

非线性色散耗散波动方程双线性元新的高精度估计

李玲,李秋红,兰奇逊

(河南城建学院 数理学院,河南 平顶山 467036)

摘要:主要研究具有局部 Lipschitz 连续非线性项的色散耗散波动方程双线性元新的高精度估计.对于半离散格式,利用插值与投影相结合的思想,在精解 $u, u_t \in H^2(\Omega)$ 较弱的正则假设下,导出了 H^1 模意义下超逼近性,而以往文献在 $u, u_t, u_{tt} \in H^2(\Omega)$ 时却只能得到最优误差估计.进一步地,当 $u \in H^3(\Omega)$ 时,利用插值后处理技巧给出了整体超收敛结果,但不要求 $u_t, u_{tt} \in H^3(\Omega)$,进而改善以往文献的结果.最后,建立了一个全离散逼近格式并研究了其解的超逼近性.

关键词:非线性色散耗散波动方程;双线性元;半离散和全离散格式;插值与投影结合;超逼近和超收敛估计

中图分类号:O242.21

文献标志码:A

考虑下面非线性色散耗散波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u), & \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 中,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \times (0, T] \text{ 上,} \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), & \text{在 } \Omega \text{ 中.} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是有界凸多边形区域, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界, $u_0(X), u_1(X), f(u)$ 是已知的充分光滑的函数 $X = (x, y)$, $f(u)$ 关于 u 满足 $|f'(u)| \leq l(1 + |u|^p)$, $p > 0$ 及 $l > 0$ 是常数.

关于方程(1)的理论分析及有限元方法已有一些研究,例如,在 $f(u)$ 满足整体 Lipschitz 连续条件下,文献[1-4]分别用不同方法研究了整体解的存在性和唯一性.文献[5]研究了协调元在半离散和全离散格式的 L^2 和 H^1 模的最优误差估计.文献[6]研究了非常规 Hermite 型有限元的超收敛和外推,并在全离散格式下得到了最优误差估计.文献[7]给出了双线性元在半离散和全离散格式下的高精度分析.

本文的主要目的是在半离散和全离散格式下给出双线性元对问题(1)新的高精度估计.借助于该元的高精度结果、插值与投影相结合的分析技巧^[8-11],在降低对精确解的正则性要求,以及非线性项 $f(u)$ 不满足局部 Lipschitz 连续条件下,给出相应的超逼近及超收敛结果,并大大简化了证明过程,从而改善了以往文献的相应结论.需要说明的是,本文结果对线性三角形同样成立.

1 半离散格式的超逼近和超收敛

设 T_h 为 Ω 上的一族矩形剖分,满足正则性条件或拟一致假设.设 V^h 为双线性元空间, $V_0^h = \{v \in V^h, v|_{\partial\Omega} = 0\}$, 则文献[12]证明了下面的引理.

引理 1 设 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega), v \in V^h, I_h$ 为双线性元插值算子, 则

$$\int_{\Omega} \nabla(u - I_h u) \nabla v \, dx \, dy = O(h^2) \|u\|_3 \|v\|_1. \quad (2)$$

引入投影算子 $R_h: H_0^1 \rightarrow V_0^h$, 即对 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$(\nabla(R_h u - u), \nabla v_h) + (R_h u - u, v_h) = 0, \forall v_h \in V_0^h, \quad (3)$$

收稿日期:2020-09-07;修回日期:2020-12-13.

基金项目:国家自然科学基金青年基金(61503122)

作者简介(通信作者):李玲(1969-),女,河南鲁山人,河南城建学院副教授,研究方向为计算数学, E-mail: liling950406@

则类似于文献[9-12],可以证明:对 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 有

$$\|R_h u - u\|_0 + h \|R_h u - u\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_2. \tag{4}$$

进一步地,若 $u \in H^3(\Omega)$ 则有

$$\|R_h u - I_h u\|_1 \leq ch^2 \|u\|_3. \tag{5}$$

问题(1)的变分形式为:求 $u \in H_0^1(\Omega)$, 满足

$$\begin{cases} (u_{tt}, \nu) + (\nabla u, \nabla \nu) + (\nabla u_t, \nabla \nu) + (\nabla u_{tt}, \nabla \nu) = (f(u), \nu), \forall \nu \in H_0^1(\Omega), \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X). \end{cases} \tag{6}$$

