文章编号:1000-2367(2018)01-0001-08 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.01.001

广义信赖域子问题的二阶锥重组技术

艾文宝

(北京邮电大学 理学院,北京 100876)

摘 要:二次约束优化问题在非线性规划的研究中处于基础性地位,而广义信赖域子问题是二次约束优化问题中的一类非常重要并且应用广泛的问题.对于非凸的广义信赖域子问题来说,如果它与它的拉格朗日对偶问题之间存在着正的对偶间隙,那么该问题的全局最优解的求解就会变得困难起来.近年来,二阶锥重组技术在缩小和消除广义信赖域子问题的对偶间隙上取得了一系列重要成果,将对这些重要的结果进行回顾并对未来给出展望.

关键词:广义信赖域子问题;对偶间隙;全局最优解;二阶锥

中图分类号:O221.2;O224 **文献标志码:**A

二次约束优化问题在非线性规划中处于基础性地位且应用广泛.一方面,在求解一般非线性规划问题的大多数方法中,如逐步二次规划方法及信赖域方法,它们的每一步迭代过程都需要求解一个二次约束优化子问题;另一方面,许多实际应用问题本身就是一个二次约束优化问题.因此,对二次约束优化问题的理论与数值方法的研究一直是非线性规划的一个基础性研究课题.

如果二次约束优化问题中有一个约束是严格凸的,则这类问题被称为广义信赖域子问题.经过正交变换和平移变换后,该类问题的数学模型可以写成如下形式:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{GTR}_m)\quad \min_{d\in\mathbf{R}^n}\quad & \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_0d+b_0^{\mathrm{T}}d,\\
\text{s.t.}\quad & \|d\|^2-1\le 0,\\
& \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_1d+b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\le 0,\\
& \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_2d+b_2^{\mathrm{T}}d+c_2\le 0,\\
& \cdots\\
& \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_md+b_m^{\mathrm{T}}d+c_m\le 0,
\end{aligned}
$$

其中,$Q_0,Q_1,\cdots,Q_m$ 都是 $n\times n$ 维的对称矩阵,$b_0,b_1,\cdots,b_m\in\mathbf{R}^n$,$c_1,\cdots,c_m\in\mathbf{R}$.这里的第一个约束是一个球约束,后 m 个二次约束可以退化成线性约束.当 $m=0$ 时,(GRT_0)就是经典的信赖域子问题[1-2],已经有大量的文献对该问题进行了研究[1-7].即使目标函数是非凸的,此时该问题仍然具备强对偶性,即经典信赖域子问题具有隐含凸性[8-9].当 $m=1$ 时,即使另外一个约束 $\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_1d+b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\le 0$ 退化成线性约束,该问题也可能存在正的对偶间隙[9-11].

考虑后面 m 个二次约束都退化成线性约束的(GRT_m)问题,二阶锥重组技术在缩小和消除这类问题的对偶间隙方面取得了许多重要结果.首先,2003 年 Sturm 与张树中第一次利用二阶锥重组技术完全消除了带一个线性约束的(GRT_1)的对偶间隙[9].利用文献[9]中的结果,叶荫宇和张树中在 2003 年证明了带两个线

收稿日期:2017-12-26;**修回日期:**2017-12-31.

基金项目:国家自然科学基金(11471052;11671052);国家自然科学基金重大研究计划(91630202).

作者简介(通信作者):艾文宝(1962-),男,江西高安人,北京邮电大学教授,博士生导师,研究方向为最优化理论与算法,E-mail:aiwb@bupt.edu.cn.

性约束且至少有一个是积极的(GRT$_2$)的对偶间隙也可以利用二阶锥重组技术完全消除[12].大约 10 年以后,在 2013 年,Burer 与 Anstreincher 进一步证明了带两个平行的线性约束的(GRT$_2$)的二阶锥重组模型的半正定松弛是紧的,即它的对偶间隙可以利用二阶锥重组技术完全消除[13].2015 年,Burer 和他的学生将该结果推广到任意 m 个不相交的线性约束情形,即只要任意两个线性约束对应的超平面在单位球内不相交,则带有 m 个线性约束的(GTR$_m$)的对偶间隙就可以利用二阶锥重组技术完全消除[14].但是,Burer 与 Anstreincher 给出了一个反例[13],表明当这两个线性约束对应的超平面相交时的(GTR$_2$)的二阶锥重组模型无法完全消除原问题的对偶间隙[13].在此基础上,2016 年袁健华与艾文宝等人提出了带两个线性约束的(GTR$_2$)的二阶锥重组模型可以消除原问题对偶间隙的一个充要条件[15].

