文章编号:1000-2367(2016)02-0009-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.02.002

与年龄相关的种群模型解的全局稳定性

杨 莉,张启敏

(宁夏大学 数学计算机学院,银川 750021)

摘 要:讨论了一类与年龄相关的种群模型解的全局稳定性问题.通过 Lyapunov 函数、Barbashin-Krasovskii 定理以及 Itô 公式证明了与年龄相关的种群模型强解的存在性,并给出了该模型零解全局稳定的充分条件,最后通过数值算例对结论进行了验证.

关键词:种群模型;全局稳定性;弱解;Lyapunov 函数

中图分类号:O175.21 **文献标志码**:A

近年来,与年龄相关的种群模型引起了众多学者的广泛关注,并取得了很多成果[1-8].考虑如下与年龄相关的随机种群模型[2]:

$$\begin{cases} d_tP=-\dfrac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}t-\mu(t,a)P\mathrm{d}t+f(t,P)\mathrm{d}t+g(t,P)\mathrm{d}\omega_t, Q=[0,A]\times[0,T], \\ P(0,a)=P_0(a),\ a\in[0,A], \\ P(t,0)=\displaystyle\int_0^A\beta(t,a)P(t,a)\mathrm{d}a, t\in[0,T], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $T>0,A>0,d_tP=\dfrac{\partial P}{\partial t}\mathrm{d}t$. $P=P(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的种群密度,$\beta(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的出生率,$\mu(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的死亡率,ω_t 是布朗运动,$f(t,P)+g(t,P)$ 表示外界条件的影响.

对于模型(1),在 $f(t,P)$ 及 $g(t,P)$ 满足局部 Lipchitz 条件下,文献[2-3]介绍了随机年龄结构的种群模型解的存在性、唯一性和指数稳定性;文献[4]研究了基于半隐式 Euler 法的带 Poisson 跳与年龄相关的随机种群模型数值解的收敛性;文献[5]利用 Split-stepθ 方法讨论了带 Poisson 跳与年龄相关的随机种群模型解的数值收敛性;文献[6]利用马尔科夫链和 Split-stepθ 方法介绍了与年龄相关的种群模型数值解的收敛性;文献[7]在引入 Brown 运动的基础上,对基于半隐式 Euler 法的分数阶与年龄相关的种群模型方程进行了数值分析;文献[8]在原来确定性系统上,考虑了环境等因素引起的随机干扰,并讨论了模型(1)强解的存在性与唯一性.然而,事实上模型(1)中的 $f(t,P)$ 及 $g(t,P)$ 不一定满足局部 Lipchitz 条件,从而在较弱的条件下很难确保与年龄相关的种群模型强解的存在性和唯一性.因此,本文在没有局部 Lipchitz 条件的情况下进一步研究了与年龄相关的种群模型强解的存在性和全局稳定性.首先,本文定义了一般意义上的随机稳定性的概念及给出了与年龄相关的种群模型存在多个弱解的条件;最后,建立了与年龄相关的种群模型稳定性标准的更一般形式.由于与年龄相关的种群模型的弱解和强解存在本质区别,受以上文献及文献[9]中 Barbashin-Krasovskii 定理的启发,本文的主要工作是对模型(1)的全局稳定性定理进行了严格的证明.

1 预备知识

令 $V=H^1([0,A])\equiv\{\varphi\mid\varphi\in L^2([0,A]),\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L^2([0,A])\}$,其中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ 是偏导数. V 是 Sobolev 空间,

收稿日期:2015-09-28;修回日期:2016-01-21.

基金项目:国家自然科学基金(11461053;11261043)

第 1 作者简介(通信作者):杨 莉(1992-),女,宁夏固原人,宁夏大学硕士研究生,主要从事生物数学研究,E-mail:1052798936@qq.com.

V' 是 V 的对偶空间,$H = L^2[0,A]$ 满足 $V \cup H \equiv H' \cup V'$.

$\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 V' 和 V 的范数,$<\cdot,\cdot>$ 表示 V' 和 V 的对偶积,$(\cdot,\cdot)$ 是 H 中的内积,m 是实数,则有 $|x| \leq m\|x\|, \forall x \in V$.