变分问题(6)的有限元逼近方程为:求 $u^h \in V_0^h$ 满足

$$\begin{cases} (u_{tt}^h, \nu) + (\nabla u^h, \nabla \nu) + (\nabla u_t^h, \nabla \nu) + (\nabla u_{tt}^h, \nabla \nu) = (f(u^h), \nu), \forall \nu \in V_0^h, \\ u^h(X, 0) = R_h u_0(X), u_t^h(X, 0) = R_h u_1(X). \end{cases} \tag{7}$$

定理 1 设 u, u^h 分别是问题(1)和(6)的解, $u, u_t \in H^2(\Omega)$, 则有超逼近结果

$$\|u^h - R_h u\|_1 + \|u_t^h - R_h u_t\|_1 \leq ch^2 \left(\int_0^t (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

证明 令 $u - u^h = (u - R_h u) + (R_h u - u^h) = \eta + \theta$. $\forall \nu \in V_0^h$, 由(1)和(6)式得

$$\begin{aligned} (\theta_{tt}, \nu) + (\nabla \theta, \nabla \nu) + (\nabla \theta_t, \nabla \nu) + (\nabla \theta_{tt}, \nabla \nu) &= -(\eta_{tt}, \nu) - \\ &(\nabla \eta, \nabla \nu) - (\nabla \eta_t, \nabla \nu) - (\nabla \eta_{tt}, \nabla \nu) + (f(u) - f(u^h), \nu) = \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \tag{9}$$

由 R_h 的定义知 $I_1 + I_4 = 0, I_2 = (\eta, \nu) \leq ch^2 \|u\|_2 \|\nu\|_0, I_3 = (\eta_t, \nu) \leq ch^2 \|u_t\|_2 \|\nu\|_0$.

又注意到 $f(u)$ 关于 u 满足局部 Lipschitz 连续条件, 由文献[13]知

$$\begin{aligned} |I_5| \leq c \|u - u^h\|_0 \|\nu\|_1 &\leq c (\|\eta\|_0 + \|\theta\|_0) \|\nu\|_1 \leq ch^2 \|u\|_2 \|\nu\|_1 + \\ &c \|\theta\|_0 \|\nu\|_1 \leq ch^4 \|u\|_2^2 + c \|\theta\|_0^2 + c \|\nu\|_1^2. \end{aligned} \tag{10}$$

根据以上估计(9)式可变形为

$$(\theta_{tt}, \nu) + (\nabla \theta, \nabla \nu) + (\nabla \theta_t, \nabla \nu) + (\nabla \theta_{tt}, \nabla \nu) \leq ch^4 (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + c \|\theta\|_0^2 + c \|\nu\|_1^2. \tag{11}$$

在(11)式中令 $\nu = \theta_t$ 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta_t\|_0^2 + \|\theta\|_1^2 + \|\theta_t\|_1^2) \leq ch^4 (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + c \|\theta\|_1^2 + c \|\theta_t\|_1^2. \tag{12}$$

对(12)式两端从 0 到 t 积分, 并注意到 $\theta(X, 0) = \theta_t(X, 0) = 0$, 得

$$\|\theta\|_1^2 + \|\theta_t\|_1^2 \leq ch^4 \int_0^t (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) ds + c \int_0^t (\|\theta\|_1^2 + \|\theta_t\|_1^2) ds, \tag{13}$$

将 Gronwall 引理应用于(13)式有 $\|\theta\|_1^2 + \|\theta_t\|_1^2 \leq ch^4 \int_0^t (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) ds$. 即

$$\|\theta\|_1 + \|\theta_t\|_1 \leq ch^2 \left(\int_0^t (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

再借助于三角不等式和(14)式得证(8)式, 定理证毕.