相对于特殊的带 m 个线性约束的广义信赖域子问题(GTR$_m$)而言,利用二阶锥重组技术在减小和消除带二次约束的广义信赖域子问题(GTR$_m$)的对偶间隙方面的理论研究近来才取得一定进展.考虑最简单的 $m=1$ 时的情形即(GTR$_1$)模型,该类问题通常被称为广义 Celis-Dennis-Tapia (CDT)子问题.特别地,当(GTR$_1$)中的第 2 个约束也是凸函数时,该问题被称为 Celis-Dennis-Tapia(CDT)子问题,它是 1985 年由 Celis,Dennis 和 Tapia 在提出一类求解非线性等式约束优化问题的信赖域方法时给出的子问题[18].CDT 子问题和广义 CDT 子问题自从出现以后就一直受到广大优化专家与学者们的关注[9-10,12-13,16-30],相关结果本文不再赘述,有兴趣的学者可以自行查找相关文献.2017 年袁健华与艾文宝等人在理论上首次证明了可以通过增加一个二阶锥约束来缩小(GTR$_1$)的对偶间隙,并具体给出了这类二阶锥需要满足的充要条件[31].特别地,当 $\frac{1}{2}d^{\mathrm T}Q_1d+b_1^{\mathrm T}d+c_1$ 可以写成两个线性函数乘积的形式时,对偶间隙可以通过二阶锥重组技术完全消除[31].对于经典的 CDT 问题,给出了通过增加两个二阶锥约束来完全消除对偶间隙的一个充分条件;并且根据这个充分条件,进一步证明了任意一个二维经典 CDT 问题和一类特殊的三维经典 CDT 问题的对偶间隙总是能被完全消除的[31].

本文接下来将介绍二阶锥重组技术在缩小和消除广义信赖域子问题(GTR$_m$)方面的重要研究成果,并对今后进行展望.在本文中,$S^{n\times n}$ 表示所有的 $n\times n$ 维的实对称矩阵,$\nu(*)$ 表示问题($*$)的最优值,SOC 表示二阶锥(Second-order Cone),int($*$)表示集合($*$)的内部.

1 带不相交的线性约束的广义信赖域子问题

带 m 线性约束的广义信赖域子问题的数学模型可记为

$$
(\mathrm{GTR}_{Lm})\quad \begin{aligned} \min_{d\in\mathbf{R}^n}\quad & \frac{1}{2}d^{\mathrm T}Q_0d+b_0^{\mathrm T}d,\\ \text{s.t.}\quad & \|d\|^2-1\le 0,\\ & b_1^{\mathrm T}d+c_1\le 0,\\ & b_2^{\mathrm T}d+c_2\le 0,\\ & \cdots\\ & b_m^{\mathrm T}d+c_m\le 0. \end{aligned}
$$

针对(GTR$_{Lm}$),有如下的不相交的定义.

定义 1(不相交) 对于(GTR$_{Lm}$)来说,对于任意的 $i<j\,(i,j=1,2,\cdots,m)$,如果不存在(GTR$_{Lm}$)的可行点 $\hat d$ 满足 $\|\hat d\|^2<1,b_i^{\mathrm T}\hat d+c_i=0,b_j^{\mathrm T}\hat d+d_j=0$,那么就说问题(GTR$_{Lm}$)是不相交的,否则就称它是相交的.

通俗地说,只要任意两个线性约束对应的超平面在单位球内不相交,就称(GTR$_{Lm}$)是不相交的.不相交的(GTR$_{L2}$)问题的可行域的二维示意图如图 1 中阴影部分所示.

(GTR$_{Lm}$)的二阶锥重组模型为

$$
(\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{Lm}})\quad \begin{aligned}
\min_{d\in\mathbf{R}^n}\quad & \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0 d + b_0^{\mathrm{T}} d,\\
\text{s.t.}\quad & \|d\|^2 - 1 \le 0,\\
& (b_i^{\mathrm{T}}d + c_i)(b_j^{\mathrm{T}}d + c_j) \ge 0,\\
& i<j,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m,\\
& \|(-b_k^{\mathrm{T}}d - c_k)d\| \le -b_k^{\mathrm{T}}d - c_k,\\
& k=1,2,\cdots,m,
\end{aligned}
$$

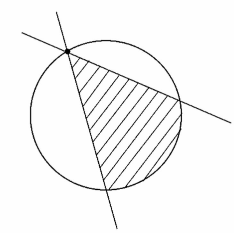


图 1　不相交的 (GTR_{L2}) 的可行域的二维示意图

显然，$\nu(\mathrm{GTR}_{Lm})=\nu(SOC_{\mathrm{GTR}_{Lm}})$.$(\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{Lm}})$ 的半正定松弛模型为

$$
(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{Lm}})\quad \begin{aligned}
\min_{X\in S^{(n+1)\times(n+1)}}\quad & M_0 \bullet X,\\
\text{s.t.}\quad & M_1 \bullet X \le 0,\\
& a_i^{\mathrm{T}} X a_j \ge 0,\ i<j,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m,\\
& X a_k \in \mathrm{SOC},\ k=1,2,\cdots,m,\\
& E_{00}\bullet X = 1,\\
& X \succeq 0,
\end{aligned}
$$