$B \in \mathscr{L}(K,H)$ 是 K 到 H 的有界线性算子,$\|B\|_2$ 是 Hilbert-Schmidt 范数,即 $\|B\|_2^2 = \mathrm{tr}(BWB^{\mathrm{T}})$,其中 W 是完备空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 取值在可分的 Hilbert 空间上的 Brown 运动 ω_t 的增量协方差算子. 模型(1) 中的 $\mu(t,a),\beta(t,a)$ 满足下列条件(H_1):

$$\begin{cases}0 \leq \mu_0 \leq \mu(t,a) < \infty, \boldsymbol{Q} = (0,A)\times(0,T),\\ 0 \leq \beta(t,a) \leq \bar{\beta} < \infty, \boldsymbol{Q} = (0,A)\times(0,T),\end{cases}$$

$f(t,P)$ 和 $g(t,P)$ 则满足下列条件(H_2):

$$2\langle P,f(t,P)\rangle + \|g(t,P)\|^2 \leq -\alpha\|P\|^2 + \lambda|P|^2.$$

定义 1 若 $P(t,a)$ 是具有滤波$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq t_0}$ 的完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上的连续函数,$\{\mathscr{F}_t\}$ 自适应于布朗运动 $\omega a(t)$ 且 $\boldsymbol{P}\{\omega(t_0) = 0\} = 1$,其中初始值为 $P(t_0,a)$,对于 $\forall t, t\epsilon[t_0,\tau]$ 有

$$P(t,a) = P(t_0,a) + \int_{t_0}^{t}\left[-\frac{\partial P}{\partial a} - \mu(s,a)P + f(s,P) + g(s,P)\dot{\omega}(s)\right]\mathrm{d}s \text{ a. s.},$$

则$(P(t,a),\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P},\{\mathscr{F}_t\},\omega(t))$ 或 $P(t,a)$ 称为模型(1) 的弱解. 其中 τ 是弱解 $P(t,a)$ 的爆破时间,$\tau = \lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\inf\{t \geq t_0 \| \|P(t,a)\| \geq \varepsilon\}$.

引理 1[10] 如果 Borel 可测函数 $f(t,P)$ 及 $g(t,P)$ 是连续的,则对于可测空间$(H,\mathscr{B}(H))$ 上任一初始分布 υ,模型(1) 存在弱解 $P(t,a)$ 且对任何 $B \in \mathscr{B}(H)$ 有 $\boldsymbol{P}(t_0,a) \in \mathrm{B}\} = \upsilon(\mathrm{B})$.

2 全局稳定性

在模型(1) 中,对于 $\|P\|^2$,定义如下算子

$$\mathscr{L}\|P\|^2 = 2\langle P,-\frac{\partial P}{\partial a}\rangle\mathrm{d}t + 2\langle P,-\mu(t,a)P\rangle\mathrm{d}t + 2\langle P,f(t,P)\rangle\mathrm{d}t + \|g(t,P)\|^2\mathrm{d}t =$$

$$P^2(t,0) + 2\langle P,-\mu(t,a)P\rangle\mathrm{d}t + 2\langle P,f(t,P)\rangle\mathrm{d}t + \|g(t,P)\|^2\mathrm{d}t.$$

定义 2 模型(1) 零解的全局稳定性.

(i) 如果对 $\forall\epsilon \in (0,1)$,存在常数 γ,使得对模型(1) 中 $\forall P_0(a)$,都有弱解 $P(t,a)$ 满足

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{t\geq t_0}\|P(t,a)\| \leq \gamma\} \geq 1-\epsilon,$$

则模型(1) 的零解依概率全局稳定.

(ii) 如果模型(1) 的弱解 $P(t,a)$ 依概率全局稳定,且对 $\forall P_0(a)$,使得弱解 $P(t,a)$ 满足

$$\boldsymbol{P}\{\lim_{t\to\infty}P(t,a) = 0\} = 1,$$

则模型(1) 的零解依概率全局渐近稳定.

下面为本文的主要内容. 在这一节中,主要运用引理 1,Lyapunov 函数和 Itô 公式证明了模型(1) 的零解是依概率全局渐近稳定的.

定理 1 对于模型(1),假设存在函数 $\|P\|^2$ 满足以下条件:

(i) $A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0 - \frac{\alpha}{m} + \lambda \leq 0$,

(ii) 令 $P(0,a) = P_0(a)$,对于 $P(0,a)$ 的任意分布,模型(1) 中不存在非零弱解都属于$\{\|P\|^2 \in H \mid \mathscr{L}\|P\|^2 = 0\}$a. s.,

则模型(1) 的零解是依概率全局渐近稳定的.

