\alpha)}\cdot m=$$
$$S^{-1}_\lambda(R^{(2)}_{\lambda^{-1}})\otimes R^{(1)}_\alpha\cdot(h\cdot m),$$

因此$(M,\rho^R)\in{}_H\mathcal{WYD}^H_\alpha$.

如上定义余模,则

$$c_{M,N}(m\otimes n)=n_{(0,0)}\otimes\varphi_\beta(n_{(1,\beta^{-1}\alpha\beta)})\cdot m=R^{(1)}_\beta\cdot n\otimes S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m$$

进一步，如果(H,R)是 π- 三角的，即 $R^{-1}_{\alpha,\beta}=R^{(2)}_\alpha\otimes\varphi_{\beta^{-1}}(R^{(1)}_\beta)$，因此可以计算

$$c_{M_N,N}c_{M,N}(m\otimes n)=c_{MN,N}(R^{(1)}_\beta\cdot n\otimes S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m=$$
$$r^{(1)}_\alpha S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m\otimes S^{-1}_{\alpha\beta\alpha^{-1}}\varphi_\alpha(r^{(2)}_{\beta^{-1}})\triangleright^\alpha(R^{(1)}_\beta\cdot n)=$$
$$r^{(1)}_\alpha S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m\otimes\varphi_{\alpha^{-1}}(S^{-1}_{\alpha\beta\alpha^{-1}}\varphi_\alpha(r^{(2)}_{\beta^{-1}}))R^{(1)}_\beta\cdot n=$$
$$r^{(1)}_\alpha S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\beta})\cdot m\otimes S^{-1}_\beta(r^{(2)}_{\beta^{-1}})R^{(1)}_\beta\cdot n=$$
$$\underline{r^{(1)}_\alpha}S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m\otimes\underline{S^{-1}_\beta(r^{(2)}_{\beta^{-1}})}R^{(1)}_\beta\cdot n=$$
$$\underline{r^{(2)}_\alpha}S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m\otimes\underline{\varphi_{\beta^{-1}}(r^{(1)}_\beta)}R^{(1)}_\beta\cdot n=$$
$$\varphi_\beta(r^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha\beta})S^{-1}_\alpha\varphi_\beta(R^{(2)}_{\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta})\cdot m\otimes r^{(1)}_\beta R^{(1)}_\beta\cdot n=$$

$$S_{\alpha}^{-1}(\varphi_{\beta}(R_e^{(2)})_{(1,\alpha^{-1})}S_{\alpha}(\varphi_{\beta}(R_e^{(2)})_{(2,\alpha)}))\cdot m\otimes R_{\beta}^{(1)}\cdot n=$$
$$\varepsilon(1_{(2,e)}\varphi_{\beta}(R_e^{(2)}))1_{(1,\alpha)}\cdot m\otimes R_{\beta}^{(1)}\cdot n=\varepsilon(1_{(2,e)}\varphi_{\beta}(\varphi_{\beta^{-1}}(1'_{(1,e)})R_e^{(2)}))1_{(1,\alpha)}\cdot m\otimes 1'_{(2,\beta)}R_{\beta}^{(1)}\cdot n=$$
$$\varphi(1_{(2,e)}\varphi_{\beta}(R_e^{(2)}))1_{(1,\alpha)}\cdot m\otimes 1_{(3,\beta)}R_{\beta}^{(1)}\cdot n=1_{(1,\alpha)}\cdot m\otimes 1_{(2,\beta)}\cdot n=m\otimes n.$$

参 考 文 献

[1] Sweedler M. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

[2] Böhm G, Nill F, Szlachányi K. Weak Hopf algebras I: Integral theory and C^*-structure[J]. J Algebra, 1999, 221: 385-438.

[3] Maclane S. Categories for the Working Mathematician[M]. New York: Springer, 1971.

[4] Virelizier A. Hopf group-coalgebras[J]. J Pure App Algebra, 2002, 171: 75-122.

[5] Turaev V. Homotopy Quantum Field Theory[M]. Eürich: European Mathematical Society, 2010.

[6] van Daele A, Wang S H. New braided crossed categories and Drinfeld quantum double for weak Hopf π-coalgebras[J]. Comm Algebra, 2010, 38: 1019-1049.

[7] Freyd P J, Yetter D N. Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology[J]. Adv Math, 1989, 77(2): 156-182.

[8] Kirillov A J. On G-equivariant modular categories[J]. arXiv: math, 2004, QA/0401119.

[9] Virelizier A. Involutory Hopf group-coalgebras and flat bundles over 3-manifolds[J]. Fund Math, 2005, 188: 241-270.

[10] 马天水，李海英. Hopf 交叉积上的余拟三角结构[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2012，40(2)：22-25.

[11] 马天水，景俊霞，景艳艳. 一类交叉双积[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2014，42(2)：16-20.

[12] 焦争鸣，郭　敏，夏正亮. Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2015，43(1)：1-7.

[13] Wang S H. New Turaev braided group categories and group Schur-Weylduality[J]. Appl Categor Struct, 2013, 21(2): 141-166.

Constructing New Braided Crossed Category

DONG Lihong[1], YUAN Yuzhuo[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanang 473061, China)

Abstract: Let π be a group. We first introduce the notion of weak α-Yetter-Drinfeld modules with $\alpha\in\pi$. Then we show the category $\mathscr{WYD}(H)_{\pi}=\{{}_H\mathscr{WYD}_{\alpha}^H\}_{\alpha\in\pi}$ forms a braided crossed category. Especially we get a symmetric subcategory by a finite type π-triangular weak Hopf π-coalgebra.

Keywords: weak crossed Hopf π-coalgebra; weak Yetter-Drinfeld module; braided crossed category