其中，

$$
M_0 := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & b_0^{\mathrm{T}} \\ b_0 & Q_0 \end{bmatrix},\ M_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & I \end{bmatrix},\ E_{00} := \begin{bmatrix} 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & O \end{bmatrix},\ a_i = \begin{bmatrix} -c_i \\ -b_i \end{bmatrix}\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{1}
$$

定理 1(推论 1[14])　假设(GTR_{Lm})满足 Slater 条件并且是不相交的，那么 $\nu(\mathrm{GTR}_{Lm})=\nu(\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{Lm}})=\nu(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{Lm}})$.

由定理 1 可知只要(GTR_{Lm})不相交，(GTR_{Lm})的对偶间隙就能够通过二阶锥重组技术完全消除.

2　带相交的线性约束的广义信赖域子问题

不相交的(GTR_{Lm})问题的对偶间隙能够通过二阶锥重组技术完全消除，但是这对于相交的(GTR_{Lm})问题来说并不一定成立.Burer 与 Anstreincher 在 2013 年就给出了相交的(GTR_{Lm})的一个反例[13]，该例子的参数具体如下：

$$
m=2,n=3,\boldsymbol{Q}_0=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 24 \\ 6 & -38 & 12 \\ 24 & 12 & 0 \end{bmatrix},b_0=\begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 9 \end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0 \end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},c_1=0.5,c_2=0.
$$

该例子的最优值为 $\nu(\mathrm{GTR}_{Lm})\approx -12.941\ 9$，二阶锥重组模型的半正定松弛问题的最优值为 $\nu(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{Lm})})\approx -13.841\ 0$.由该反例可知，相交情形的$(\mathrm{GTR}_{Lm})$的二阶锥重组模型的半正定松弛$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{Lm})})$不一定是紧松弛的[13]，那么$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{Lm})})$在何时是紧松弛呢?

2016 年袁健华与艾文宝等人对上述问题在 $m=2$ 时的情况进行了回答，提出了一般(无论是否相交)(GTR_{L2})问题的二阶锥重组模型的半正定松弛何时是紧松弛的一个充要条件[15].

定理 2(定理 2.7[15])　假设(GTR_{L2})满足 Slater 条件，令 $\hat{X}$ 和$(\hat{y}_0,\hat{y}_1,\hat{y}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2)$为$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{L2})})$及其对偶问题$(\mathrm{SOCD}_{(\mathrm{GTR}_{L2})})$的一对最优解，那么

$$
\nu(\mathrm{GTR}_{L2})=\nu(\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{L2}})\ne\nu(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{L2}})
$$

成立的充要条件是 $\hat{X}$ 和$(\hat{y}_0,\hat{y}_1,\hat{y}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2)$满足如下的条件：(1)$\mathrm{rank}(\hat{X})=3$，$\mathrm{rank}(\hat{Z})=n-2$；(2)$\hat{y}_1>0$；(3)$a_1^{\mathrm{T}}\hat{X}a_2>0$；(4)$\hat{u}_1\ne 0,\hat{u}_2\ne 0,\hat{X}a_1 \nparallel \hat{X}a_2$.

其中$(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{L2}})$ 是$(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{L2}})$的对偶问题，具体的数学模型为

$$
(\mathrm{SOCD}_{\mathrm{GTR}_{L2}})\quad \begin{aligned}
\max\quad & y_0,\\
\text{s.t.}\quad & Z\succeq 0,\\
& y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\\
& u_1\in\mathrm{SOC},\ u_2\in\mathrm{SOC},
\end{aligned}
$$

这里 $Z=M_0-y_0E_{00}+y_1M_1-\frac{y_2}{2}(a_1a_2^{\mathrm{T}}+a_2a_1^{\mathrm{T}})-\frac{1}{2}(u_1a_1^{\mathrm{T}}+a_1u_1^{\mathrm{T}})-\frac{1}{2}(u_2a_2^{\mathrm{T}}+a_2u_2^{\mathrm{T}})$.