为了取得整体超收敛结果, 采用文献[8]中构造的插值后处理算子 \prod_{2h} , 满足

$$\prod_{2h} I_h \varphi = \prod_{2h} \varphi, \forall \varphi \in H^2(\Omega), \tag{15}$$

$$\|\prod_{2h} \varphi - \varphi\|_1 \leq ch^2 \|\varphi\|_3, \forall \varphi \in H^3(\Omega), \tag{16}$$

$$\|\prod_{2h} \nu\|_1 \leq c \|\nu\|_1, \forall \nu \in V_0^h. \tag{17}$$

定理 2 设 u, u^h 分别为(1)和(7)的解, $u \in H^3(\Omega), u_t \in H^2(\Omega)$ 时, 有下面超收敛结果

$$\|\prod_{2h} u^h - u\|_1 \leq ch^2 \left\{ \left[\int_0^t (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_2^2) ds \right]^{\frac{1}{2}} + \|u\|_3 \right\}.$$

证明 依据(5)、(15)~(17)式及定理 1 得

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{2h} u^h - u \right\|_1 &\leq \left\| \prod_{2h} u^h - \prod_{2h} I_h u \right\|_1 + \left\| \prod_{2h} I_h u - u \right\|_1 = \\ &\left\| \prod_{2h} (u^h - I_h u) \right\|_1 + \left\| \prod_{2h} u - u \right\|_1 \leq c \|u^h - I_h u\|_1 + \\ &ch^2 \|u\|_3 \leq c \|\theta\|_1 + \|R_h u - I_h u\|_1 + ch^2 \|u\|_3 \leq \\ &ch^2 \left\{ \left[\int_0^t (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_2^2) ds \right]^{\frac{1}{2}} + \|u\|_3 \right\}. \end{aligned}$$

定理得证.

2 全离散格式下的超逼近估计

本节将给出问题(1)的一个全离散逼近格式及给出相应的超逼近差估计.

首先将区间 $[0, T]N$ 等分: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T, t_{n+1} - t_n = \tau, U^n$ 表示当 $t = t_n = n\tau$ 时 $u(t_n)$ 在 V_0^h 中的逼近. 引入下面一些符号.

$$u^n = u(t_n), u^n - U^n = (u^n - I_h u^n) + (I_h u^n - U^n) = \eta^n + \theta^n, \forall U^n \in V_0^h, \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\varphi^{n+1} + \varphi^n),$$

$$\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \tau^{-1}(\varphi^{n+1} - \varphi^n), \varphi^{n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(\varphi^{n+1} + 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_t \varphi^n = (2\tau)^{-1}(\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}) = \tau^{-1}(\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\partial}_t \varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_t \varphi^n = \tau^{-2}(\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \tau^{-1}(\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_t \varphi^{n-\frac{1}{2}}).$$

考虑问题(2)全离散逼近格式: 求 $U^n \in V_0^h$, 满足

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t U^n, \nu) + (\nabla U^{n \cdot \frac{1}{4}}, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t U^n, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t U, \nabla \nu) = (f^{n \cdot \frac{1}{4}}(U), \nu), \forall \nu \in V_0^h, \\ U^0 = R_h u_0, U^1 = R_h(u_0 + u_1 \tau + \frac{1}{2} u_{tt}(0) \tau^2), \end{cases} \quad (18)$$

其中 $n \geq 2$.

定理 3 设 u^n, U^n 分别是问题(1)和(18)的解, $u, u_t \in H^2(\Omega)$, 则有

$$\|R_h u^n - U^n\|_1 = O(h^2 + \tau^2), \quad (19)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots, n$.

证明 $\forall \nu \in V_0^h$, (2)式可以写为

$$\begin{aligned} &(\bar{\partial}_t u^n, \nu) + (\nabla u^{n \cdot \frac{1}{4}}, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t u^n, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t u^n, \nabla \nu) = \\ &(f^{n \cdot \frac{1}{4}}(u), \nu) + (R_2^n, \nu) + (\nabla R_1^n, \nabla \nu) + (\nabla R_2^n, \nabla \nu), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $R_1^n = \bar{\partial}_t u^n - u_t^{n \cdot \frac{1}{4}} = O(\tau^2), R_2^n = \bar{\partial}_t u^n - u_{tt}^{n \cdot \frac{1}{4}} = O(\tau^2)$.