证明 由引理 1 可知对任意确定的初始条件,模型(1) 中存在弱解 $P(t,a)$.

首先,证明模型(1) 的弱解定义在$[0,A]\times[0,+\infty)$a. s.. 否则,对弱解 $P(t,a)$ 有 $\boldsymbol{P}\{\sigma_\infty\} > 0$,其中 $\sigma_\infty = \lim\limits_{r\to+\infty}\sigma_r$ 且 σ_r 是停时,即 $\sigma_r = \inf\{t \geq 0 \mid \|P(t,a)\| \geq r\}$. 则存在 $\epsilon > 0, T > 0$ 使得 $\boldsymbol{P}\{\sigma_\infty \leq T\} > 2\epsilon$. 即存在足够大的数 $N > 0$ 满足

$$\boldsymbol{P}\{\sigma_r \le T\} \ge \epsilon, \forall r \ge N. \tag{2}$$

又由弱解的连续性可得

$$\boldsymbol{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2) \ge \boldsymbol{E}(I_{\sigma_r \le t} \| P(\sigma_r, a) \|^2) = \boldsymbol{P}\{\sigma_r \le t\} r^2. \tag{3}$$

利用 Itô 公式，条件(H_1) 以及(H_2) 可得到

$$\mathscr{L}\| P \|^2 = 2\langle P, -\frac{\partial P}{\partial a}\rangle \mathrm{d}t + 2\langle P, -\mu(t,a)P\rangle \mathrm{d}t + 2\langle P, f(t,P)\rangle \mathrm{d}t + \| g(t,P) \|^2 \mathrm{d}t \le$$

$$P^2(t,0) - 2\mu_0 \mid P(t,P) \mid^2 + 2\langle P, f(t,P)\rangle \mathrm{d}t + \| g(t,P) \|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^A \beta^2(t,a) P^2(t,a) \mathrm{d}a -$$

$$2\mu_0 \mid P(t,P) \mid^2 + 2\langle P, f(t,P)\rangle \mathrm{d}t + \| g(t,P \|^2 \mathrm{d}t \le (A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0) \mid P \mid^2 - \alpha \| P \|^2 +$$

$$\lambda \mid P \mid^2 \le (A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0) \mid P \mid^2 - \frac{\alpha}{m} \mid P \mid^2 + \lambda \mid P \mid^2 = (A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0 - \frac{\alpha}{m} + \lambda) \mid P \mid^2.$$

由条件(i) 推出

$$\boldsymbol{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2) \le \| P_0(a) \|^2, \forall t \ge 0. \tag{4}$$

结合(2)，(3) 和(4) 式可得出 $\epsilon r^2 \le \boldsymbol{P}\{\sigma_r \le T\} r^2 \le \| P_0(a) \|^2 < +\infty, \forall r \ge N$. 从而有 $+\infty = \lim\limits_{r \to +\infty} \epsilon r^2 \le \| P_0(a) \|^2 < +\infty$. 显然上式矛盾. 因此，有 $\boldsymbol{P}\{\sigma_\infty < +\infty\} = 0$ 且模型(1) 的弱解定义在 $[0,A] \times [0,+\infty)$ a. s..

接下来，证明模型(1) 的零解是依概率全局稳定的.

事实上为了使 $P_0(a) \ne 0$，对于模型(1) 的弱解 $P(t,a)$，结合(3) 和(4) 式以及 $\forall \epsilon \in (0,1), r > 0$ 可以推出 $P\{\sigma_r \le t\} r^2 \le \boldsymbol{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2) \le \| P_0(a) \|^2, t \ge 0$. 故当 $t \to +\infty$ 时有 $\boldsymbol{P}\{\sigma_r < +\infty\} \le \| P_0(a) \|^2 r^2$. 于是令 $r^2 = \dfrac{\| P_0(a) \|^2}{\epsilon}$，则有

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{t \ge 0} \| P(t,a) \|^2 \mid \le \gamma\} \ge 1 - \epsilon. \tag{5}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\| P_0(a) \|^2}{\epsilon}$.