根据定理2容易验证当(GTR_{L2})不相交时,必有 $\nu(\mathrm{GTR}_{L2})=\nu(\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{L2}})=\nu(\mathrm{SOCP}_{\mathrm{GTR}_{L2}})$ 成立.当(GTR_{L2}) 相交时,单位球$\{d\in\mathbf{R}^n \mid \|d\|^2\le 1\}$ 被超平面 $b_1^{\mathrm{T}}d+c_1=0$ 与 $b_2^{\mathrm{T}}d+c_2=0$ 分成如下4部分:

$$\Omega_1=\{d\in\mathbf{R}^n \mid \|d\|^2\le 1, b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\le 0, b_2^{\mathrm{T}}d+c_2\le 0\},$$
$$\Omega_2=\{d\in\mathbf{R}^n \mid \|d\|^2\le 1, b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\le 0, b_2^{\mathrm{T}}d+c_2\ge 0\},$$
$$\Omega_3=\{d\in\mathbf{R}^n \mid \|d\|^2\le 1, b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\ge 0, b_2^{\mathrm{T}}d+c_2\ge 0\},$$
$$\Omega_4=\{d\in\mathbf{R}^n \mid \|d\|^2\le 1, b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\ge 0, b_2^{\mathrm{T}}d+c_2\le 0\},$$

此时(GTR_{L2})的可行域的二维示意图如图2所示.

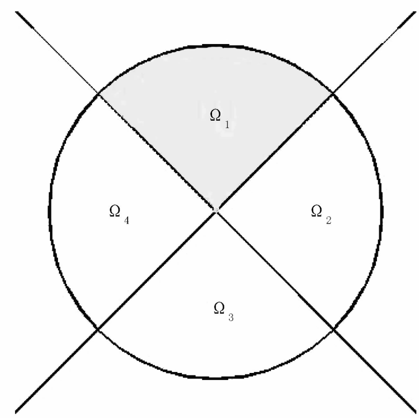


图2　相交的 (GTR_{L2}) 的可行域的二维示意图

此时,(GTR_{L2})也记为$(\mathrm{GTR}_{\Omega_1})$.同理,也可以得到目标函数为 $\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_0d+b_0^{\mathrm{T}}d$,可行域分别为 Ω_2,Ω_3 和 Ω_4 的3个优化问题$(\mathrm{GTR}_{\Omega_2})$,$(\mathrm{GTR}_{\Omega_3})$和$(\mathrm{GTR}_{\Omega_4})$,它们的二阶锥重组模型分别为$(\mathrm{SOC}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_2})})$,$(\mathrm{SOC}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_3})})$,$(\mathrm{SOC}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_4})})$,对应的半正定松弛问题分别为$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_2})})$,$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_3})})$,$(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_4})})$.根据定理2还可以很容易地得到下面的关于相交的$(\mathrm{GTR}_{L2})$的重要推论.

推论1(推论2.11,定理2.12[15])　假设(GTR_{L2})是相交的.如果 $\nu(\mathrm{GTR}_{\Omega_1})\neq\nu(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_1})})$,则其他3块一定是紧松弛,即 $\nu(\mathrm{GTR}_{\Omega_2})=\nu(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_2})})$,$\nu(\mathrm{GTR}_{\Omega_3})=\nu(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_3})})$,$\nu(\mathrm{GTR}_{\Omega_4})=\nu(\mathrm{SOCP}_{(\mathrm{GTR}_{\Omega_4})})$.

推论1表明如果两个线性约束在球内相交,则相应形成的4个区域上同一目标函数下的广义信赖域优化问题至少有3个问题的二阶锥重组模型的半正定松弛是紧松弛的.

3　广义CDT子问题

广义CDT子问题就是(GTR_1)问题,具体的数学模型为

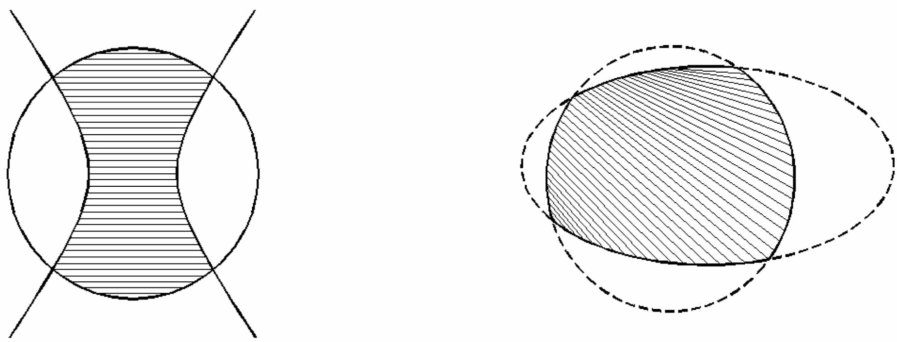
$$
\begin{aligned}
(\mathrm{GTR}_1)\quad \min_{d\in\mathbf{R}^n}\quad & q_0(d)=\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_0d+b_0^{\mathrm{T}}d,\\
\text{s.t.}\quad & q_1(d)=\|d\|^2-1\le 0,\\
& q_2(d)=\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_1d+b_1^{\mathrm{T}}d+c_1\le 0,
\end{aligned}
$$

这里 Q_0 和 Q_1 可能都含有负特征值.(GTR_1) 在 Q_1 有负特征值和 $Q_1\succeq 0$ 时的可行域 $\Omega:=\{d\in R^n \mid q_1(d)\le 0, q_2(d)\le 0\}$ 的二维示意图如图3所示.