利用(18)和(20)式得

$$\begin{aligned} &(\bar{\partial}_t \theta^n, \nu) + (\nabla \theta^{n \cdot \frac{1}{4}}, \nabla \nu) - (\nabla \bar{\partial}_t \theta^n, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t \theta^n, \nabla \nu) = -(\bar{\partial}_t \eta^n, \nu) - \\ &(\nabla \eta^{n \cdot \frac{1}{4}}, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t \eta^n, \nabla \nu) + (\nabla \bar{\partial}_t \eta^n, \nabla \nu) + (f^{n \cdot \frac{1}{4}}(u) - f^{n \cdot \frac{1}{4}}(U), \nu) + \\ &(R_2^n, \nu) + (\nabla R_1^n, \nabla \nu) + (\nabla R_2^n, \nabla \nu) = \sum_{i=1}^8 G_i. \end{aligned} \quad (21)$$

在(21)式中令 $\nu = \bar{\partial}_t \theta^n$ 则其左边的各项估计为

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \bar{\partial}_t \theta^n) = (2\tau)^{-1} (\|\bar{\partial}_t \theta^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \|\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \theta^{n \cdot \frac{1}{4}}, \nabla \bar{\partial}_t \theta^n) &= (2\tau)^{-1} (\nabla \theta^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \theta^{n-\frac{1}{2}}, \nabla \theta^{n+\frac{1}{2}} - \nabla \theta^{n-\frac{1}{2}}) = \\ &(2\tau)^{-1} (|\theta^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 - |\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$(\nabla \bar{\partial}_t \theta^n, \nabla \bar{\partial}_t \theta^n) = |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2, \quad (24)$$

$$(\nabla \bar{\partial}_n \theta^n, \nabla \bar{\partial}_t \theta^n) = (2\tau)^{-1} (|\bar{\partial}_t \theta^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 - |\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2). \quad (25)$$

接下来,估计(21)式的右端各项.注意到

$$G_1 + G_4 = 0, \quad |\bar{\partial}_t \varphi^n|_2^2 \leq c\tau^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\varphi_t|_2^2 ds. \quad (26)$$

类似于上节中 I_2 及 I_3 的估计,由 R_h 的定义可知,

$$G_2 = (\eta^{n+\frac{1}{4}}, \bar{\partial}_t \theta^n) \leq ch^2 \|u^{n+\frac{1}{4}}\|_2 \|\bar{\partial}_t \theta^n\|_0 \leq ch^4 \|u^{n+\frac{1}{4}}\|_2^2 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4 \|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2, \quad (27)$$

其中 $\|\varphi\|_{L^\infty(H^\rho)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi\|_{H^\rho(\Omega)}$, $\forall \varphi \in H^\rho(\Omega)$, ρ 为正整数.

同理

$$G_3 = (\bar{\partial}_t \eta^n, \nu) = (2\tau)^{-1} ((u^{n+1} - u^{n-1}) - I_h(u^{n+1} - u^{n-1})), \bar{\partial}_t \theta^n) \leq ch^2 (2\tau)^{-1} |u^{n+1} - u^{n-1}|_2 |\bar{\partial}_t \theta^n|_1 \leq ch^4 (2\tau)^{-2} |u^{n+1} - u^{n-1}|_2^2 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4 |\bar{\partial}_t u^n|_2^2 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4 \tau^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |u_t|_2^2 ds + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4 \tau^{-1} \|u_t\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2, \quad (28)$$

注意到 $f(u)$ 满足局部 Lipschitz 连续条件,由文献[13]及插值理论知

$$|G_5| \leq \left(\frac{1}{4} [(f(u^{n+1}) - f(U^{n+1})) + 2(f(u) - f(U)) + (f(u^{n-1}) - f(U^{n-1}))], \bar{\partial}_t \theta^n\right) \leq c(\|\eta^{n+1}\|_0^2 + \|\eta^n\|_0^2 + \|\eta^{n-1}\|_0^2) + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4(\|u^{n+1}\|_2^2 + \|u^n\|_2^2 + \|u^{n-1}\|_2^2) + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq ch^4 \|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2. \quad (29)$$

根据 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$G_6 + G_7 + G_8 \leq c(\|R_2^n\|_0^2 + \|\nabla R_1^n\|_0^2 + \|\nabla R_2^n\|_0^2) + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2 \leq c\tau^4 + \varepsilon |\bar{\partial}_t \theta^n|_1^2. \quad (30)$$

综合(22)~(25)式和(27)~(30)式,并取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 得

$$(2\tau)^{-1} [(\|\bar{\partial}_t \theta^{j+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \|\bar{\partial}_t \theta^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2) + (\|\theta^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 - \|\theta^{j-\frac{1}{2}}\|_1^2) + (|\bar{\partial}_t \theta^{j+\frac{1}{2}}|_1^2 - |\bar{\partial}_t \theta^{j-\frac{1}{2}}|_1^2)] \leq ch^4 (\|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2)}^2) + c\tau^4 + c(\|\theta^{j+1}\|_1^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2). \quad (31)$$