在(4) 式中当 $\| P_0(a) \|^2 = 0$ 时，对 $\forall t \ge 0$ 能够得到 $\boldsymbol{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2) = 0$. 又当 $\| P \|^2 \ge 0$，对 $\forall t \ge 0$ 可以推出 $\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2 = 0$. 则对 $\forall t \ge 0$ 有 $t \wedge \sigma_r = 0$. 当 $r \to +\infty$ 时有 $\| P \|^2 \equiv 0$ a. s.

综上可知对 $\forall \epsilon (0,1)$，(5) 式成立. 因此，系统(1) 的零解是依概率全局稳定的.

最后，证明模型(1) 的零解是依概率全局渐进稳定. 由定义 2 中(ii) 可知只需证明模型(1) 的弱解 $\| P(t, a) \|^2$ 满足

$$\boldsymbol{P}\{\lim_{t \to \infty} \| P(t,a) \|^2 = 0\} = 1. \tag{6}$$

事实上，要(6) 式成立需分两步证明.

第一步，由弱解的连续性和文献[11] 可知，当

$$\mathscr{L}\| P \|^2 = 2\langle P, -\frac{\partial P}{\partial a}\rangle \mathrm{d}t + 2\langle P, -\mu(t,a)P\rangle \mathrm{d}t + 2\langle P, f(t,P)\rangle \mathrm{d}t + \| g(t,P) \|^2 \mathrm{d}t \le$$

$$(A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0 - \frac{\alpha}{m} + \lambda) \mid P \mid^2 \le 0,$$

以及 $\| P \|^2 \ge 0$ 时，对 $\forall r = 1,2,\cdots$，$\{\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2\}_{t \ge 0}$ 是非负连续上鞅.

那么，对 $\forall r = 1,2,\cdots$ 和 $t > s \ge 0$，有

$$\mathbf{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2 \mid \mathscr{F}_s) \le \| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2 \text{ a. s.}$$

利用 $\lim\limits_{r \to +\infty} \sigma_r = +\infty$ a. s. 及文献[12] 中 Fatou 引理可得到：对 $\forall t > s \ge 0$

$$\boldsymbol{E}(\| P(t,a) \|^2 \mid \mathscr{F}_s) = \boldsymbol{E}(\liminf_{r \to +\infty} \| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2 \mid \mathscr{F}_s) \le \liminf_{r \to +\infty} \boldsymbol{E}(\| P(t \wedge \sigma_r, a) \|^2 \| \mathscr{F}_s) \le$$

$$\liminf_{r \to +\infty} \| P(s \wedge \sigma_r, a) \|^2 = \| P(s,a) \|^2 \text{ a. s.}$$

因此，$\{\| P(t,a) \|^2\}_{t \ge 0}$ 是非负连续上鞅.

从文献[11] 中定理 2.1 得到 $\| P(t,a) \|_\infty^2 = \lim\limits_{t \to +\infty} \| P(t,a) \|^2$ 存在且几乎处处有限，$\boldsymbol{E}(\| P_\infty(t,a) \|^2) = \lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{E}(\| P(t,a) \|^2)$ 有限并且非负. 结合文献[13] 中推论 4，得到 $\{\| P(t,a) \|^2\}_{t \ge 0}$ 是一致可积的.

第二步,证明 $\boldsymbol{E}(\| P_{\infty}(t,a) \|^2) = 0$.

采用反证法,假设 $\boldsymbol{E}(\| P_{\infty}(t,a) \|^2) > 0$. 构造一个增长的时间序列 $\{t_k\}_{k\in\mathcal{N}}$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}$,定义了

$$Q_k(t,a) = P(t+t_k,a), \forall t \geq 0, \forall k \in \mathcal{N}.$$

由弱解的连续性知:对 $\forall k \in \mathcal{N}, Q_k(t,a)$ 连续并且满足下列等式

$$Q_k(t,a) = Q_k(0,a) + \int_0^t [(\frac{\partial Q}{\partial a}) + \mu(s,a)Q - f(s,Q) + g(s,Q)\dot{\omega}(s)]\mathrm{d}s, \forall t \geq 0. \tag{7}$$

其中 $\omega_k(s) = \omega(s+t_k) - \omega(t_k)$ 也是 Brown 运动,$Q_k(t,a)$ 和 $\omega_k(t)$ 定义在同一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上. 由上鞅的性质得 $\boldsymbol{E}(\| Q_k(t,a) \|^2) = \boldsymbol{E}(\| P(t+t_k,a) \|^2) \leq P(t_0,a), \forall t \geq 0, \forall k \in \mathcal{N}$.