(GTR_1)问题可能存在正的对偶间隙,艾文宝与张树中在2009年给出了(GTR_1)存在正的对偶间隙的一个充要条件[10].

定理3(定理5.2[10])　假设(GTR_1)满足Slater条件,那么(GTR_1)有正的对偶间隙的充要条件是存在乘子 $\hat{y}_1$ 和 $\hat{y}_2$ 使得条件 I' 成立,即(1)$\hat{y}_1\hat{y}_2>0$;(2)$H(\hat{y}_1,\hat{y}_2)=Q_0+2\hat{y}_1I+\hat{y}_2Q_2\succeq 0$,$\mathrm{rank}(H(\hat{y}_1,\hat{y}_2))=n-1$;(3)线性方程组 $H(\hat{y}_1,\hat{y}_2)d+b_0+\hat{y}_2b_1=0$ 有两个解 $\hat{d}_1,\hat{d}_2$ 满足 $q_1(\hat{d}_1)=q_2(\hat{d}_2)=0$,$q_2(\hat{d}_1)<0$,$q_2(\hat{d}_2)>0$.

根据定理3可知,当(GTR_1)有正的对偶间隙时,一定存在满足条件 I' 的 $\hat{d}_1,\hat{d}_2$,记 $\hat{d}_1$ 与 $\hat{d}_2$ 之间的开线



(a) Q_1 有负特征值　　(b) $Q_1 \succeq 0$

图 3　(GTR_1) 的可行域的二维示意图

段为 l_λ，即 $l_\lambda := \{(1-\lambda)\hat{d}_1 + \lambda\hat{d}_2 \mid 0 < \lambda < 1\}$.

对于任意给定的 $n+1$ 维向量 $a = [\tilde{c} \quad \tilde{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $0 \neq \tilde{b} \in \mathbf{R}^n$，定义半空间 $D(a) := \{d \in \mathbf{R}^n \mid \tilde{b}^{\mathrm{T}}d + \tilde{c} \geq 0\}$，并得到新的优化问题

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{GTR}_1(a)) \quad & \min_{d \in \mathbf{R}^n} \quad q_0(d), \\
& \text{s.t.} \quad d \in \Omega(a) := \Omega \cap D(a),
\end{aligned}
$$

此时，$\nu(\mathrm{GTR}_1) = \min\{\nu(\mathrm{GTR}_1(a)), \nu(\mathrm{GTR}_1(-a))\}$.$(\mathrm{GTR}_1(a))$ 可以利用二阶锥进行如下的等价重组：

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{GTR}_1(a)) \quad \min_{d \in \mathbf{R}^n} \quad & q_0(d) = \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_0 d + b_0^{\mathrm{T}} d, \\
\text{s.t.} \quad & q_1(d) = \| d \|^2 - 1 \leq 0, \\
& q_2(d) = \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_1 d + b_1^{\mathrm{T}} d + c_1 \leq 0, \\
& \| (\tilde{b}^{\mathrm{T}} d + \tilde{c}) d \| \leq \tilde{b}^{\mathrm{T}} d + \tilde{c},
\end{aligned}
$$

该问题的半正定松弛模型为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SOCP}(a)) \quad \min_{X \in S^{(n+1)\times(n+1)}} \quad & M_0 \cdot X, \\
\text{s.t.} \quad & M_1 \cdot X \leq 0, \\
& M_2 \cdot X \leq 0, \\
& Xa \in \mathrm{SOC}, \\
& E_{00} \cdot X = 1, \\
& X \succeq 0,
\end{aligned}
$$

其中，M_0, M_1, E_{00} 的定义如(1)式所示，$M_2 := \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2c_1 & b_1^{\mathrm{T}} \\ b_1 & \boldsymbol{Q}_1 \end{bmatrix}$. 2017 年袁健华与艾文宝等人证明了如下定理[31].