对(31)式两边同乘以 2τ ,并关于 j 从 1 到 $n-1$ 求和得

$$\begin{aligned} \|\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 + |\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}|_0^2 &\leq \|\bar{\partial}_t \theta^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 + |\bar{\partial}_t \theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 + \\ &cm^4 \tau \sum_{j=1}^{n-1} (\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + c \sum_{j=1}^{n-1} \tau^5 + \\ &c\tau \sum_{j=1}^{n-1} (\|\theta^{j+1}\|_0^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2). \end{aligned} \quad (32)$$

利用(18)式可知 $\theta^1 = U^1 - I_h u^1 = O(\tau^3)$,并注意到 $\theta^0 = 0$ 有

$$\begin{aligned} \|\bar{\partial}_t \theta^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 + |\bar{\partial}_t \theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 &= \tau^{-2} \|\theta^1 - \theta^0\|_0^2 + \frac{1}{4} \|\theta^1 + \theta^0\|_1^2 + \tau^{-2} |\theta^1 - \theta^0|_1^2 = \\ &\tau^{-2} \|\theta^1\|_0^2 + \frac{1}{4} \|\theta^1\|_1^2 + \tau^{-2} \|\theta^1\|_1^2 = O(\tau^4). \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $(n-1)\tau \leq N\tau = T$ 成立

$$ch^2 \tau \sum_{j=1}^{n-1} (\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + c \sum_{j=1}^{n-1} \tau^5 = O(h^4 + \tau^4). \quad (34)$$

利用(33)和(34)式,将(32)式变形为

$$\|\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 + |\bar{\partial}_t \theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 \leq c(h^4 + \tau^4) + c\tau \sum_{j=1}^{n-1} (\|\theta^{j+1}\|_0^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2), \quad (35)$$

注意到

$$|\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 = \frac{1}{2} |\theta^n + \theta^{n-1}|_1^2 = \frac{1}{4} (|\theta^n|_1^2 + |\theta^{n-1}|_1^2) + \frac{1}{2} (\nabla\theta^n, \nabla\theta^{n-1}),$$

$$(\nabla\theta^n, \nabla\theta^{n-1}) \leq \frac{1}{4} |\theta^n|_1^2 + |\theta^{n-1}|_1^2.$$

由(35)式不难得到 $(1 - c\tau) \|\theta^n\|_1^2 \leq c(h^4 + \tau^4) + c\tau \sum_{j=0}^{n-1} \|\theta^j\|_1^2$. 取 τ 充分小, 使得 $1 - c\tau > 0$, 再应用离散的 Gronwall 引理可得证本定理证毕.

注记 1 本文使用插值与投影相结合技巧文献[8-11], 对于半离散格式来说, 不仅大大简化了文献[7]中的证明过程, 而且在导出超逼近性质时只需 $u, u_t \in H^2(\Omega)$ 不必像文献[7]一样要求 $u, u_t \in H^3(\Omega)$. 另一方面, 当 $u \in H^3(\Omega), u_t \in H^2(\Omega)$ 时, 由(5)式及定理 3, 可推出文献[7]中的结果:

$$\|I_h u^h - u^h\|_1 \leq \|I_h u^h - R_h u^h\|_1 + \|R_h u^h - u^h\|_1 \leq c(h^2 + \tau^2).$$

但这里不要求 $u_t \in H^3(\Omega)$, 且对 u_{tt} 无要求, 从而也改善了文献[7]中结论.

注记 2 对于全离散格式, 本文要求 $u, u_t \in H^2(\Omega)$ 而不需文献[7]中的那样要求它们都属于 $H^3(\Omega)$, 并且也照样使证明过程更加简洁.

注记 3 不难验证, 这里的方法和结果对线性三角形元亦适用. 另外, 本文的思想也可用于处理其他非线性方程. 而且把对非线性项的要求从整体 Lipschitz 连续拓宽到局部 Lipschitz 连续的情形, 同样可改善相关文献的结果.