利用上鞅不等式(见文献[14] 中定理 3.6) 推出:对任意的 $T \geq 0$ 及 $m > 0$ 有

$$\sup_{\forall k\in\mathcal{N}} \boldsymbol{P}\{ \sup_{0\leq t\leq T} \| Q_k(t,a) \|^2 \geq M \| \} \leq \sup_{\forall k\in\mathcal{N}} \boldsymbol{P}\{ \sup_{0\leq t\leq T} \| P(t+t_k,a) \|^2 \geq m^2 \} \leq \frac{\| P_0(a) \|^2}{m^2}, \tag{8}$$

从而有

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{\forall k\in\mathcal{N}} \boldsymbol{P}\{ \| Q_k(0,a) \|^2 \geq m \} = 0. \tag{9}$$

从(7) 和(8) 式中可得到:对任意的 $T \geq 0$ 及 $\varepsilon > 0$ 有(见文献[10])

$$\lim_{\sigma\to 0^+\mathcal{N}} \sup_{\forall k\in\mathcal{N}} \boldsymbol{P} \max_{|t-s|\leq\sigma, s\in[0,T]} \| Q_k(t,a) - Q_k(s,a) \|^2 > \varepsilon \} = 0. \tag{10}$$

利用(9),(10) 式以及文献[15] 中定理 4.2 得在概率空间$(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}},\hat{P})$ 上定义了一个连续过程 $\hat{P}, \hat{P}_{k_j}, j \in \mathcal{N}$,即当 $j \to +\infty$ 时,$\hat{P}_{k_j}$ 几乎处处收敛于 $\hat{P}$,$\hat{P}_{k_j}$ 和 Q_{k_j} 是同分布,记作

$$\hat{P}_{k_j} \xlongequal{\mathscr{D}} Q_{k_j}, \forall j \in \mathcal{N}. \tag{11}$$

其中$\{Q_{k_j}\}_{j\in\mathcal{N}}$ 是$\{Q_k\}_{k\in\mathcal{N}}$ 的后继序列.

根据(7) 及文献[15] 中定理 2.2 可知对 $\forall h \in C_b^2(H,\boldsymbol{R})$ 及 $l \in \mathcal{N}$,有

$$M(t) := h(\hat{P}(t \wedge \hat{\sigma}_l,a)) - h(\hat{P}(0,a)) - \int^{t\wedge\hat{\sigma}_l} \mathscr{L}h(\hat{P}(s,a))\mathrm{d}s.$$

显然 $M(t)$ 是鞅,其中 $\hat{\sigma}_l = \inf\{t \geq 0 \| \ | \hat{P}(t,a) \| \geq l\}$.

因此,由文献[15] 的标注 2.1 可推出 $\hat{P}(t,a)$ 是模型(1) 带分布 $\hat{P}(0,a)$ 的弱解.

当 $Q_{kj}(0,a) = P(t_{k_j},a), j \in \mathcal{N}$ 和$\{ \| P(t,a) \|^2 \}_{t\geq 0}$ 一致可积时,则$\{ \| Q_{k_j}(0,a) \|^2 \}_{j\in\mathcal{N}}$ 一致可积.

通过(11) 式发现$\{ \| P_{k_j}(0,a) \|^2 \}_{j\in\mathcal{N}}$ 也是一致可积的.

结合文献[16] 中定理 1.3 有

$$\boldsymbol{E}(\| Q \|_{\infty}^2) = \mathscr{E}(\lim_{j\to+\infty} \| Q_{k_j}(0,a) \|^2) = \lim_{j\to+\infty} \boldsymbol{E}(\| \ \| Q_{k_j}(0,a) \|^2),$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\hat{P}(0,a) \|^2) = \hat{\boldsymbol{E}}(\lim_{j\to+\infty} \| \hat{P}_{k_j}(0,a) \|^2) = \lim_{j\to+\infty} \hat{E}(\| \hat{P}_{k_j}(0,a) \|^2),$$

根据(11) 式有 $\hat{E}(\| \hat{P}(0,a) \|^2) = \boldsymbol{E}(\| Q \|_{\infty}^2) > 0$.

故 $\hat{P}(t,a)$ 是非零弱解.