定理 4(定理 3.5[31]**)**　假设(GTR_1)满足 Slater 条件且有正的对偶间隙，那么对于任意给定的 $n+1$ 维向量 $a = [\tilde{c} \quad \tilde{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} (0 \neq \tilde{b} \in \mathbf{R}^n)$，$\min\{\nu(\mathrm{SOCP}(a)), \nu(\mathrm{SOCP}(-a))\} > \nu(\mathrm{SP}) \Leftrightarrow$ 超平面 $\tilde{b}^{\mathrm{T}}d + \tilde{c} = 0$ 与开线段 l_λ 相交.其中，

$$
\min\{\nu(\mathrm{SOCP}(a)), \nu(\mathrm{SOCP}(-a))\} :=
\begin{cases}
\min\{\nu(\mathrm{GTR}_1(a)), \nu(\mathrm{SOCP}(-a))\}, \text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a)) = \varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a)) \neq \varnothing, \\
\min\{\nu(\mathrm{SOCP}(a)), \nu(\mathrm{GTR}_1(-a))\}, \text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a)) \neq \varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a)) = \varnothing, \\
\min\{\nu(\mathrm{SOCP}(a)), \nu(\mathrm{SOCP}(-a))\}, \text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a)) \neq \varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a)) \neq \varnothing,
\end{cases}
$$

(SP)为(GTR_1)的半正定松弛问题，具体的数学模型为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP})\quad & \min_{X\in S^{(n+1)\times(n+1)}} && M_0\bullet X,\\
& \text{s.t.} && M_1\bullet X\le 0,\\
& && M_2\bullet X\le 0,\\
& && E_{00}\bullet X=1,\\
& && X\succeq 0.
\end{aligned}
$$

下面考虑经典的 CDT 问题,它的数学模型如下:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{CDT})\quad & \min_{d\in\mathbf{R}^n} && q_0(d)=\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_0d+b_0^{\mathrm{T}}d,\\
& \text{s.t.} && q_1(d)=\|d\|^2-1\le 0,\\
& && q_2(d)=\|A^{\mathrm{T}}d+f\|^2-1\le 0,
\end{aligned}
$$

其中,$A\in\mathbf{R}^{n\times p}$,$f\in\mathbf{R}^p$.同上一节一样,对于任意给定的 $n+1$ 维向量 $a=[\bar{c}\quad \bar{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}(0\ne\bar{b}\in\mathbf{R}^n)$,由于此时不仅单位球约束 $q_1(d)=\|d\|^2-1\le 0$ 是一个二阶锥,第 2 个约束 $q_1(d)=\|A^{\mathrm{T}}d+f\|^2-1\le 0$ 也是一个二阶锥,所以(CDT(a))的二阶锥重组可以增加一个约束,具体如下:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{CDT}(a))\quad & \min_{d\in\mathbf{R}^n} && \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Q_0d+b_0^{\mathrm{T}}d,\\
& \text{s.t.} && \|d\|^2-1\le 0,\\
& && \|A^{\mathrm{T}}d+f\|^2-1\le 0,\\
& && \|(\bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c})d\|\le \bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c},\\
& && \|(\bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c})(A^{\mathrm{T}}d+f)\|\le \bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c},
\end{aligned}
$$

该问题的半正定松弛模型为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{CDTSP}(a))\quad & \min_{X\in S^{(n+1)\times(n+1)}} && M_0\bullet X,\\
& \text{s.t.} && M_1\bullet X\le 0,\\
& && M_2\bullet X\le 0,\\
& && Xa\in \mathrm{SOC}(n+1),\\
& && BXa\in \mathrm{SOC}(p+1),\\
& && E_{00}\bullet X=1,\\
& && X\succeq 0,
\end{aligned}
$$

其中,M_0,M_1,E_{00} 的定义如(1)式所示且

$$
M_2=\begin{bmatrix} f^{\mathrm{T}}f-1 & f^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\\ Af & AA^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},B:=\begin{bmatrix}1 & 0^{\mathrm{T}}\\ f & A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.
$$

袁健华与艾文宝等人给出了如下对偶间隙能够完全消除的一个充分条件[31].

定理 5(定理 5.2[31]**)** 假设(CDT)满足 Slater 条件且有正的对偶间隙.如果存在 $n+1$ 维向量 $a=[\bar{c}\quad \bar{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}(0\ne\bar{b}\in\mathbf{R}^n)$,其所对应的超平面 $\bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c}=0$ 与开线段 l_λ 相交且满足如下条件:

$$
\{d\in\mathbf{R}^n\mid q_1(d)\le 0,\bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c}=0\}=\{d\in\mathbf{R}^n\mid q_2(d)\le 0,\bar{b}^{\mathrm{T}}d+\bar{c}=0\},
$$

则必有 $\nu(\mathrm{CDT})=\min\{\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\nu(\mathrm{CDTSP}(-a))\}$,其中

$$
\min\{\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\nu(\mathrm{CDTSP}(-a))\}:=
$$

$$
\begin{cases}
\min\{\nu(\mathrm{CDT}(a)),\nu(\mathrm{CDTSP}(-a))\}=\\
\nu(\mathrm{CDTSP}(-a)),\text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a))=\varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a))\ne\varnothing,\\
\min\{\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\nu(\mathrm{GTR}_{Q1}(-a))\}=\\
\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a))=\varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a))=\varnothing,\\
\min\{\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\nu(\mathrm{CDTSP}(-a))\},\text{若 } \mathrm{int}(\Omega(a))=\varnothing \text{ 且 } \mathrm{int}(\Omega(-a))\ne\varnothing.
\end{cases}
$$

根据定理 5 的充分条件,可以证明任意一个二维的经典 CDT 问题都可以通过上面的二阶锥重组技术完全消除对偶间隙[31].