参 考 文 献

- [1] 尚亚东. 方程 $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u)$ 的初值问题[J]. 应用数学学报, 2000, 23: 385-392.
SHANG Y D. Initial boundary value problem of equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u)$ [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 23: 385-392.
- [2] 徐润章, 赵希人, 沈继红, 等. 具色散耗散项的四阶波动方程解的渐进性质[J]. 应用数学与力学, 2008, 29: 235-239.
XU R Z, ZHAO X R, SHEN J H, et al. Asymptotic Behaviour of Solution for Fourth Order Wave Equation With Dispersive and Dissipative Terms[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29: 235-239.
- [3] LIU Y C, XU R Z. Potential well method for Cauchy problem of generalized double dispersion equations[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2008, 338: 1169-1187.
- [4] XU R Z, LIU Y C, YU T. Global existence of solution for Cauchy problem of multidimensional generalized double dispersion equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 4977-4983.
- [5] 孙同军. 一类高维非线性色散耗散波动方程的有限元分析[J]. 山东大学学报(工学版), 2003, 33: 712-716.
SUN T J. The finite element method for a class of multi-dimensional nonlinear dispersive-dissipative wave equations[J]. Journal of Shandong University(Engineering Science), 2003, 33: 712-716.
- [6] 樊明智, 张建军, 石东洋, 等. 非线性色散耗散波动方程的 Hermite 型有限元分析[J]. 应用数学, 2012, 25: 341-349.
FAN M Z, ZHANG J J, SHI D Y, et al. Hermite-type Finite Element Analysis for Nonlinear Dispersion-dissipative Wave Equations[J]. Mathematica Applicata, 2012, 25: 341-349.
- [7] 王芬玲, 石东洋. 非线性色散耗散波动方程双线性元的高精度分析[J]. 数学物理学报, 2014, 34(A): 1599-1610.
WANG F L, SHI D Y. High Accuracy Analysis of the Bilinear Element for Nonlinear Dispersion-Dissipative Wave Equations[J]. Mathematica Acta Sinica, 2014, 34(A): 1599-1610.
- [8] SHI D Y, WANG P L, ZHAO Y M. Super-convergence analysis of anisotropic linear triangular finite element for nonlinear Schrodinger equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 38: 129-134.
- [9] 石东洋, 王芬玲, 赵艳敏, 等. 非线性 Sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式[J]. 计算数学, 2014, 36(3): 245-256.
SHI D Y, WANG F L, ZHAO Y M, et al. A New Pattern of High Accuracy Analysis of Anisotropic Linear Element for Nonlinear Sine-Gordon Equations[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2014, 36(3): 245-256.
- [10] 石东洋, 王芬玲, 樊明智, 等. Sine-Gordon 方程的最低阶各向异性混合元高精度分析新途径[J]. 计算数学, 2015, 37(2): 148-161.
SHI D Y, WANG F L, FAN M Z, et al. A New Approach of The Lowest Order Anisotropic Mixed Finite Element High Accuracy Analysis for Nonlinear Sine-Gordon Equations[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2015, 37(2): 148-161.
- [11] SHI D Y, MU P C, YANG H J. Superconvergence analysis of a two-grid method for semilinear parabolic equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 84: 34-41.
- [12] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定: 河北大学出版社, 1996: 304.

[13] THOMEE V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems[M]. Berlin: Springer, 2006: 186-187.

New high accurary estiments of bilinear element for nonlinear dispersion-disspative wave equations

Li Ling, Li Qiuhong, Lan Qixun

(School of Mathematics & Physics, Henan University of Urban Construction, Pingdingshan 467036, China)

Abstract: This paper mainly studies the new high-precision estimates of the bilinear element for the dispersion wave equations with local Lipschitz continuous nonlinear term. In the semi-discrete scheme, the idea of combining interpolation and projection is used to get the superclose property under weaker regular assumption of $u, u_t \in H^2(\Omega)$, but in the previous literature only optimal error estimate can be deduced. Further, based on interpolation post-processing techniques, the global superconvergence result is obtained when $u \in H^3(\Omega)$ instead of $u, u_t, u_{tt} \in H^3(\Omega)$. Finally, a fully discrete approximation scheme is established and a superclose estimate of its solution is investigated.

Keywords: nonlinear dispersion and dissipation wave equation; bilinear element; semi-discrete and fully discrete schemes; combination of interpolation and projection; superclose and superconvergent estimates

[责任编辑 陈留院 赵晓华]