类似的,对任意的 $t \geq 0$,当 $Q_k(t,a) = P(t+t_k,a), j \in \mathcal{N}$ 和$\{ \| P(t,a) \|^2 \}_{t\geq 0}$ 一致可积时,$\{ \| Q_{k_j}(t,a) \|^2 \}_{j\in\mathcal{N}}$ 也是一致可积的. 利用(11) 式能够推出:$\{ \| \hat{P}_{k_j}(t,a) \|^2 \}_{j\in\mathcal{N}}$ 也是一致可积的.

由文献[16] 中定理 1.3 得到

$$\boldsymbol{E}(\| Q \|_{\infty}^2) = \boldsymbol{E}(\lim_{j\to+\infty} \| Q_{k_j}(t,a) \|^2) = \lim_{j\to+\infty} \boldsymbol{E}(\| Q_{k_j}(t,a) \|^2),$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\| \hat{P}(t,a) \|^2) = \hat{\boldsymbol{E}}(\lim_{j\to+\infty} \| \hat{P}_{k_j}(t,a) \|^2) = \lim_{j\to+\infty} \hat{\boldsymbol{E}}(\| \hat{P}_{k_j}(t,a) \|^2).$$

综合(11) 式及对任意 $t \geq 0$ 满足 $\hat{E}(\| \hat{P}(t,a) \|^2) = \boldsymbol{E}(\| P \|_{\infty}^2)$ 即 $\mathscr{L}\| \hat{P}(t,a)) \|^2 \equiv 0$ a. s.

于是,通过(ii) 显然可得 $\boldsymbol{E}(\| P \|_{\infty}^2) = 0$. 又当 $\| \ | P \|_{\infty}^2 \geq 0$ a. s 和 $\boldsymbol{E}(\| P \|_{\infty}^2) = 0$,则有 $\| P \|_{\infty}^2 = 0$ a. s. ,即 $\lim\limits_{t\to+\infty} \| P(t,a) \|^2 = 0$ a. s.

因此,结合(i) 可证(6) 式成立. 从而得模型(1) 的零解依概率全局渐进稳定. 证毕.

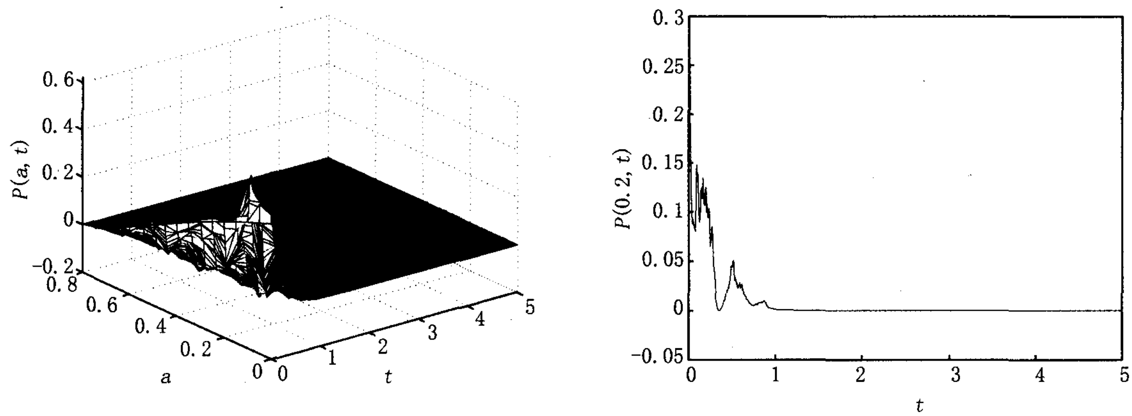
3 数值算例

通过下面的例子对本文得出的重要结论进行验证. 考虑以下与年龄相关的种群模型:

$$
\begin{cases}
d_tP = -\dfrac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}t - \dfrac{2}{(1-a)^2}P\mathrm{d}t - 4P\mathrm{d}t + \sin p\mathrm{d}\omega_t, Q = [0,0.8]\times[0,5], \\
P(0,a) = \exp(-\dfrac{1}{(1-a)}), a \in [0,0.8], \\
P(t,0) = (3-t)\displaystyle\int_0^A P(t,a)\mathrm{d}a, t \in [0,5],
\end{cases}
\tag{12}
$$

其中 ω_t 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 中的标准 Brown 运动.