定理 6(推论 5.3[31])　假设二维的经典 CDT 子问题满足 Slater 条件且有正的对偶间隙.那么总能找到一个三维向量 $a=\begin{bmatrix}\bar{c} & \bar{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(0\neq\bar{b}\in\mathbf{R}^2)$ 使得

$$\nu(\mathrm{CDT})=\min\{\nu(\mathrm{CDTSP}(a)),\nu(\mathrm{CDTSP}(-a))\}.$$

如图 4 所示，图中的三条直线都满足定理 5 的条件，这 3 条直线中的任意一条都可以构造二阶锥，进而消除这个二维的经典 CDT 问题的对偶间隙.

利用定理 6 的构造性证明，文献[31]对目前为止公开发表论文中出现的有对偶间隙的经典二维 CDT 实例进行了数值计算，数值结果见表 1.数值结果表明对偶间隙通过二阶锥重组技术已经被完全消除.

表 1　有对偶间隙的经典二维 CDT 实例的数值计算结果

CDT 实例的来源	ν(CDT)	对偶间隙	ν(CDTSP(a))	二阶锥重组后的对偶间隙
例 6.1[10]	−0.143 5	0.560 6	−0.143 5	0
例(EX_1)[12]	−2	1	−2.000 0	0
例(EX_2)[12]	−2	0.385 2	−2.000 0	0
5.2 章中的例子[13]	−4	0.25	−4.000 0	0
5.4 章中的例子[14]	−1.460 8	0.164 2	−1.460 8	0
引理 2.2 中的例子[19]	0	0.5	0.000 0	0
例 7.3[25]	5.5	0.166 7	5.500 0	0

4　总结与展望

二阶锥重组技术可以有效地缩小甚至消除某些广义信赖域子问题的对偶间隙，但是许多问题仍然处于不清楚的状态.例如，对于相交的(GTR_{Lm})问题，如何进一步缩小甚至消除($\mathrm{SOC}_{\mathrm{GTR}_{Lm}}$)的对偶间隙？同样地，对于一般的广义信赖域子问题(GTR_m)，目前仅对(GTR_1)进行了研究，证明了通过增加一个二阶锥约束能够缩小其对偶间隙，那么一般的(GTR_m)呢？此外，对于通过增加一个二阶锥约束仍然不能完全消除(GTR_1)的对偶间隙的情况，能否继续增加以及如何增加二阶锥约束来进一步缩小对偶间隙？这些问题都值得进一步研究.

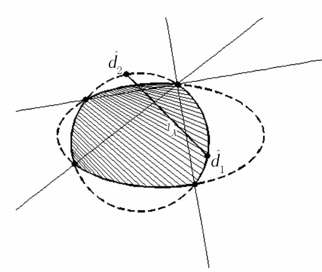


图 4　经典 CDT 问题的可行域的二维示意图

参　考　文　献

[1]　Conn A R，Gould N L M，Toint P L.Trust-region methods [M].Philadelphi：MPS/SIAM Series on Optimization，2000.

[2]　Yuan Ya-xiang.Recent advances in trust region algorithms [J].Mathematical Programming，2015，151(1)：249-281.

[3]　Moré J J，Sorensen D C.Computing a trust region step [J].SIAM J Sci Statist Comput，1983，4(3)：553-572.

[4]　Ye Y Y.A new complexity result on minimization of a quadratic function with a sphere constraint [C].Princeton：Princeton University Press，1992.

[5]　Rendl F，Wolkowicz H.A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization [J].Mathematical Programming，1997，77(2)：273-299.

[6]　Fu M Y，Luo Z Q，Ye Y Y.Approximation algorithms for quadratic programming [J].Journal of Combinatorial Optimization，1998，2(1)：29-50.

[7]　Gould N I M，Lucidi S，Roma M，et al.Solving the trust-region subproblem using the Lanczos method [J].SIAM Journal on Optimization，1999，9(2)：504-525.

[8]　Yakubovich V A.S-procedure in nonlinear control theory [C].Seriya Matematika：Vestnik Leningradskovo Universiteta，1971：62-77.

[9]　Sturm Jos F，Zhang S Z.On cones of nonnegative quadratic functions [J].Mathematics of Operations Research，2003，28 (2)：246-267.

[10]　Ai W B，Zhang S Z.Strong duality for the CDT subproblem：A necessary and sufficient condition [J].SIAM Journal on Optimization，2009，19(4)：1735-1756.

[11]　Jeyakumar V，Li G Y.Trust-region problems with inequality constraints：Exact SDP relaxation，global optimality and robust optimization [J].Mathematical Programming Ser A，2014，147(1/2)：171-206.

[12] Ye Y Y, Zhang S Z. New results on quadratic minimization [J]. SIAM Journal on Optimization, 2003, 14 (1): 245-267.

[13] Burer S, Anstreicher K M. Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems [J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(1): 432-451.

[14] Burer S, Yang B S. The trust-region subproblem with non-intersecting linear constraints[J]. Mathematical Programming Ser A, 2015, 149 (1/2): 253-264.

[15] Yuan J H, Wang M L, Ai W B, et al. A necessary and su_cient condition of convexity for SOC reformulation of trust-region subproblem with two intersecting cuts [J]. Science China Mathematics, 2016, 59 (6): 1127-1140.

[16] Yuan Y X. Trust region algorithms for constrained optimization [C]//Cui J Z, Shi Z C, Wang D L. Proceedings of Conference on Scientific and Engineering Computing for Young Chinese Scientists. Beijing: National Defence Industry Press, 1994: 105-110.

[17] Yuan Y X. Nonlinear programming: Trust region algorithms [C]//Xiao S T, Wu F. Proceedings of Chinese SIAM Annual Meeting. Beijing: Tsinghua University Press, 1994: 83-97.

[18] Celis M R, Dennis J E, Tapia R A. A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization [C]// in Numerical Optimization. SIAM: Philadelphia, 1985: 71-82.

[19] Yuan Y X. On a subproblem of trust region algorithms for constrained optimization [J]. Mathematical Programming, 1990, 47 (1/2/3): 53-63.

[20] Yuan Y X. A dual algorithm for minimizing a quadratic function with two quadratic constraints [J]. Journal of Computational Mathematics, 1991, 9(4): 348-359.

[21] Powell M J D, Yuan Y X. A trust region algorithm for equality constrained optimization [J]. Mathematical Programming, 1991, 49 (2): 189-211.

[22] Zhang Y. Computing a Celis-Dennis-Tapia trust-region step for equality constrained optimization [J]. Mathematical Programming, 1992, 55 (1/2/3): 109-124.

[23] Martínez J M. Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres [J]. SIAM Journal on Optimization, 1994, 4 (1): 159-176.

[24] Peng J M, Yuan Y X. Optimality conditions for the minimization of a quadratic with two quadratic constraints [J]. SIAM Journal on Optimization, 1997, 7 (3): 579-594.

[25] Chen X D, Yuan Y X. On local solutions of the Celis-Dennis-Tapia subproblem [J]. SIAM Journal on Optimization, 1999, 10 (2): 359-383.

[26] Chen X D, Yuan Y X. On maxima of dual function of the CDT subproblem [J]. Journal of Computational Mathematics, 2001, 19 (2): 113-124.

[27] Bomze I M, Overton M L. Narrowing the difficulty gap for the Celis-Dennis-Tapia problem[J]. Mathematical Programming, 2015, 151 (2): 459-476.

[28] Bienstock D. A note on polynomial solvability of the CDT problem [J]. SIAM Journal on Optimization, 2016 26 (1): 488-498.

[29] Sakaue S, Nakatsukasa Y J, Takeda A, et al. Solving generalized CDT problems via two-parameter eigenvalues [J]. SIAM Journal on Optimization, 2016, 26 (3): 1669-1694.

[30] Burer S, Yang B S. A two-variable approach to the two-trust-region subproblem[J]. SIAM Journal on Optimization, 2016, 26 (1): 661-680.

[31] Yuan J H, Wang M L, Ai W B, et al. New results on narrowing the duality gap of the extended CDT problem[J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27 (2): 890-909.

Second-order cone reformulation technique for generalized trust-region subproblem

Ai Wenbao

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Constrained quadratic optimization problems are fundamental for nonlinear programming. And extended trust-region subproblems are a class of important and widely-used problems among constrained quadratic optimization problems. For a nonconvex extended trust-region subproblem with a positive duality gap, it is difficult to find its global optimal solution. In this paper, it summarizes some important results on narrowing or eliminating the duality gap by second-order cone reformulation technique.

Keywords: extended trust-region subproblem; duality gap; global optimal solution; second-order cone

[责任编校 陈留院]