显然模型(12) 满足条件(H_1) 和(H_2)，由条件(H_1) 得出：$\mu_0 = 2, \bar{\beta} = 3$；由条件$(H_2)$ 得出：$\alpha = -1$，$\lambda = -8, m = 1$，从而定理 2 中(i)$A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0 - \frac{\alpha}{m} + \lambda \leq 0$. 由分析可知模型(12) 满足定理 2 的条件，故模型(12) 的零解是依概率全局渐进稳定的. 图 1a 表示初值为 $P(0,a) = \exp(-\frac{1}{(1-a)})$ 的数值模拟. 图 1b 为图 a 中当 $a = 0.2$ 时的图形，它能够更直观的描述与年龄相关的种群模型的稳定性.



(a) 当Δa=0.05,Δt=0.01时　　(b) 当a=0.2,Δt=0.01时

图1　与年龄相关的种群模型数值模拟

4 结　论

本文介绍了一类与年龄相关的种群模型系统，并讨论了这类与年龄相关的种群模型系统解的全局稳定性问题. 该随机种群模型的优势是更符合实际问题，能够更好地反应种群的发展特性. 另外，在引入 Brown 运动的基础上，运用 Lyapunov 函数，Barbashin-Krasovskii 定理及 Itô 公式得出了与年龄相关的种群模型强解的存在性和全局稳定性，所得出的结论为种群模型的研究提供了理论依据.

参 考 文 献

[1] 马　婧，张启敏. 分数阶与年龄相关的随机种群系统的逼近控制[J]. 数学的实践与认识，2015，45(6)：230-239.

[2] Zhang Qimin, Liu Wenan, Nie Zankan. Existence, uniqueness and expoenential stability for stochastic age-dependent population[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，154：183-201.

[3] 张启敏，聂赞坎. 一类随机人口发展系统的指数稳定性[J]. 控制理论与应用，2004，21(6)：907-910.

[4] Wang Lasheng, Wang Xiaojie. Convergence of the semi-implicit Euler mehhod for stochastic age-dependent population equations with Possion jumps[J]. Applied Mathematical Modelling，2010，34：2034-2043.

[5] Tan Jianguo, Rathinasamy A, Pei Yongzhen. Convergence of the split-stepθ-method for stochastic age-dependent population equations with Possion jumps[J]. Applied Mathematics and Computation，2015，254：305-317.

[6] Rathinasamy A. Split-step θ-methods for stochastic age-dependent population equations with Markovian switching[J]. Nonlinear Analysis: Real Word Applications，2012，13：1334-1345.

[7] Ma Weijun, Zhang Qimin, Han Chongzhao. Numerical analysis for stochastic age-dependent population equationswith fractional Brownian motion[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat，2012，17：1884-1893.

[8] 李西宁,张启敏.与年龄相关的随机种群系统强解的存在性与唯一性[J].宁夏大学学报(自然科学版),2007,28(3):197-201.

[9] Ignatyev O, Mandrekar V. Barbashin-Krasovskii theorem for stochastic differential equations[J]. Proc Amer Math Soc,2010,138:4123-4128.

[10] Li Fengzhong, Liu Yungang. Global stability and stabilization of more general stochastic nonlinear systems[J]. J Math Anal Appl,2014,413:841-855.

[11] Li Xiaoyue, Mao Xuerong. A note on almost sure asymptotic stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching[J]. Automatica,2012,48:2329-2334.

[12] Rogers L C G, Williams D. Diffusions, Markov Processes and Martinngales[M]. United Kingdom: Cambridge University Press,2000.

[13] Chow Y S, Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales[M]. NewYork:Springer-Verlag,1997.

[14] Mao Xuerong. Stochastic Differential Equations and Their Applications[M]. Chichester: Horwood Publishing,1997.

[15] Ikdea N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes[M]. Amsterdam:North-Holland Publishing,1989.

[16] Liptser R S, Shiryaev A N. Statistics of Random Processes[M]. NewYork: Springer-Verlag,2001.

Global Stability of More General Stochastic Age-dependent Population Models

YANG Li, ZHANG Qimin

(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In this paper, we consider global stability of more general stochastic age-dependent population models. By use of Lyapunov functions, Barbashin-Krasovskii theorem, LaSalle theorem and Itô's formula to cover the stochastic age-dependent population systems having more than one weak solution. And it gives the sufficient condition for the global stability of the zero solution. Finally, the numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of our criteria.

Keywords: age-dependent population models; global stability; weak solution; Lyapunov function